

量子パイコね変換の半古典的性質 とエントロピー型カオス尺度について

東京理科大学理工学部情報科学科

井上 啓

e-mail: kinoue@is.noda.sut.ac.jp

古典系におけるカオスの研究は、歴史的には、負の曲率を持った多様体上における測地の指数関数的な不安定性を研究したロバチュースキーやハダマード、太陽系の安定性に関するポアンカレの研究に始まったといえる。古典力学系におけるカオス的な振る舞いの主な特徴がよく知られている一方で[AA,Sin2], 「量子カオス」の研究は、重要な発展があるものの、ほとんど明確になっていない。

その理由は、初期条件に関する鋭敏性の古典的な記述を量子系に一般化しようとする量子カオスの試みが、以下の2つの理由のためにうまくいかないからである：

(1) 古典系における相空間上の軌道の量子版が存在しない (2) 線形なシュレディンガー方程式のユニタリー性が量子系の状態ベクトルの初期条件に関する鋭敏性を排除する。しかしながら、量子系における位置作用素や運動量作用素のある状態での期待値の時間発展を考えれば、古典相空間上の軌道に対応した量子版を考察することができる。古典系の力学は、ハミルトニアン方程式か線形なリュービル方程式で記述される。古典リュービル方程式に対応する量子系の方程式は線形なシュレディンガー方程式であり、古典ハミルトニアン方程式に対応する量子系の方程式はハイゼンベルグ方程式である。

もし、古典ハミルトン方程式が

$$\frac{dq}{dt} = p, \frac{dp}{dt} = -V'(q),$$

であるならば、対応する量子系のハイゼンベルグ方程式は、同じ形

$$\frac{dq_h}{dt} = p_h, \frac{dp_h}{dt} = -V'(q_h)$$

で与えられる。ここで、 q_h, p_h は量子系の正準位置作用素と運動量作用素である。期待値に対して、アーレンフェスト方程式

$$\frac{d\langle q_h \rangle}{dt} = \langle p_h \rangle, \frac{d\langle p_h \rangle}{dt} = -\langle V'(q_h) \rangle$$

を得る.

アーレンフェスト方程式は古典系の方程式である. しかし, 非線形な $V'(q_h)$ に対して, アーレンフェスト方程式はハミルトニアン方程式でもなければ, 微分方程式ですらさえない. なぜなら, $\langle V'(q_h) \rangle$ を $\langle q_h \rangle$ と $\langle p_h \rangle$ の関数として書くことができないからである. しかしながら, これらの方程式は量子系における半古典的な性質を考えるには都合がよい.

「量子カオス」の研究の目的の一つは, 古典カオス力学系とその量子系版の古典極限における対応関係を調べることにある[Gut1,CC]. 力学系に対する量子古典対応は, 長年に渡って研究されてきた[AMRV,Hep,Zur]. プランク定数 $\hbar$ を値の小さな変数として考えたとき, この対応関係の理解において重大な進展がWKB近似という名の下で達成されている. 量子論は $\hbar \rightarrow 0$ という極限において, 古典論に導かれることがよく知られている. しかしながら, 物理学においてプランク定数 $\hbar$ はとても小さい値だが, 固定された定数である. 特徴的な時間スケール τ がカオス力学系の量子時間発展において現れるとの予測がある. 時刻 τ までの時間では量子と古典的な期待値との間に対応関係があるが, 時刻が τ を超えてしまうと, その対応関係が消滅するというものである. 重要な問題は, プランク定数 $\hbar$ と時刻 τ の独立性を評価することにある. おそらく, $\hbar$ の言葉で τ を表現している普遍的な形式は存在しない. 全てのモデルは場合場合によって研究されている. ところが, 近年, いくつかの力学的なモデルのシミュレーションによって, 量子古典の対応関係が消滅する特徴的な時間 τ は対数的形式 $\tau = \frac{1}{\lambda} \log \frac{C}{\hbar}$ で表されることが発見された. ただし, ここで λ はリアプノフ指数であり, C は古典的な力学のもとで取られた定数である.

