

写像の Leray スペクトル列と fiber shape

筑波大・数 矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

§ 1 decompositions of manifolds and sheaves

manifold M の decomposition G を考えるさい, G の元 g の shape type や G の regularity 特に homotopical local triviality の情報から さらに M , G , decomposition space M/G , projection $\pi: M \rightarrow M/G$ などについて情報を得ようとするとき, 代数的な道具として π の (Čech cohomology) Leray sheaf $\mathcal{L}(\pi)$ や Leray spectral sequence $E(\pi): H^*(M/G, \mathcal{L}(\pi; \mathcal{A})) \Rightarrow H^{**}(M; \mathcal{A})$ を用いることができる。Bredon の "Sheaf Theory" [1] の中でも M/G の cohomological dimension, local connectedness, さらに M/G がどのような条件の下で homology manifold になるかといったことについて主に代数的な観点から調べている。一方 decomposition theory では, きわめて幾何的な議論が中心になるわけであるが, Daverman, Dydak, Walsh et al はこの方向から再び sheaf を考察している。今日の講演では homology n manifold X の local orientability (i.e. n -th homology sheaf $\mathcal{H}_n(X)$ が locally

constant) の Dydak - Walsh による elementary proof [2] を紹介した, この証明は次の2つの議論に要約された:

(1) 一般に, X が完備距離空間, X 上の presheaf $\mathcal{S}$ は locally finitely generated, induced sheaf $\mathcal{L}$ の各 stalk $\mathcal{L}_x$ も finitely generated で $\mathcal{L}_x \cap \mathcal{L}_y$ ($x, y \in X$) ならば dense open set 上で $\mathcal{L}$ は locally constant である.

(2) $\mathcal{L}_n(X)$ は (1) より dense open set U 上で locally constant になる. U を極大にとっておき, $X \setminus U$ キルとすると再び (1) より $X \setminus U$ の dense open set V 上で $\mathcal{L}_n$ は locally constant になる. いま A を, 1つの end は V に, 残りの部分は U に含まれる arc とすると $\mathcal{L}_n|_A$ が constant になることが示され, $A \subset U$ となって矛盾を得る.

[2] では, finitely generated local homology をもつ homogeneous ENR が homology manifold になるという事実の elementary proof も与えている.

筆者も decomposition への興味から Leray sheaf と fiber shape の関係を調べたことがあり ([3]), この論説では次の2つの事柄について説明する. §2 Leray spectral sequence の tautness §3 Leray spectral sequence の fiber shape invariance

§2 Tautness of Leray spectral sequences of maps

Čech type の invariant は continuity によって特徴付けられる。

[1] では (Čech) sheaf cohomology の tautness (paracompact support) と continuity (locally compact, compact support) が示されているが、では (Čech) Leray sheaf と, Leray spectral sequence

は map に対して tautness を持つであろうか? 次の設定を考える:

$f: X \rightarrow Y: \text{map}$, $X_0 \subset X: \text{closed}$. $\Lambda: \text{a directed set}$

$X_\lambda \subset X (\lambda \in \Lambda)$; $X_\lambda \supset X_\mu \supset X_0 (\lambda \leq \mu)$, $Y_0 \subset Y: \text{closed}$

$Y_\lambda \subset Y (\lambda \in \Lambda)$; $Y_\lambda \supset Y_\mu \supset Y_0 (\lambda \leq \mu)$ $f(X_\lambda) \subset Y_\lambda (\lambda \in \Lambda$

or $\lambda=0$) $f_\lambda = f|_{X_\lambda}: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$, $\mathcal{A}: \text{a sheaf over } X$, $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}|_{X_\lambda}$

$\phi, \gamma: \text{paracompactifying families of supports on } Y, X \text{ resp.}$ $\phi_\lambda =$

$\phi \cap Y_\lambda$, $\gamma_\lambda = \gamma \cap X_\lambda$. cofinality: "X の任意の近傍がある X_λ を

含む, $\{Y_\lambda\}$ についても同様" とする。このとき次の diagram を得

る。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(*)} \quad \{ \mathcal{L}_{\gamma_\lambda}^q(f_\lambda; \mathcal{A}_\lambda) \rightarrow \mathcal{L}_{\gamma_\mu}^q(f_\mu; \mathcal{A}_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} & , & \text{(**)} \quad \{ E(f_\lambda) \rightarrow E(f_\mu) \}_{\lambda \leq \mu} \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 \mathcal{L}_{\gamma_0}^q(f_0; \mathcal{A}_0) & & E(f_0)
 \end{array}$$

Thm. (＊), (＊＊) は共に direct limit である, ちをあら $\mathcal{L}, E$ は tautness を満たす。

但し, ここで direct limit の意味は:

(＊) 各 $y \in Y_0$ に対して y 上の stalks の diagram $\{ \mathcal{L}(f_\lambda)_y \rightarrow \mathcal{L}(f_\mu)_y \}_{\lambda \leq \mu}$ が direct limit.

