

Stationary Navier-Stokes equations under the boundary condition with non-vanishing outflow

明治大学理工学部 森本浩子 (MORIMOTO, Hiroko)

1 はじめに

D は $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ の有界領域で境界 ∂D は滑らかとする. D を占める非圧縮粘性流体の運動を記述する定常 Navier-Stokes 方程式の非斉次境界値問題を考察する.

$$(1) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } D \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } D \end{cases}$$

$$(2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \text{on } \partial D$$

ここで $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ (流速ベクトル) と p (圧力) は未知, ρ (密度), ν (動粘性係数) は与えられた正定数, $\mathbf{f}$ (外力) $\mathbf{b}$ (境界での速度) は与えられたベクトルである.

60 年ほど昔, Leray [5] は次の条件の下でこの定常問題の弱解の存在を証明した.

$$(H) \quad \int_{\Gamma_i} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

ただし $\partial D = \cup_{i=1}^k \Gamma_i$, Γ_i は ∂D の連結成分で $\mathbf{n}$ は境界 ∂D の外向き単位法線ベクトルである.

この仮定の下では $\overline{D}$ で定義された滑らかな関数 c で ∂D 上 $\operatorname{rot} c = \mathbf{b}$ となるものが存在する. したがって c を境界の近傍で修正して, 非線形項を“小さく”評価することができる. すなわち任意の正数 ε に対し $\mathbf{b}$ の D への拡張 $\mathbf{b}_\varepsilon$ で $\operatorname{div} \mathbf{b}_\varepsilon = 0$ をみたし

$$(L) \quad |((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b}_\varepsilon, \mathbf{u})| \leq \varepsilon \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(D)$$

が成り立つようなものが作れる (c.f. [3], [4], [8]). ただし $(\cdot, \cdot)$ は L^2 -内積, $\|\cdot\|$ は L^2 -ノルムである.

条件 (H) はソレノイダルなベクトル場の境界値 $\mathbf{b}$ がみたす条件

$$(H)_0 \quad \int_{\partial D} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

よりも強い. そこで次の問題を考える.

問題 (P) 条件 (H) はみたさないが条件 $(H)_0$ はみたす境界値に対して境界値問題 (1)(2) は解をもつか.

一般の領域に対してこの問題は未解決である. 2次元の場合, 領域, 外力, 境界値が一直線に関して対称ならば解が存在することを Amick [1] が示した.

一方 竹下 [7] により次の結果が得られている.

定理 領域 $D = \{x \in \mathbf{R}^n | R_1 < |x| < R_2\}$ の境界を $\Gamma_i = \{x \in \mathbf{R}^n | |x| = R_i\}, i = 1, 2$ とする. $\mathbf{b}$ は $\int_{\Gamma_1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = a$, $\int_{\Gamma_2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds = -a$ をみたし任意の正数 ε にたいして条件 (L) をみたす拡張が作れるならば $a = 0$ である.

したがって (P) を肯定的に解決するには, Leray が用いた拡張による方法は使えないように思われる.

この小論では 2 次元の円環領域で $a \neq 0$ となるある場合に (P) の解を構成し、その解の一意性と安定性を議論する。

2 存在と一意性

関数空間を次のように定める。

$$\mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(D) = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(D)^n \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\},$$

$$H_\sigma = \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(D) \text{ の } L^2(D)^n \text{ における閉包,}$$

$$V = \mathbf{C}_{0,\sigma}^\infty(D) \text{ の } H^1(D)^n \text{ における閉包.}$$

定義 1 関数 $\mathbf{u}$ が境界値問題 (1) の弱解であるとは $\mathbf{u} \in H_\sigma \cap H^1(D)^n$ であって

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in V$$

が成り立つことをいう。

以下では D は 2 次元の円環領域でその境界を $\Gamma_i (i = 1, 2)$ で表す。

$$D = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid R_1 < |x| < R_2\},$$

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| = R_i\}, \quad i = 1, 2.$$

境界値問題 (1) を外力 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ および境界値

$$(3) \quad \mathbf{b} = \frac{\mu}{R_i} \mathbf{e}_r + b_i \mathbf{e}_\theta \quad \text{on } \Gamma_i, \quad i = 1, 2$$

にたいして考察する。ここで μ, b_1, b_2 は正定数で $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ は極座標 $\{r, \theta\}$ に関する基本ベクトルである。

注意 1 この境界値 $\mathbf{b}$ は $\mu \neq 0$ ならば (条件 $(H)_0$ をみたすが) 条件 (H) はみたさない.

