

点ソースモデルに関する対数ポテンシャル逆問題に対する 窓 Fourier 変換の応用

岡山理科大学総合情報学部
大阪大学工学部

大江貴司 (Takashi OHE)
大中幸三郎 (Kohzaburo OHNAKA)

1 はじめに

偏微分方程式の逆問題の現実問題への適用を考える場合、対象領域の部分境界でしかデータが得られないことがある [1]。本稿ではこのような状況の下で、点ソースモデルに関する対数ポテンシャル逆問題 [2] について考える。とくに点ソースモデルのパラメータ推定逆問題に対し窓 Fourier 変換を適用した解法を示し、その数値的性質について示す。

2 対数ポテンシャル逆問題

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を原点を中心とした半径 R の円領域とし、 $\Gamma = \partial\Omega$ とする。また Γ_{obs} を零でない長さを持つ Γ の部分集合とする。領域 Ω 内で定義されたソース項 f によって生成される対数ポテンシャル $u_L(f)$ を

$$u_L(f)(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} f(x', y') \log \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} dx' dy', \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

で定義する。ただし、ソース項は個数 N および強度 $q \neq 0$ が既知の点ソースモデル

$$f(x, y) = q \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j, y - y_j), \quad (x_j, y_j) \in \Omega \quad (2)$$

で表されるものとする [2]。このときに次の問題を考える。

[問題]

関数 g を Γ 上の解析関数とする。式 (2) で表されるソース項 f に対する対数ポテンシャル $u_L(f)$ について $u_L(f)(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in \Gamma_{obs}$ が成立するするとき、点ソースモデル f の未知パラメータ (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ を決定せよ。

この問題の解は存在すれば一意である。これは $u_L(f)|_{\Gamma}$ が Γ 上で解析的であり、 $u_L(f)|_{\Gamma_{obs}}$ を解析接続することにより $u_L(f)|_{\Gamma}$ が一意的に得られること、および点ソースモデルのパラメータ (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ が $u_L(f)|_{\Gamma}$ の Fourier 係数列

$$\gamma_k \equiv \int_0^{2\pi} u_L(f)(R \cos \theta, R \sin \theta) \exp(ik\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

に対して一意であることを用いて証明できる [3]。ここで $u_L(f)|_{\Gamma}$ は $u_L(f)$ の Γ への制限を表す。なお、点ソースモデルのパラメータ (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ と Fourier 係数列 $\{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}\}$ の間

には次の関係式が成立する。

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \left(\frac{x_j + iy_j}{R} \right)^k, & k \geq 1 \\ -Nq \log R, & k = 0 \\ \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \left(\frac{x_j - iy_j}{R} \right)^k, & k \leq -1 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)は点ソースモデルのパラメータ (x_j, y_j) , $j = 1, 2, \dots, N$ を決定するためには、Fourier 係数 $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, N$ を求めればよいことを示している [4,5]。

実際に解を求める際には、 $u_L(f)|_\Gamma$ の Fourier 係数列 $\{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}\}$ を $u_L(f)|_{\Gamma_{obs}}$ から求める必要がある。本稿ではこの方法として窓 Fourier 変換を用いた方法を示す。

3 窓 Fourier 変換

窓 Fourier 変換とは、 $h \in L^2(\Gamma)$ に対する Γ_{obs} を台として持つような関数 $w \in L^\infty(\Gamma)$ を重み関数とした Fourier 変換

$$\xi_k(h) = \int_0^{2\pi} h(R \cos \theta, R \sin \theta) w(R \cos \theta, R \sin \theta) \exp(ik\theta) d\theta, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

である [6]。関数 $h \in L^2(\Gamma)$ の窓 Fourier 変換 $\xi(h) \equiv \{\xi_k(h), k \in \mathbb{Z}\}$ は $\xi(h) \in l^2$ であり、 h の Fourier 係数列 $\gamma(h) \equiv \{\gamma_k(h), k \in \mathbb{Z}\}$ との間に $\xi(h) = W\gamma(h)$ となるような有界線形作用素 W が存在する。

作用素 W は定義域 l^2 上で退化作用素であり、その逆作用素は一意ではない。しかし、定義域を Γ 上の解析関数の Fourier 係数列の集合に制限した場合には、逆作用素は一意となることが証明できる。本稿で考える問題では $u_L(f)|_\Gamma$ が解析的であることから、その窓 Fourier 変換に対し Fourier 係数列は一意となる [3]。したがって解析関数の Fourier 係数列を値域とする W の逆作用素を構成すればよい。