(＊＊) 各 r, p, q に対して diagram

$\{E_r^{pq}(f_\lambda) \rightarrow E_r^{pq}(f_m)\}$ が direct limit. formal には,

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & \swarrow \\ & E_r^{pq}(f_0) & \end{array}$$

R -module の direct system の category $\text{dir-}R\text{-mod}$ に terms $E_r^{pq}(\pm) = \{E_r^{pq}(f_\lambda)\}$ をもつ spectral sequence $E(\pm)$ を考えたとき, morphism $E(\pm) \rightarrow E(f_0)$ が degree wise に direct limit ということである。

(*) は Leray sheaf の定義より容易に示される。一方 (*) については, homology が direct limit を保つことに注意して E_2 -term について次を示せばよい:

$$\text{claim diagram } \{H_{p,q}^r(Y_\lambda, \mathcal{L}_{Y_\lambda}^q(f_\lambda, \mathcal{A}_\lambda)) \rightarrow H_{p,q}^r(Y_m, \mathcal{L}_{Y_m}^q(f_m, \mathcal{A}_m))\}_{\lambda \leq m}$$

$$\searrow \swarrow$$

$$H_{p,q}^r(Y_0, \mathcal{L}_{Y_0}^q(f_0, \mathcal{A}_0))$$

は direct limit.

(*) より $\{\mathcal{L}^q(f_\lambda)\} \rightarrow \mathcal{L}^q(f_0)$ は direct limit であり, compact supports case は [1] ch II §14 より示す。一般の case は次の事柄に注意する:

Lemma index set Λ は次の意味で "locally finite directedness" を満たす: Y の open set U に対して $\lambda \leq \mu \iff f^{-1}(U) \cap X_\lambda \supset f^{-1}(U) \cap X_\mu$ と定義する。もし $\{U_\alpha\}_\alpha$ が locally finite open family of Y であれば indices $\{\lambda_\alpha\}_\alpha \subset \Lambda$ に対して $\lambda \in \Lambda$ で $\lambda_\alpha \leq_{U_\alpha} \lambda$ となるものがとれる。

これより "compact, finite indices" を "paracompact,

"locally finite indices" におきかえて, local sections をつなぎ合わせることもできる。したがって $\mathcal{L}(f_0)$ の flabby resolutions の direct limit が $\mathcal{L}(f_0)$ の flabby resolution となり, これらも locally finite directedness を満たすので, sections ρ をとって direct limit が保たれ claim を得る。

§3. fiber shape invariance of Leray spectral sequences

fiber shape theory は fiber homotopy theory の Čech extension として定義される。以下, 空間は metrizable とする。 B を base space とし, $\mathcal{F}H_B$ を fiber homotopy category over B , $\mathcal{F}A_B$ を ANFR over B からなる subcategory とする。ここで map $k: E \rightarrow B$ が ANFR (or local soft map) とは diagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & E \\ \cap & & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}, \quad A \subset X: \text{closed}$$

が与えられたとき, A の近傍 U と map $U \rightarrow E$ で次を可換にするものが存在する:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & E \\ \cap & \nearrow & \downarrow k \\ U & \xrightarrow{f_U} & B \end{array} \quad (\text{すなわち, partial lift が}$$

近傍に拡張する。) たとえば, ANR fiber の bundle map は ANFR であり, ANR の間の proper map に対しては, ANFR は Hurewicz fibration と一致する。さて $\text{pro } \mathcal{F}H_B$ において各 map $f: X \rightarrow B$ に対して morphism $\phi: f \rightarrow k \in \text{pro-}\mathcal{F}H_B$ が存在して, "任意の $\psi: f \rightarrow k \in \text{pro } \mathcal{F}H_B$ に対して $\psi: k \rightarrow \psi$ で $\psi \psi = \psi$ となるものが unique

に存在する”。したがって fiber shape category $sh B = sh(\mathcal{F}X_B, \mathcal{F}X_B)$ を得る: $Ob sh B = Ob(\mathcal{F}X_B)$, $Mon_{sh B}(f, g) = Mon_{\mathcal{F}X_B}(\mathbb{F}_f, \mathbb{F}_g)$ である。

一般に shape invariant は homotopy invariant で continuity をもつものとして特徴付けられる。Leray sheaf や Leray spectral sequence は (fiberwise) constant sheaf 係数のとき fiber homotopy invariant で §2 より tameness を満たすから, fiber shape invariant になることがわかる:

Thm $\mathcal{B}$ を B 上の sheaf, ϕ を B 上の paracompactifying family of supports とするとき map $f: X \rightarrow B$ の Leray sheaf $\mathcal{L}^*(f: f^*\mathcal{B})$, Leray spectral sequence $E_f: H_p^*(B: \mathcal{L}^*(f)) \Rightarrow H_{f(b)}^{p+q}(X: f^*\mathcal{B})$ は fiber shape invariant である。

これより自動的に fiber shape morphism に対する Vietoris - Bregle type の結果が得られる。

Cor $f: X \rightarrow B$, $g: Y \rightarrow B$ を closed maps, $\phi: f \rightarrow g$ を fiber shape morphism とする。もし各 $b \in B$ に対し $\phi_b^*: H^*(g^*(b): \mathcal{B}_b) \rightarrow H^*(f^*(b): \mathcal{B}_b)$ が isomorphism であれば $\phi^*: H_{g(b)}^*(Y: g^*(\mathcal{B})) \rightarrow H_{f(b)}^*(X: f^*(\mathcal{B}))$ も isomorphism である。

References

- [1] G. E. Bredon, Sheaf Theory, McGraw-Hill, New York
— 6 —

1967.

- [2] J. Dydak and J. Walsh, Sheaves that are locally constant with applications to homology manifolds, Geometric Topology and Shape Theory, Lecture Notes in Math. 1283, pp. 65 ~ 87, Springer-Verlag, 1987.
- [3] T. Yagasaki, Fiber shape invariance of Leray spectral sequences of maps and approximate fibrations from spheres, preprint, May 1987.