

グラフ電卓を活用した中学校・高等学校・大学の実践

石川 理雄

Michio Ishikawa

1 はじめに

「今までに自分は、数学といえば受験数学のことしか考えていませんでした。なぜこのような式が導かれるのか、という理由もきちんと考えずに、与えられた公式を覚え、似たような問題をくり返し解いて、だいたいの解き方を暗記することで満足していたと思います。

今回は、真の数学者はそんなものではない、ということを学びました。物事に対して興味をもち、それを分析すること、自分で新たに考えることも、とても大切なことであるのに、今までは無意識のうちにそれを忘れてしまっていました。もう一度、数学とは何かを、考え直したいです。

今まで、ただ練習して覚えることが数学だと思っていたので、いきなり『考えろ』と言われても、頭の固い私には頭がついてこず、少し難しい気がしました。本当に今まで考えることをしてこなかったんだな、と反省しています。」

「僕の中で数学というと今までは、ただ計算問題を解いたり証明であったり、図形の問題を解いたりする、計算用紙と書くものを使うものだという意識がありました。実際、高校まではそのようなものばかりであったし、受験用の『数学』をずっとやっていたのでそのようなとらえ方をしていたのかもしれない。

そして大学に入ってから、うちは教育大学ということで確かに教育に関わる方面から見た勉強も行われるけれどやはり数学は高校からの延長であったり、新しい数学を習って、それを解くというものでした。けれどもこの学校数学研究の授業で取り扱ったグラフ電卓は今までとは全く違う『数学』でした。」

教員養成大学の附属高等学校のとき、数年間、「数学をたのしむ」をテーマに授業「学校数学研究」を大学で行った。上記は大学生の授業レポートの一部（原文のまま）である。

いわゆる進学校では国公立大学・有名私立大学の合格者数を意識し、入学試験に合格するために公式を覚え、問題を解く練習をし、テストで点数がとれればよいと考えて数学を勉強している生徒が多いのではないだろうか。

グラフ電卓を活用すると、授業の時空が受動性から主体性へ、生徒・大学生の生き生きとした表情に出会う。数学ソフトウェアをどのように活用するか。本稿では、グラフ電卓を活用した実践例および生徒・大学生の数学の学びを紹介する。

2 グラフ電卓について

グラフ電卓は Texas Instruments 製の TI92, TI92-Plus, Voyage200 を使用したが販売終了、現在は TI-Nspire CX CAS である。TI-Nspire CX CAS は、数式処理、グラフ（関数、媒介変数表示、極方程式、数列、微分方程式、3D）、幾何、スプレッド・シート、統計、データ収集の機能があり、それらをドキュメントとして保存でき、財務計算やプログラミングもできる数学ソフトウェアとハードが一体となった手のひらサイズの機器である。Software（TI-Nspire CAS）があり、iPad などにインストールできる。

TI-Nspire CX CAS や他の数学ソフトウェアは、式を入力後、一瞬にしてグラフを表示する。しかし、TI92, TI92-Plus, Voyage200 のグラフ描画には、次の特徴がある。

(1) グラフをアニメーションのように描く。

紙面で説明するのは難しいが、Voyage200 は飛行機雲のようにグラフを描画する。一変数関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ 上で与えられ、 t が a から b まで変化するとき、 $f([a, t])$ をリアルタイムで描くのである。量 x が変動するのに伴って変動する量 y を x の関数と捉えれば、関数概念を視覚的に理解できる。

平面曲線を媒介変数表示した場合、例えば、 $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、2つの曲線 $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$ と $c_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ は描かれた図形は同じ円であるが、曲線 $c_1(t)$ は円上を1周、曲線 $c_2(t)$ は2周する。動的グラフ描画機能は、曲線の媒介変数表示の理解に役立つ。

数学ソフトウェア、例えば GeoGebra は、「スライダー」を利用し、「残像の表示」を選び、「アニメーション」をオンにすれば同じことができる。Voyage200 は、式を入力し、「GRAPH」キーを押すだけである。

(2) 描画機能「F6 Style」:

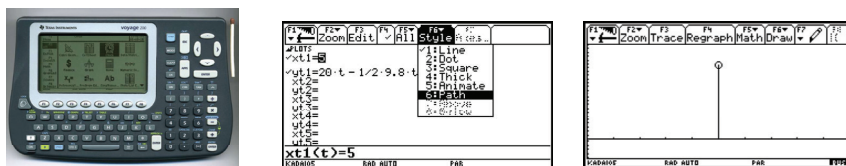
1:Line, 2:Dot, 3:Square, 4:Thick, 5:Animate, 6:Path, 7:Above, 8:Below