4 逆問題の解法

前節で示した作用素 W の逆作用素の構成を考える。窓 Fourier 変換 ξ および作用素 W を用いると、Fourier 係数列 γ を

$$\gamma = \lambda W\gamma + (I - \lambda W)\gamma = \lambda\xi + (I - \lambda W)\gamma \quad (6)$$

の形に分解することができる。ここで λ は定数である。式(6)を用いて

$$\gamma^{(0)} = \xi \quad (7)$$

$$\gamma^{(n)} = \lambda\xi + \gamma^{(n-1)} - \lambda W\gamma^{(n-1)}, \quad n \geq 1 \quad (8)$$

で生成される γ の近似列 $\{\gamma^{(n)}\}$ を考える。このとき $\gamma^{(n)}$ の存在範囲は解析関数の Fourier 係数列の範囲に限定されないため、 $\gamma^{(n)}$ が収束した場合においてもその極限が γ であることは保証されない。そこで $\gamma^{(n)}$ の存在範囲を限定するため、次式により近似列を構成することを考える。

$$\gamma^{(n)} = \lambda\xi + \gamma^{(n-1)} - \lambda Wg(\gamma^{(n-1)}), \quad n \geq 1 \quad (9)$$

ここで $g(\cdot)$ は、次式で構成される非線形作用素である。

$$g(\gamma) = \{g_k(\gamma), k \in \mathbb{Z}\} \in l^2 \quad (10)$$

$$g_k(\gamma) = \begin{cases} \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j(\gamma)^k, & k \geq 1 \\ -Nq \log R, & k = 0 \\ \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N \overline{z_j(\gamma)}^k, & k \leq -1 \end{cases} \quad (11)$$

ただし $z_j(\gamma)$, $j = 1, 2, \dots, N$ は

$$\gamma_k = \frac{q}{2k} \sum_{j=1}^N z_j(\gamma)^k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

の解を表す。作用素 $g(\cdot)$ は $\gamma \in l^2$ から点ソースモデルの Fourier 係数列の性質を満たすような数列を生成する l^2 から l^2 への非線形作用素である。式 (9) により生成される近似列について、収束した場合にその極限が γ であることが証明できる。

5 収束比の評価

式 (9) に含まれるパラメータ λ の近似解の収束に対する影響について考える。点ソースモデルの Fourier 係数列の真の値 γ について

$$\gamma = \lambda \xi + \gamma - \lambda W g(\gamma) \quad (13)$$

が成立することから、式 (9) から式 (13) を引くことにより

$$\delta\gamma^{(n)} = \delta\gamma^{(n-1)} - \lambda W \left(g(\gamma^{(n-1)}) - g(\gamma) \right) \quad (14)$$

を得る。ここで $\delta\gamma^{(n)} = \gamma^{(n)} - \gamma$ である。右辺第 2 項を $\delta\gamma^{(n-1)}$ により Taylor 展開し、高次項を無視すると $\delta\gamma^{(n)}$ は

$$\delta\gamma^{(n)} \simeq \left(I - \lambda W \frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)}) \right) \delta\gamma^{(n-1)} \quad (15)$$

で近似できる。よって

$$\left\| \frac{\delta\gamma^{(n)}}{\delta\gamma^{(n-1)}} \right\| \simeq \left\| I - \lambda W \frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)}) \right\| \quad (16)$$

を評価することにより、近似解の収束比、およびそのパラメータ λ に対する依存性が評価できる。

6 数値実験

第 4 節で示した解法に関する数値実験結果を示す。領域 Ω の半径を 1 とし、点ソースを図 1 に示す位置に配置した。なお各点ソースの強度は $q = 0.3$ とした。対数ポテンシャルの観測部分区間 Γ_{obs} は

$$\Gamma_{obs} = \bigcup_{m=1}^M \left\{ \theta \mid \frac{2(m-1)\pi}{M} - \frac{T}{2M} \leq \theta \leq \frac{2(m-1)\pi}{M} + \frac{T}{2M} \right\} \quad (17)$$

で定義した。ここで M は観測部分区間の個数で 1, 2, 3 の値をとり、 T は観測部分区間全体の幅で 180 度から 360 度まで 30 度きざみで変化させた。また、対数ポテンシャルの誤差を含む観測値 $\widetilde{u}_L(f)(x, y)$ を次式により生成した。

$$\widetilde{u}_L(f)(x, y) = u_L(f)(x, y) + n(0, l \cdot p) \quad (18)$$

$$p = \sqrt{\int_{\Gamma_{obs}} u_L(f)(x, y)^2 d\Gamma(x, y) / \int_{\Gamma_{obs}} d\Gamma(x, y)} \quad (19)$$