定理 1 ([6]) $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ とする. 任意の定数 μ, b_1, b_2 に対して境界値問題 (1) の弱解で, 境界条件 (3) をみたすものが少なくとも一つ存在する. もし $|\mu|, |b_1|, |b_2|$ が十分小さければ弱解は一意的である.

証明のスケッチ

u_r, u_θ, p は r のみに依存すると仮定して, 次の形の解を探す.

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta$$

このとき方程式 (1) (3) より u_r, u_θ, p にたいする常微分方程式の境界値問題

$$(4) \quad \begin{cases} -\nu(u_r'' + \frac{1}{r}u_r' - \frac{1}{r^2}u_r) + \frac{1}{\rho}p' + u_r u_r' - \frac{1}{r}u_\theta^2 = 0 \\ -\nu(u_\theta'' + \frac{1}{r}u_\theta' - \frac{1}{r^2}u_\theta) + u_r u_\theta' + \frac{1}{r}u_r u_\theta = 0 \\ \frac{1}{r}(ru_r)' = 0 \\ u_r(R_1) = \mu/R_1, u_r(R_2) = \mu/R_2, u_\theta(R_1) = b_1, u_\theta(R_2) = b_2 \end{cases}$$

が導かれる ([2]). これをとりて次の厳密解が得られる.

$$\mu \neq -2\nu \text{ のとき } \mathbf{u} = \frac{\mu}{r} \mathbf{e}_r + \left(\frac{c_1}{r} + c_2 r^{1+\frac{\mu}{\nu}} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$\text{ただし } c_1 = \frac{b_1 R_1 R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}} - b_2 R_2 R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}{R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}} - R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}, \quad c_2 = \frac{b_2 R_2 - b_1 R_1}{R_2^{2+\frac{\mu}{\nu}} - R_1^{2+\frac{\mu}{\nu}}}$$

$$\mu = -2\nu \text{ のとき } \mathbf{u} = \frac{\mu}{r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r}(c_1 + c_2 \log r) \mathbf{e}_\theta$$

$$\text{ただし } c_1 = \frac{b_1 R_1 \log R_2 - b_2 R_2 \log R_1}{\log R_2 - \log R_1}, \quad c_2 = \frac{b_2 R_2 - b_1 R_1}{\log R_2 - \log R_1}$$

上で得られた解を $\mathbf{u}_0$, 任意の解を $\mathbf{u}$ とし $\mathbf{w} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}$ とおく.
 $\mathbf{w}$ は, 次の方程式をみたす.

$$(5) \quad \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) - \{((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}_0) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})\} = 0 \text{ for } \forall \mathbf{v} \in V.$$

ここで $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ととれば

$$\nu \|\nabla \mathbf{w}\|^2 = -((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{w})$$

が成り立つ. 右辺を J とおく.

$$J = - \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left\{ w_r^2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + w_r w_\theta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + w_\theta^2 \frac{u_r}{r} \right\} r dr d\theta.$$

$\mu \neq -2\nu$ のとき $u_r = \frac{\mu}{r}$, $u_\theta = \frac{c_1}{r} + c_2 r^{1+\frac{\mu}{\nu}}$ を代入して

$$J = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\mu}{r^2} (w_r^2 - w_\theta^2) + \left(\frac{2c_1}{r^2} - \frac{\mu}{\nu} c_2 r^{\frac{\mu}{\nu}} \right) w_r w_\theta \right\} r dr d\theta.$$

これより簡単な計算で

$$(6) \quad |J| \leq c_0 \|\nabla \mathbf{w}\|^2$$

$$\left(c_0 = \frac{|\mu| + |c_1|}{2} \left(\log \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{|\mu c_2|}{2\nu} \int_{R_1}^{R_2} r^{1+\frac{\mu}{\nu}} \log r dr \right)$$

を得る. したがって $|\mu|, |c_1|, |c_2|$ が十分小さければ, すなわち $|\mu|, |b_1|, |b_2|$ が十分小さければ, 解が一意であることが示せる.
 $\mu = -2\nu$ のときも同様である. 証明終.

注意 2 $\mu = 0$ ならばここで得られた $\mathbf{u}$ はよく知られた Couette 流である.

注意 3 これらの解は ν に依存する点で興味深い. 実際 φ を D で調和なスカラー値関数とすれば $\mathbf{u} = \nabla\varphi$, $p = -|\nabla\varphi|^2/2$ は $\Delta\mathbf{u} = 0$ であるから, 任意の ν にたいして

$$(7) \quad \begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{0} & \text{in } D \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{in } D \end{cases}$$

をみたす.