1 は線分 (Line) をつないで描く (通常の描画)。2 は点線 (Dot), 3 は Dot が四角 (Square), 4 は太線 (Thick) で描画。5 は点 (○印) がアニメーションのように動き (グラフは描かれない), 6 は 1 で○がついたもので動いた後に軌跡が描かれる。7 はグラフより上の領域に、8 は下の領域に斜線を引く。

(3) 複数の関数に対して、「Graph Order 1:SEQ 2:SIMUL」機能がある。1 は順 (SEQ) に、2 は同時 (SIMUL) に複数のグラフを描く。

グラフ描画を説明するとき、歓声上がる。このような機能があるからであろう。初めてグラフ電卓を手にしたとき、面白い、授業で使えと感じた機能の一つである。

動的グラフ描画機能は物理で使え、教材の幅が広がる。例えば、初速 v_0 m/s で真上に投げ上げた物体の t 秒後の高さ y m は $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ で与えられる。ただし、重力加速度 $g = 9.8$ m/s²。 $v_0 = 20$ m/s で真上に投げ上げた場合、図は左から、Voyage200, 「F6 Style」の「6:Path」選択画面、およびグラフ表示画面 (○は物体) である。



大学生のレポートに，次の感想がある．

- ・グラフが描かれはじめて，できあがるまでの緊張とワクワクはたまらないです．
- ・絶対値記号は使い方によってこんなにも面白い動きを作り出せるのかということに感動した．

3 グラフ電卓の教材

- (1) 絶対値記号のついた関数のグラフの探究
- (2) $x^n - 1$ の因数分解の探究
- (3) 物体の投げ上げ
真上に投げる，斜めに投げる，クレー射撃，花火大会
- (4) アルファベットを作ろう
- (5) 関数グラフアート
- (6) 歩いて関数を理解しよう（超音波距離センサー使用）
- (7) 三角関数の探究
- (8) 太陽光を集めよう
- (9) 代数学の基本定理
- (10) サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト（SPP）

科学技術・理科大好きプランの一環として，中学校や高等学校等，大学，公的研究機関，民間企業等との連携により，児童生徒の科学技術・理科，数学に関する興味・関心と知的探究心等を一層高める機会を充実することを目指す事業．

2004 年「距離を測る実験と落下運動の観察による関数概念の理解」

2005 年「数学的実験による三角関数の概念理解と振動現象の三角関数による表現」

2006 年「グラフ電卓の利用と実験を通した 2 次関数と三角関数の理解」

2007 年「グラフ電卓を活用した実験数学による関数の探究」

2008 年「グラフ電卓とセンサーを用いた実験を取り入れた数学学習」

2009 年「微分と積分の概念を深める数学的活動」

「物体の投げ上げ」は Voyage200 の動的グラフ描画機能がないとできない。他の教材は TI-Nspire CX CAS でできるが、この機能がある方が面白い。

高等学校では、授業進度など制約があるので主に授業後、SPP は夏休み、希望者を対象、中等教育学校では数学部で実践した。

2006 年実施の SPP では、次の感想（高校 1 年生）がある。

「数学は、難しいというイメージが強い子が多いと思うし、実際私もそう思っていたときがあったけど、今回の SPP のような授業を受けていけば、数学は楽しい！と思えるようになるなあと思いました。私としては距離センサーでやった実験がとてもツボにはまりました。なんか『数学をやっている気がしないのに、関数が学べてる!!』みたいな感動がありました。」

「新たなグラフ電卓の利用方法と利用して導きだす数学の楽しさを学べたと思います。数学の中では、関数が一番難しく感じていたのですが、関数を身近に感じる事が出来たと思います。今後は、今回のことを土台として更に数学について追究できればよいと思います。」

教員養成大学の授業「学校数学研究」（15 回）を、(1) から (6) の教材で 7 回行った。大学では自由に授業ができた。手応えはあった。距離センサーを利用した授業「歩いて関数を理解しよう」では次の記事がある。