量子パイコね変換は量子カオスの理論的な研究のために創案された単純なモデルである[BV,Sara]. その数学的な性質は, 数値シミュレーションにおいて研究されてきた. 文献[OS,,KH,LO,SC1,SC2,SC3,OT]でその半古典的な性質が議論され, 文献[HKO,BSR]において量子計算や工学的にどのように実現するかといった問題に関する提案, 文献[LB,LO,SV]ではパイコね変換のさまざまな量子化に関する提案, 文献[SC3]では, 量子パイコね変換の記号力学の表現が与えられている.

本講演では, 量子パイコね変換を通して量子カオスを扱う方法を与えるとともに, 通常の(古典的)パイコね変換と量子パイコね変換の力学の対応関係をエントロピー型カオス尺度を用いて調べ, ある特定の時刻までは2つの力学のカオスの推移は同様のものであること, さらに, 古典極限 ($\hbar \rightarrow 0$) では2つの力学が一致することを示した[IOV1,IOV2].

参考文献

- [AA] D.V. Anosov and V.I. Arnold (eds.), Dynamical Systems, VINITI, Moscow, 1996.
 [AMRV] I.Y. Arefeva, P.B. Medvedev, O.A. Rytchikov and I.V. Volovich, Chaos in m(atr)ix

- theory, *Chaos, Solitons and Fractals*, 10, No.2-3 (1999) 213-223.
- [BSR] T.Brun and R.Schack, Realizing the quantum baker's map on a NMR quantum computer, *Phys. Rev. A*, 59 (1999) 2649-2658.
- [BV] N.L.Balazs and A.Voros, The quantized baker's transformation, *Annals of Physics*, 190 (1989) 1-31.
- [CC] G.Casati and B.V.Chirikov (eds.), *Quantum Chaos: between Order and Disorder*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [Gut1] M.C.Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, 1990.
- [Hep] K.Hepp, The classical limit for quantum mechanical correlation function, *Commun. Math. Phys.*, 35 (1974) 265-277.
- [HKO] J.H.Hannay, J.P.Keating and A.M.Ozorio de Almeida, Optical realization of the quantum baker's transformation, *Nonlinearity*, 7 (1994) 1327-1342.
- [IOV1] K.Inoue, M.Ohya and I.V.Volovich, On quantum-classical correspondence for baker's map, quant-ph/0108107.
- [IOV2] K.Inoue, M.Ohya and I.V.Volovich, Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker's map, to appear in *JMP*.
- [KH] L.Kaplan and E.J.Heller, Overcoming the wall in the semiclassical baker's map, *Phys. Rev. Lett.*, 76 (1996) 1453-1456.
- [LO] M.G.E. da Luz and A.M.Ozorio de Almeida, Path integral for the quantum baker's map, *Nonlinearity*, 8 (1995) 43-64.
- [OS] A.M.Ozorio de Almeida and M.Saraceno, Periodic orbit theory for the quantized baker's map, *Ann. Phys.*, 210 (1991) 1-15.
- [OT] P.W.O'Connor and S.Tomsovic, The usual nature of the quantum baker's transformation, *Ann. Phys.*, 207 (1991) 218-264.
- [Sara] M.Saraceno, Classical structures on the quantized baker transformation, *Ann. Phys.*, 199 (1990) 37-60.
- [SC1] R.Schack and C.M.Caves, Hypersensitivity to perturbations in the quantum baker's map, *Phys. Rev. Lett.*, 71 (1993) 525-528.
- [SC2] R.Schack and C.M.Caves, Information-theoretic characterization of quantum chaos, *Phys. Rev. E*, 53 (1996) 3257-3270.
- [SC3] R.Schack and C.M.Caves, Shifts on a finite qubit string: A class of quantum baker's maps, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, AAEEC 10 (2000) 305-310.
- [Sin2] Ya.G.Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Fasis, Moscow, 1996.
- [Zur] W.H.Zurek, Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?, *Phys. Rev. D*, 24 (1981) 1516-1527.