ここで、 $n(m, \sigma)$ は平均 m 、標準偏差 σ の正規乱数を表す。また l はノイズレベルを表し、0, 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} とした。

窓関数 w としては、次式で定義される Γ_{obs} の定義関数 $\chi_{\Gamma_{obs}}$ を用いた。

$$w(\theta) = \chi_{\Gamma_{obs}}(\theta) \equiv \begin{cases} 1, & \theta \in \Gamma_{obs} \\ 0, & \theta \in \Gamma \setminus \Gamma_{obs} \end{cases} \quad (20)$$

なお窓 Fourier 変換の計算には中点則による数値積分を用い、観測部分区間の個数 M が 1, 2, 3 の場合に対し、それぞれ 21, 22, 21 個の点を用いた。また式 (9) におけるパラメータ λ は 1 とした。近似列 $\{\gamma^{(n)}\}$ の収束判定条件は、式 (12) の解 $z_j(\gamma)$, $j = 1, 2, \dots, N$ を用いて

$$\left| z_j(\gamma^{(n)}) - z_j(\gamma^{(n-1)}) \right| < 10^{-6}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

とし、最大反復回数を 500 とした。

ノイズレベル $l = 0$ の場合について、収束に要した反復回数および点ソースの推定位置の最大誤差の値を表 1 に示す。表 1 より、同じ部分区間の個数では部分区間の幅が増加するほど、また同じ観測部分区間幅では観測部分区間の個数が増加するほど、収束に要する反復回数が減少することがわかる。また収束した場合について、推定位置の誤差はほぼ同程度であることが確認できる。

ノイズレベルを変化させた場合について、点ソースの推定位置の最大誤差の値を表 2 に示す。表 2 より、 10^{-4} , 10^{-3} および 10^{-2} 程度の観測誤差レベルに対して、推定位置の最大誤差はそれぞれ 10^{-5} , 10^{-4} および 10^{-3} 程度であり、ノイズレベルに対し 1/10 程度であることが確認できる。また、推定位置の誤差は観測部分区間の大きさ、および個数にはほとんど影響されないことがわかる。

最後に第 5 節で示した近似解の収束比、およびそのパラメータ λ に対する依存性に関する数値結果を示す。領域 Ω および点ソースの配置は先に示したものと同一ものを取り、観測区間の大きさ T を 300 度に固定した。観測部分区間の個数は 1 とし、パラメータ λ を 0.1 から 1.9 の範囲で 0.1 きざみで変化させた。また $\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma^{(n-1)})$ の評価に用いる $\gamma^{(n-1)}$ としては、最終的に収束した推定値を用いた。図 2 に近似解の収束比の真値と式 (16) による評価値のパラメータ λ に対する依存性を示す。図 2 より、近似解の収束比を最適にする λ の値が存在することが確認できる。また式 (16) により近似解の収束比がほぼ正確に評価でき、さらにそれを最適にする λ の値も正しく評価できることがわかる。

7 まとめ

点ソースモデルに対する対数ポテンシャル逆問題において、境界の一部分におけるデータのみが得られる場合に対する数値解法として窓 Fourier 変換を用いた数値解法を示した。また本稿で示した数値解法に対する実験をおこない、複数の点ソースの位置が正確に推定できることが確認

できた。また観測誤差がある場合についても、推定位置の誤差は観測誤差レベルの $1/10$ 程度であることがわかった。さらに近似解の収束比に関する評価をおこない、実際の近似解の収束比がほぼ正確に評価できることが確認できた。

参考文献

- [1] 久保, 逆問題, 培風館, 1992.
- [2] Stromeier, D., and Ballani, L., Manuscripta Geodaetica, **9**(1984), 125-136.
- [3] 大江, 大中, 日本応用数理学会論文誌, **7**(1997), 295-306.
- [4] 山谷, 大中, 日本応用数理学会論文誌, **7**(1997), 65-78.
- [5] Ohe, T., and Ohnaka, K., Appl. Math. Modelling, **19**(1995), 429-436.
- [6] Chui, C.K., An Introduction to Wavelets, Academic Press, Orlando, 1992.