「学校数学研究 A」という講義では、人との距離を測る機械を使ってグラフを描く、ということをやりました。その機械の前に立って前後に歩くと、コンピュータがグラフを作ってくれるのです。そこで、「こんなグラフは作れないか」と色々な動きを試しました。難しかったのは三角関数のグラフで、何度も挑戦し、最後に友人数人が、重力に任せて倒れる一人を両脇から支えて前後に揺する、という危なっかしくもユーモラスな方法でグラフを完成させてくれました。「数学を体験する」という、大変貴重で面白い講義でした。（愛知教育大学学園便りの特集「愛教大の学び、私のイチオシ」2004 January No.99, 6 ページ）

4 初めてグラフ電卓を使って実践した高校生の感想

はっきり言って、僕は数学が嫌いだった。ただひたすらに速さと正確さを求めるだけの面白くない教科だと思っていた。

そんな時、友達の一人がなんとも不思議な形をした線が載っているプリントを持っていた。なんとそれは関数のグラフだというのだ。関数といえば、比例・反比例・一次関数・二次関数くらいしか知らなかった僕は、そんな形が関数のグラフとして表現できることに感動した。それが僕の MTT との出会いだった。

それから僕の数学観は大きく変わった。数学とは論理であり、テストで最も問われているのは思考力だ、と思い始めた。すると、つまらないと思っていた数学が、なんとも面白味のあるものに思えてきた。そして、僕はいつの間にか数学が好きになっていた。

MTT は、単位がつくわけではないし、大学入試の出題範囲に入っているわけでもな

い。はっきり言って遊びの一種である。しかし、数学で遊ぶことが数学への興味を湧き立たせ、更には思考力をも養うことになった。もはや受験に関係ないとは言い難いだろう。

興味の無いことを学びたいとは決して思わないだろう。数学に限らず、あらゆる分野で「楽しむ」ということが、その分野を学ぶ上で最も大切なことは言うまでもない。MTTを経験して、僕は数学が楽しくなったし、学びたいと思うようになった。MTTは、今、最も必要とされている教育スタイルと言えるだろう。

(注) MTTは、Mathematics Thinking with Technology の略。

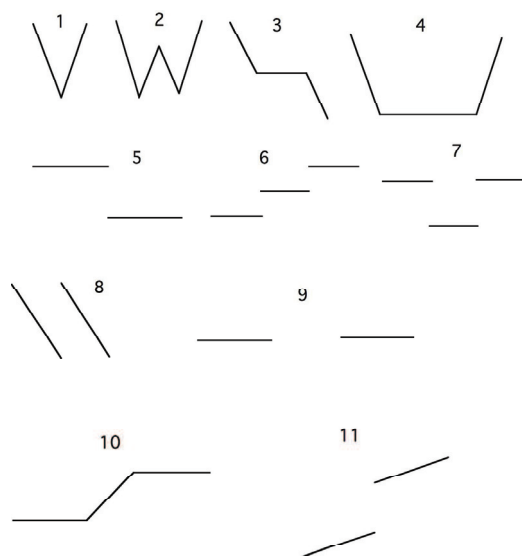
次に、「不思議な形をした線が載っているプリント」を紹介する。

5 絶対値記号のついた関数のグラフの探究

【Activity】グラフが図のようなとき、どのような式になるでしょうか。ただし、絶対値記号を必ず使用し、関数の式は一行とする。

【授業の流れ・留意点】

- (1) Voyage 200 を一人1台貸与。
- (2) グラフ描画の説明(15分程度)。操作で躓いたらすぐに質問する。
- (3) 出来たグラフをプロジェクターで適宜映し(式は見せない)、発表する。



数学は、逆を考えると面白い。式からグラフではなく、グラフを与えて式をつくる。グラフ電卓の最初の授業は、この教材である。式の入力とグラフ描画キーを押すだけの簡単な操作と視覚的であるからである。Voyage200の動的グラフ描画は、グラフが出来上がるまでワクワクする。

<大学生の学んだこと・感想>

[1] 式からグラフを推測するという普通の数学ではなく、グラフから式を作るというのは印象的である。いろいろな式を作り、推測し、どんどんグラフを近づけていく。知っているグラフをかけ合わせることで今まで知らなかったグラフを作る。これは今までの数学者が偉大な発見をしたときのような気分になれた。

今までは、数学者が、この法則を見つけるのに何十年もの歳月をかけたというようなことを聞くと、なぜそんなにまでと思っていたが、自分も寝る間も惜しんでグラフ作りに没頭していたことを考えると、その気持ちがわかるとともに、数学のおもしろさを知