注意 4 境界値 $\mathbf{b}$ が θ にも依存する次のような場合に得られた結果を記しておく.

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbf{b} = \sum_n (\alpha_n^i \cos n\theta + \beta_n^i \sin n\theta) \mathbf{e}_r \\ \quad + \sum_n (\beta_n^i \cos n\theta - \alpha_n^i \sin n\theta) \mathbf{e}_\theta, \\ \text{on } |x| = R_i, i = 1, 2 \end{cases}$$

ただし $\alpha_n^i, \beta_n^i, \gamma_n^i, \delta_n^i$ は, 次の関係式をみたす定数とする.

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha_n^1 R_1^{1-n} = \alpha_n^2 R_2^{1-n}, \\ \beta_n^1 R_1^{1-n} = \beta_n^2 R_2^{1-n}, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

このとき境界値問題 (1) (8) は次の形の解をもつ.

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta \\ u_r = \sum_n \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1} (\alpha_n^1 \cos n\theta + \beta_n^1 \sin n\theta) \\ u_\theta = \sum_n \left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1} (\beta_n^1 \cos n\theta - \alpha_n^1 \sin n\theta). \end{cases}$$

これらは調和多項式であるから ν に依存しない. しかし $\alpha_0^1 \neq 0$ ならば境界値は $(H)_0$ はみたすが (H) はみたさない.

3 安定性

Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題を考える.

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p, & x \in D, \quad t > 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & x \in D, \quad t > 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{b}, & x \in \partial D, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}, & x \in D, \quad t = 0. \end{cases}$$

初期値は $\mathbf{a} \in H_\sigma$ とする. 境界条件は (3) のものとし定理 1 で得られた定常解を $\mathbf{u}_0, p_0$ とする. $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$, $p = p_0 + q$ として $\mathbf{w}, q$ についての方程式に書き直す.

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{w} - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w} \\ \quad \quad \quad - (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 - \frac{1}{\rho} \nabla q, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{w}|_{\partial D} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{a} - \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

定義 2 $\mathbf{w} \in L^2(0, T; V)$ は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) \\ \quad = ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) - ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}), \\ \quad \quad \quad \text{for } \forall \mathbf{v} \in V \\ \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{a} - \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

をみたすとき (12) の弱解であるという. また $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}$ を (11) の弱解とよぶ.

$\nu > c_0$ ならば $\forall T > 0$ に対して (11) の弱解は一意であること, またガレルキン近似によって弱解が存在することを示せる (たとえば [8]).

このとき次が成り立つ.

定理 2 $\nu > c_0$ ならば $\mathbf{u}_0$ は漸近安定である. すなわち正数 α_0 が存在して (11) の弱解 $\mathbf{u}$ に対し

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0\| \leq e^{-\alpha_0 t} \|\mathbf{a} - \mathbf{u}_0\|.$$

証明 定義 2 の第 1 式で $\mathbf{v} = \mathbf{w} \equiv \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ とすれば

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + \nu \|\nabla \mathbf{w}\|^2 = -((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{w}) \leq c_0 \|\nabla \mathbf{w}\|^2$$

ここで (6) を用いた. Poincaré の不等式より $c_D > 0$ が存在して

$$c_D \|\mathbf{w}\| \leq \|\nabla \mathbf{w}\|, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{V}$$

従って $\alpha_0 = c_D^2(\nu - c_0)$ とおけば仮定より $\alpha_0 > 0$ で

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|^2 + \alpha_0 \|\nabla \mathbf{w}\|^2 \leq 0$$

両辺を積分して結論を得る.

証明終.

参考文献

- [1] Amick, C. J., Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier-Stokes equations, Indiana Univ. Math. J. **33**(1984), pp.817-830.
- [2] Berker, R., Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Handbuch der Physik Bd VIII/2 pp.1-384, Springer, Berlin, 1963.

- [3] Fujita, H., On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J.Fac.Sci., Univ.Tokyo, Sec.I, **9**(1961), pp59-102.
- [4] Ladyzhenskaya, O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [5] Leray, J., Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pure Appl. **12**(1933) pp.1-82.
- [6] Morimoto, H., A solution to the stationary Navier-Stokes equations under the boundary condition with non-vanishing outflow, Memoirs of the Institute of Science and Technology, Meiji Univ., Vol.31(1992), pp.7-12.
- [7] Takesita, A., A remark on Leray's inequality, Pacific J.Math., **157**(1993), pp.151-158.
- [8] Temam, R., Navier-Stokes Equations, North-Holland, Amsterdam, 1977.