

Some Examples of Local Rings

京大理 西村純一 (Jun-ichi Nishimura)

Introduction.

C. Rott haus, T. Ogoma (小駒哲司), R. C. Heitmann らによる singular formal fibre を持つ local ring の構成法は、種々の新しい例を与えるとともに、従来の M. Nagata (永田雅宜), D. Ferrand - M. Raynaud らによって得られていた比較的むづかしい local ring の例の一部をも、組織的・機械的に実現することを可能にした。しかし Nagata による、2-dim. normal local domain で、completion が non-trivial nilpotent elements を持つ例や、3-dim. local domain で、その derived normal ring が noetherian とはならない例などの構成には、そのままでは適用できない。

我々は Rott haus, Ogoma, Heitmann の手法を、もう少し一般化することにより、上述の Nagata の 2 例、および、3-dim. local factorial domain で、universally catenary でな

い例を作ることを試みた。

なお、詳細は J. NISHIMURA: Some Examples of Local Rings (preprint) を参照のこと。

Notation.

以下、ring はすべて commutative で、単位元 1 をもつとする。また、 $\mathbb{N}$ で自然数全体、 $\mathbb{N}_0$ で負でない整数全体の集合を表す。

K_0 を ^{高々}可算な体、例えば、 $\mathbb{Q}$ (有理数体)、 $\mathbb{F}_q$ (有限体)、 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 等とし、 K を K_0 上可算次純超越拡大体とする。すなわち、 $K = K_0(a_{ik}, b_{ik}, c_{jk})$ 、ここで、 a_{ik}, b_{ik}, c_{jk} は K_0 上超越基 ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r, k \in \mathbb{N}$)。

更に、変数 $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_r$ をとり、 $R_0 = K_0[u, v, w]_{(u, v, w)}$ 、 $R = K[u, v, w]_{(u, v, w)}$ 、 $\mathcal{W} = (u, v, w)R$ とおく。このとき、 $(R, \mathcal{W})$ は可算な regular local ring であり、height one prime ideals に番号付けできる。(我々の構成法においても、「番号付け」が一番 essential なのだが、一番めんどうでもあるので、詳細は略。)

§1. Preliminaries.

まず、 $F_1, \dots, F_n$ として、 $K_0[Z_1, \dots, Z_n]$ の元で、constant

termをもたないものをとる。また、変数 Q_{ik}, S_{im} ($1 \leq i \leq n$; $k, m \in \mathbb{N}_0$) に対し $X_{ik} = Q_{i0} + Q_{i1} + \dots + Q_{ik}$, $Y_{im} = S_{i0} + S_{i1} + \dots + S_{im}$, $Z_{ikm} = X_{ik} + Y_{im}$ とおき、この Z_{ikm} を F_j の Z_i に代入すると、

$$F_j(Z_{1km}, \dots, Z_{nkm}) = \sum_{k_{ED}} k_{ED} Q^E S^D \in K_0[Q_{ik}, S_{il}]$$

($0 \leq k \leq k, 0 \leq l \leq m$) が得られる。ここで、 $E = (e_{10}, e_{11}, \dots, e_{1k}, e_{20}, \dots, e_{nk}) \in \mathbb{N}_0^{n(k+1)}$, $D = (d_{10}, d_{11}, \dots, d_{1m}, d_{20}, \dots, d_{nm}) \in \mathbb{N}_0^{n(m+1)}$, $Q^E = Q_{10}^{e_{10}} \cdot Q_{11}^{e_{11}} \cdot \dots \cdot Q_{nk}^{e_{nk}}$, $S^D = S_{10}^{d_{10}} \cdot S_{11}^{d_{11}} \cdot \dots \cdot S_{nm}^{d_{nm}}$ を表す。

± τ $o(E) = \max.\{0, \{j \mid e_{ij} > 0 \text{ for } \exists i (\leq n)\}\}$,
 $o(D) = \max.\{0, \{l \mid d_{il} > 0 \text{ for } \exists i (\leq n)\}\}$ と定め、

$$F_j^+(Z_{km}) = \sum_{o(E) > o(D)} k_{ED} Q^E S^D, \quad F_j^-(Z_{km}) = \sum_{o(E) \leq o(D)} k_{ED} Q^E S^D$$