ることができたと思う。

[2] 驚きと感動でいっぱいでした。勉強しているんだ、というかたい気持ち・気分ではなく、遊びのような感覚で、グラフ電卓を使うことができた。

[3] 絶対値のグラフは奥が深い。実にいろいろなパターンのグラフがかけることから、絶対値のグラフはとても広がりを持っていることを学んだ。グラフをあらかじめ与えておいてから、生徒にそのグラフの式を考えさせる方法は、式が与えられていてグラフを描くよりも考え方が養われる。

今回グラフ電卓にふれるのが初めてで、一体どういう授業になるのだろうと思っていたが、いざやってみると自分自身この授業がとても楽しくて、いいと思った。きっとMTTは、生徒の興味・関心をとても引きだせる。

[4] 授業の中で、できている人のグラフを発表していました。自分の作ったものが発表されることは、子供の自信にもつながるので、発表する授業もいいなあと思いました。

パソコンを使った授業ならうけたことはありますが、このような授業は初めてでした。私はパソコンがシャレにならないくらいできないので、ハイテクそうな機械を見た時、すごく気が重くなりました。絶対ついていけないと思いました。ところが、内容がすごくおもしろくて、機械音痴の私でも楽しく考えることができました。考えて作った式をグラフにして、同じグラフができた時は、すごくうれしくて、次のも頑張ろうと思うことができました。もっといろんなことをやりたいです。

[5] 今まででは、どちらかという数学では何か道具を使うということはいけないことだと思っていた。なので、初めはグラフ電卓の授業に少し抵抗があった。けれど、ボタン1つでグラフが表示され、“考える”ということだけに集中でき、とてもいいもののだと思った。とかく、「答え」だけを求めがちな受験用数学に対し、MTTでは「答えを求めるための方法」を探る形式で、こういった授業だとあきない。クイズ感覚で進められた。

今回のような、与えられたグラフになる式を求める場合、その重要性をさらに感じた。自分が考えた案をいちいち手書きで図示していたら、なにより時間がかかるし、いろいろなパターンを試すこともおっくうになる。けれど、MTTでは違った。簡単に試行錯誤ができるので、MTTの授業を進めていったら、格段に考える力が増すだろうなあと思った。グラフ電卓を臨機応変にとりいれることでより良い数学教育が行われるだろうと思う。

<中学生（数学部）の感想>

[1] 中学2年生（数学少年）

数学部で関数のグラフを扱うと聞いた時、はっきり言えばあまり楽しそうじゃないなと思いました。なぜなら、僕の知っている関数のグラフと言えば、高次関数、分数関数、対数関数、無理関数、極座標、媒介変数表示など、複雑なものばかりで、数学部はもっと複雑なことをやるのではないかと思ったからです。しかし、絶対値を使ったグラフを作ると聞いて、気持ちが変わりました。今まで絶対値を使ったグラフについて一度も研究したことが無かったからです。絶対値記号のグラフなんて、教科書の隅で少ししか扱っていないもので、「折り返す」ということくらいしか知りませんでした。また、僕はいつも「式」から「グラフ」に変える問題ばかり解いていましたが、「グラフ」から

「式」に変える問題は初めてで、とても新鮮でした。何も知らない僕はかなり手こずって、一日中ひたすら考えていました。グラフのことを全く考えず、式整理をしていただけたのにグラフ電卓に式を入力した時に求めているグラフが出てきた時の感動はとても大きかったです。試行錯誤の末にほとんどのグラフが完成しましたが、数学部の面白い所はこれからで、「もっときれいな式にできないか」「もっと簡単に式を見つけることができるか」ということも深く考えました。今では完璧な結論が出て、簡単できれいな式でグラフをかくことができます。しかし、数学部はそこで終わりではなく、次は自分で課題を探します。自分はもう絶対値記号を使ったグラフは完璧だと思っていても、友達と「このグラフはどんな式でかけるか」という問題を出し合っていると意外と解けないものです。そのため、絶対値記号を使ったグラフはとても奥深く、まだまだ多くの研究ができるということがよくわかります。こんなにいい研究材料を与えてくれた数学部のこの活動にとても感謝したいです。数学で、今までには無かった面白さを教えてくれた活動でした。与えられた課題を解くのが目的なのではなく、この課題をいかにして深く研究するかということが数学部では大切だということを再認識しました。

[2] 中学1年生

数学Iで学ぶまで、「絶対値」というものを知らなかった。授業では、「なぜこんな意味の無さそうなことをやるのだろう?」と疑問に思ったが、数学部で関数のグラフとして絶対値の奥深さに感動した。まだまだ数学には面白くて興味深いことがあると思うので、調べてもっと数学を好きになりたいと思う。