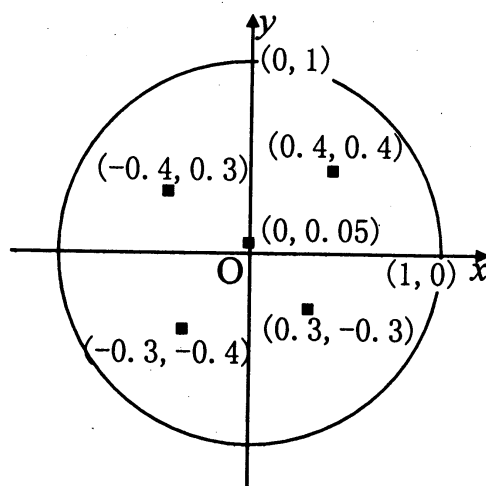


図 1. 点ソースの配置

表 1. 部分区間の幅 T と収束に要した反復回数および推定位置の誤差

T	部分区間の個数 $M = 1$		部分区間の個数 $M = 2$		部分区間の個数 $M = 3$	
	反復回数	推定位置 の誤差	反復回数	推定位置 の誤差	反復回数	推定位置 の誤差
180	N.C.	6.3E-2	N.C.	4.2E-2	N.C.	8.3E-3
210	N.C.	2.4E-2	N.C.	1.6E-2	396	1.8E-5
240	N.C.	8.6E-3	N.C.	7.1E-5	154	6.2E-6
270	206	9.8E-6	145	8.0E-6	66	2.3E-6
300	54	2.0E-6	45	1.7E-6	31	6.5E-7
330	31	8.5E-7	16	2.7E-7	15	1.2E-7
360	3	2.0E-7	3	1.7E-8	3	8.0E-11

注意: N.C. は収束しなかったことを表す。

表 2. ノイズレベルと推定位置の誤差

(a) 部分区間の個数 $M = 1$				(b) 部分区間の個数 $M = 2$			
T	ノイズレベル			T	ノイズレベル		
	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}		10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
180*	6.3E-02	6.4E-02	7.5E-02	180*	4.2E-02	4.2E-02	5.2E-02
210*	2.4E-02	2.5E-02	4.4E-02	210*	1.6E-02	1.6E-02	1.9E-02
240*	8.6E-03	9.2E-03	1.5E-02	240*	2.7E-05	4.2E-04	4.7E-03
270	1.2E-04	1.1E-03	1.1E-02	270	7.3E-05	8.0E-04	7.9E-03
300	4.7E-05	4.6E-04	4.6E-03	300	9.0E-05	9.1E-04	9.1E-03
330	1.5E-04	1.5E-03	1.5E-02	330	6.9E-05	6.9E-04	7.0E-03
360	1.7E-05	1.7E-04	1.7E-03	360	6.0E-05	6.0E-04	6.1E-03

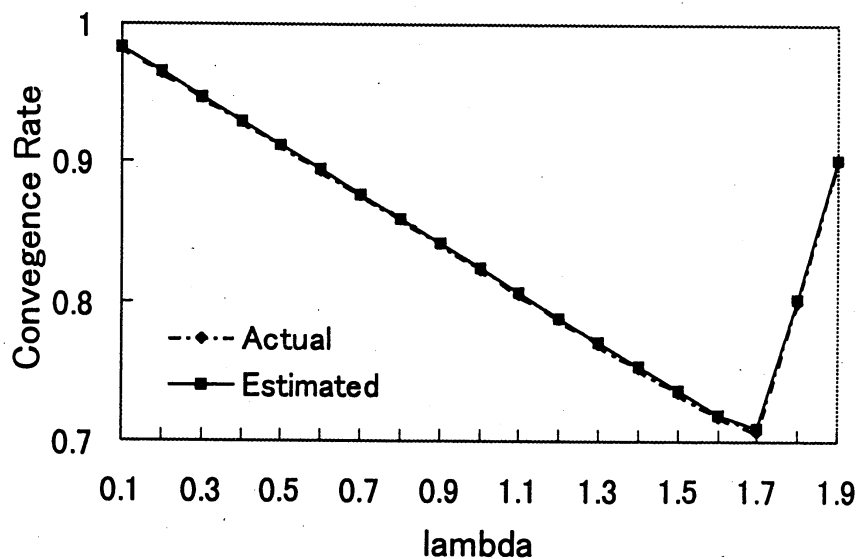
注意: *のついた角度では収束せず。

注意: *のついた角度では収束せず。

(c) 部分区間の個数 $M = 3$

T	ノイズレベル		
	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
180*	8.3E-03	8.6E-03	1.2E-02
210	5.9E-05	6.8E-04	6.9E-03
240	9.5E-05	1.0E-03	1.0E-02
270	4.5E-05	4.6E-04	4.7E-03
300	2.5E-05	2.5E-04	2.5E-03
330	4.1E-05	4.1E-04	4.1E-03
360	4.5E-05	4.5E-04	4.4E-03

注意: *のついた角度では収束せず。

図 2. 近似解の収束比のパラメータ λ に対する依存性