を定義する。

次に、 R_0 の元 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ と $u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_n$; $u_1, \dots, u_d, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n$; $u_1, \dots, u_d, z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ からそれぞれ R の regular system of parameters になるものをとる(ただし、 $z_i = x_i + y_i$)、

± τ $\pi_1 = u_1$ とおき、 $p_1 \in R_0$ ととり、更に、 $\pi_2, p_2, \pi_3, p_3, \dots$ と次のように inductive に R の商体の元を定める。まず $\pi_1, \dots, \pi_k, p_1, \dots, p_k$ まで定まったとして、

$$q_h = \prod_{i=1}^h p_i = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_h \quad (h \leq k), \quad \sigma_h = \prod_{i=1}^h \pi_i.$$

と書く。次に適当な自然数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ に対し

$$t_h = q_h^{\varepsilon_h} \sigma_h; \quad x_{ik} = x_i + a_{i1} q_1^{\varepsilon_1} + \dots + a_{ik} q_k^{\varepsilon_k};$$

$$\eta_{ik} = y_i + b_{i1} \sigma_1^{\varepsilon_1} + \dots + b_{ik} \sigma_k^{\varepsilon_k}; \quad \xi_{ikk} = x_{ik} + \eta_{ik};$$

$$w_{jk} = w_j + c_{j1} t_1^{\varepsilon_1} + \dots + c_{jk} t_k^{\varepsilon_k} \quad (1 \leq i \leq n; \quad 1 \leq j \leq r).$$

とおく。ここで、前述の $F_j^+(Z_{kk})$ の変数 Q_{il}, S_{il} に、

それぞれ $a_{il} q_l^{\varepsilon_l}, b_{il} \sigma_l^{\varepsilon_l}$ を代入したものを f_{jkk}^+ と書き、 $\alpha_{jkk}^+ = \frac{1}{q_k^{\nu_k}} (w_{jk} + f_{jkk}^+)$ と定義する。(ここで、 ν_k は適当な自然数) このとき、 π_{k+1} を $R[\alpha_{kk}^+]$ の元で、 $\pi_{k+1} = \pi_{k+1} + \sum \pi_{j(k+1)} q_k^{\lambda_k} \alpha_{jkk}^+$ ($\pi_{k+1}, \pi_{j(k+1)} \in R, \lambda_k$ はある自然数), また、 $p_{k+1} \in R$ をとり、以下、同じ操作をくり返す。.....

上の記号と同様に $f_{jkm}^+ = F_j^+(\zeta_{1km}, \dots, \zeta_{nkm}), \phi_{jkm}^- = F_j^-(\zeta_{1km}, \dots, \zeta_{nkm}), \alpha_{jkm}^+ = \frac{1}{q_k^{\nu_k}} (w_{jk} + f_{jkm}^+), \alpha_{jkm}^- = \frac{1}{\sigma_m^{\nu_m}} (-w_{jm} + \phi_{jkm}^-)$ と定める。

すると、多項式展開を利用することにより、 $\alpha_{jkk}^+, \alpha_{jkk}^-$ について、次の関係を得る。

$$\alpha_{jkk}^+ = \frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}} \alpha_{j(k+1)(k+1)}^+ + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}} k_{jkk}^+$$

$$\alpha_{jkk}^- = \frac{\sigma_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}} \alpha_{j(k+1)(k+1)}^- + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}} k_{jkk}^-$$

(ここで、 $k_{jkk}^+ \in R[\alpha_{(k+1)(k+1)}^+], k_{jkk}^- \in R[\alpha_{kk}^+]$.)

§2. Relations.