6 数学的活動

どのように考えたのであろうか。レポート（図が描いてあるが省略）を見てみよう。
 <中学1年生>

数学少年、一週間ほどで全問解答。9のグラフは途中が消えている、不思議である。まず、 $y = \frac{|x|}{x}$ を見つけ、グラフ5から1 $1 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9$ の順に求めている。以下はレポートである。

9のグラフの作り方として、 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ のグラフで、 $g(x) = 0$ となる x の範囲において y の値（グラフ）が消えることを利用する。

この時、7のグラフを利用すると、7のグラフを上へ2ずらすことで、 $0 < x < 1$ のときに $y = 0$ となるグラフがつくれるから

$$g(x) = -\frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + 2.$$

ここで、 $f(x)$ は定数ならどんな値でも y は定数となるので、 $f(x) = 1$ （定数ならなんでもよい）とする。よって求める式は

$$y = \frac{1}{-\frac{|x|}{x} + \frac{|x-1|}{x-1} + 2}$$

となる。

<大学生 A>

7のグラフ：2つの答えが出ました．1つはがむしゃらにやっていた時に見つかった式 $y = \frac{|x+1||x-1|}{(x+1)(x-1)}$ ．

もう一つは6を考えた後に思いついた．5のグラフを上下変えて左右にずらして重ねると，式は $y = -\frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-1|}{x-1}$ ．

9のグラフ：7のグラフは， $-1 < x < 1$ で $y = -1$ だったので，その時の値が0になれば，それを分母にしてつくればよいから，

$$y = \frac{1}{\frac{|x+1||x-1|}{(x+1)(x-1)} + 1}.$$

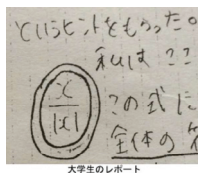
感想：問題を解いていく上で，適当にやってみて，答えが出る時もあるけど，しっかり考えて，自分の予想通りになると，その式の意味も構造も見えてくるので，楽しいし，理解ができる．やはり，考える事が大切だなと思いました．

<大学生 B>

5のグラフは $y = \frac{x}{|x|}$ ：友達から，符号だけをあやつれるような関数が必要，というヒントをもらった． $y = \frac{x}{|x|}$ において，分母は常に正であるので，全体の符号は x 自身の正・負によって決定される．私は，ここに，絶対値の本質がみえた気がした!!

5で友達からのヒントをうけて，すごいこと（私にとって!）を発見してしまったので8のグラフの方程式は割と簡単に求めることができた．

感想：5のグラフの発見で，今まで，0からの距離というくらいだった絶対値の意味の幅が広がった．グラフに対する幅も広がった．グラフと式は完ぺきな関係と思った．



※とても嬉しかったのだろう．レポートから発見の喜びが伝わってくる．

<大学生 C>

自分の考えた式のグラフがすぐに表示されるので，何回でもチャレンジでき，だんだんと式とグラフの関係がわかってくる．

7 グラフ電卓を活用した授業の感想

<高校生（3年間グラフ電卓を使用）>

高校時代授業での数学は受験で得点を稼ぐ方法が重視されがちで，公式や解答パターンを覚えていかに早く正確に答えを出すことができるのかということばかり追いかけているように感じました．もちろんそのような勉強法も必要なことかもしれませんが私にはそれがとてもつまらなく思えてしかたがありませんでした．ただ淡々と作業をこなすように問題を解くだけが数学なのだろうか．そんな疑問を解決してくれたのがグラフ電

卓との出会いでした。

グラフ電卓をただ問題の答えを出すことだけに利用したのではいままでと何も変わらなかったはずですが、私はグラフ電卓を媒介にして様々な考える機会を得ることができました。関数グラフアートもそのひとつですが、自分の描きたい形をとる関数を自分でみつけだしていく、そこには決められた解法があるわけではありません。今までわからなければ解答を見ればよかった私には難しいことでした。しかし退屈だった数学の意外な一面を知り、面白さはこの「自ら考えること」にあるのかもしれないと思いました。なぜだろうと思ったことを自分で考えてみる。いつも満足のいく答えにたどりつくわけではありませんでしたが、考えをめぐらせたぶんだけ充実感や新しい発見もありました。自分で考えることの重要さに気づいてからは日ごろの勉強に望む姿勢も少なからず変化しました。納得がいくまで考えてみるようにすると問題演習も今までよりおもしろく、身についているような気がしました。