$W_0 = K_0[u, Z_1, \dots, Z_n]$, $T_1, \dots, T_n$ を変数とし. W_0 -hom. φ を次のように定める.

$$\varphi: W_0[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow W_0\left[\frac{1}{u}\right] \quad (T_j \mapsto \frac{F_j}{u})$$

このとき $\ker \varphi = (uT_1 - F_1, \dots, uT_n - F_n, G_1(Z, T), \dots, G_s(Z, T))$ と書ける。(ただし $F_j \in K_0[Z_1, \dots, Z_n]$ (cf. §1). $G_h(Z, T) \in K_0[Z][T]$ で, T について homogeneous.)

この $G_h(Z, T)$ の変数 Z_i, T_j に, それぞれ $\zeta_{ikm}, \alpha_{jkm}^+$ (または, α_{jkm}^-) を代入し, $\beta_{hkk}^+ = \frac{1}{\sigma_k^{\mu_k}} G_h(\zeta_{kk}, \alpha_{kk}^+)$, $\beta_{hkk}^- = \frac{1}{q_k^{\mu_k}} G_h(\zeta_{kk}, \alpha_{kk}^-)$, etc. を (適当な $\mu_k \in \mathbb{N}$ をとり) 定義する. 更に, §1 と同様, 多項展開を実行することにより, 次の関係式を得る。(ただし $g_h = \deg_T G_h$)

$$\begin{aligned} \beta_{hkk}^+ &= - \left(\frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\nu_k}} \right)^{g_h} \left\{ \frac{\sigma_{k+1}^{\mu_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \beta_{h(k+1)(k+1)}^+ + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \delta_{h(k+1)k}^+ \right\} \\ &\quad + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\nu_k g_h}} \left(\frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\mu_k}} \delta_{hkk}^+ + \frac{\sigma_k^{\nu_k}}{\sigma_k^{\mu_k}} \sum \alpha_{jik}^- \cdot \gamma_{hjk}^+ \right) \\ \beta_{hkk}^- &= - \frac{q_{k+1}^{\mu_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \left(\frac{\sigma_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k}} \right)^{g_h} \beta_{h(k+1)(k+1)}^- \\ &\quad + \frac{\sigma_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{\sigma_k^{\nu_k g_h}} \left(\frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \delta_{h(k+1)k}^- + \frac{q_{k+1}^{\nu_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \sum \alpha_{j(k+1)(k+1)}^+ \gamma_{hj}^- \right) \\ &\quad + \frac{q_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{q_k^{\mu_k}} \delta_{hkk}^- \end{aligned}$$

ここで, $\delta_{hkk}^- \in R[\alpha_{kk}^+][\alpha_{kk}^-]$ で, homogeneous in α_{kk}^- 's.

$\delta_{h(k+1)k}^+ \in R[\alpha_{kk}^+][\alpha_{(k+1)(k+1)}^+] \tau''$ homogeneous in $\alpha_{(k+1)(k+1)}^+$'s.
 $\delta_{h(k+1)k}^-, \delta_{hj(k+1)k}^-, \delta_{hkk}^+, \delta_{hjkk}^+ \in R[\alpha_{kk}^+]$.

§3 Construction.

$$B = \bigcup_k R[\alpha_{jkk}^+, \alpha_{jkk}^-, \beta_{hkk}^+, \beta_{hkk}^-] \quad (1 \leq j \leq r, 1 \leq h \leq s),$$

$$M = (u, v, w)B. \quad \text{とす。このとき}$$

Lemma. M は B の maximal ideal τ'' . $B/M \cong R/M (\cong K)$.

次に $A = B_M$, $m = MA$ とす。このとき (ただし

$$\pi_1, p_1, \pi_2, p_2, \dots, \pi_k, p_k, \dots; \quad \left(\begin{array}{l} \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < \dots \\ \wedge \\ \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k < \dots \\ \wedge \\ \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_k < \dots \end{array} \right)$$

を十分大きくとると。

Proposition. (A, m) は noetherian factorial (local) domain τ'' .

$$\hat{A} \cong K[u_1, \dots, u_d, z_1, \dots, z_n] / (F_1(z), \dots, F_r(z))$$