決められたことだけを与えられるままにこなすことは楽なことかもしれません。しかしそれでは本当の面白さは見えてこないと思います。私はグラフ電卓での学習を通して自ら考える楽しさを知ることができたとおもいます。

<大学生>

[1] 数学は、数楽つまり楽しまなくちゃいけないということがよくわかった。実際のところ、私は、数学をやっているのは、楽しいし、嫌ではないけど、決して得意というわけではないので、楽しくやることができるこの授業とても大好きです。

今回の宿題すごく楽しくて、やりだすととまらなくて、でもできなくて行き詰まるって感じでしたが、とてもたのしかったです。今までは、積分の導入などについて学んだけど、今日は数学の導入を学ぶことができた。ありがとうございました。

☆中日新聞の朝刊に、「数学とは、数楽、数が苦」という感じの題で、記事が載っていて、すごくなんだか嬉しい感じがしたので、報告してしまいました。

[2] 「数学」と聞くとすぐに、大学の入試のためにやっていた暗記をするような内容を思ってしまうのですが、今回やったMTTで、「数学」とは覚えるものではなく、考えたり、新しくつくったりするようなものだということを改めて感じました。いまの中・高の数学は、「受験のためにしている」というようなものになっていると思うし、数学のよさを生徒に伝えられていないと思います。こういうことを授業でやっていけば、数学の嫌いだった子も楽しく学べてよいと思いました。

このようなことを高校や中学でやれたら数学がもっと楽しかったのにとおもいました。

[3] 今まで、私が中等教員で受けてきた数学の授業とは全く違っていた。一般の授業では数学は、解くことを楽しむ教科のように感じる。つまり、解けなければ楽しくないのだ。しかし、今回のグラフ電卓の使用では、計算は機械が行う。解くことよりも頭で「考える」ことや「実験」による試行の繰り返しによって数学を楽しんだ。受験数学では自分で解き方を考えることも大切なのだが、それまでに似たような問題に出会ったことがあるか、解き方を覚えているかが鍵となる。普段の授業では、どうしてそういう解き方になるのか理解できなかったとしても深く考える時間はなく、納得しないまま解法だけを覚えることになってしまうケースが多い。しかし、グラフ電卓は全員が同じこと

を学ぶとは限らないし、学ぶということが自らの手に託されている。自分にまかされているという点でも楽しい。

[4] 今まで自分がやってきた数学とは全く違った数学に触れた気がしました。考えて、作るということの大切さがわかりました。

与えられた問題をマニュアル通りに解いていく数学ではなく、いろいろ考えて、確かめて、自分で作り出していくことはとても大切なのに、今の高校生に一番欠けていることではないでしょうか。こういった数学を高校生に学ばせることが出来たら、もっと数学好きな子が増え、大学に入ってから数学にもっと興味が持てると思います。

[5] 楽しい授業。今までやってきた授業と違って、どの教材も興味を引くものだった。自分で考え、やっていくうちに、事の本質とか、数学上の定義とかいうものを知らないうちに理解しているんだと思う。

8 おわりに

グラフ電卓は使い方によって、計算力が落ちたり考えることをしなくなるであろう。キーを押す前に、答を予想することが肝要である。結果より過程が大事。もちろん、紙と鉛筆を使うことは基本である。

グラフ電卓は、試行錯誤が容易にでき、深く考えることに活用できる道具であり、新しい発見（再発見でも自分にとっては新発見）をすることができる力がある。どのような教材で授業するか、それが重要である。教材は、授業者が面白いと感じ、簡潔で単純なものが望ましいであろう。

グラフ電卓を活用した授業で、生徒・大学生は、数学をたのしみ、主体的で深く学び、生き生きとした表情を見せる。従来の授業では見えない生徒・大学生の「すばらしさ」に出会い感動した。授業レポートは、数学教育とは何かを考えさせられ、示唆に富む。

考えて、わかる。わかると嬉しい。難しいことに挑戦すると、難しさも楽しさにつながる。自分で考えることをたのしみ、生涯学び続ける人に育ってほしい。

グラフ電卓や数学ソフトウェアの活用により、

「覚える」数学から「考える」数学へ

「教える」から「学ぶ」へ

子どもは小さな数学者

参考文献

- [1] 石川理雄：「グラフ電卓がひらく数学教育－自ら考え、数学を楽しむ－」，愛知教育大学出版会，2007.