

On signature defects of cusps

東北大教養 尾形庄悦 (Shoetsu Ogata)

この講演では、以下の型の正規孤立特異点 (V, p) をカスプ (cusp) と呼ぶことにする。

I 土橋カスプ — Hilbert モジュラー カスプ を一般化したもので、特異点の近傍 $V - \{p\}$ が開凸錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ と算術的部分群 $G_{\mathbb{Z}} \subset \text{Hol}(\mathbb{R}^n + \sqrt{-1}C)$ を使ったチューブ領域の商 $G_{\mathbb{Z}} \backslash (\mathbb{R}^n + \sqrt{-1}C)$ と表わせるものである。詳しい定義は [T] を参照。

II 球積カスプ (これは筆者の造語で、未だ定着してはいない) — 特異点の近傍 $V - \{p\}$ が複素単位球の直積 $\times^r \mathbb{B}^n$ ($r \geq 2, n \geq 2$) の商であるもの。 $n=1$ にすると Hilbert モジュラーカスプである。特に、 $r=2$ の場合、特異点解消の例外因子は各既約成分が n と n の $2n-2$ 次元アーベル多様体上の $\mathbb{P}^1$ 束で 0 切断と ∞ 切断で他の成分と交わったサイクルである。定義は [O2] を参照。

次に、 n 次元カスプ (V, p) の不変量 $\sigma(p)$ と $\chi_{\infty}(p)$ とを定義する。 $(U, X) \rightarrow (V, p)$ を toroidal embeddings を使った特異点解

消で, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ が単純正規交叉を持つ因子であるものとする。各 X_i の定める基本類の双対を $\delta_i \in H^2(U, \partial U; \mathbb{Z})$ を表わす。佐武[S1]に従って, カスプ (V, p) の signature defect $\sigma(p)$ を以下のように定める。

$$\sigma(p) = \left[\prod_{i \in I} \delta_i \coth \delta_i \right]_n [U, \partial U] - \text{sign}(U, \partial U).$$

ここに第一項は、形式的巾級数の n 次の項に基本類 $(U, \partial U)$ を代入したもので、その値は有理数である。第二項は、 $H^n(U, \partial U)$ 上でカップ積で定義された二次形式の符号数である。

注意。 (V, p) が Hilbert モジュラー カスプ の時には、この定義は Hirzebruch の定義 [H] と一致する。

もうひとつの不変量 $\chi_\infty(p)$ も佐武[S1]に従って

$$\chi_\infty(p) = \left[\prod_{i \in I} \delta_i / (1 - e^{-\delta_i}) \right]_n [U, \partial U]$$

で定義する。この不変量の名前は未だ確定してはいない。意味は判っていて、 (V, p) が対称チューブ領域のカスプの時にカスプ形式の次元公式に対するカスプ (V, p) の寄与が $(-1)^n \chi_\infty(p)$ である。

定理 (V, p) を $n=2k$ 次元カスプとすると、等式

$$\sigma(p) = 2^n \chi_\infty(p)$$

が成立する。

この定理と、本研究集会中の石田氏の講演の主定理とを合わせると、Hirzebruchの予想[H]の代数幾何的証明を与えている。更に、土橋カスフへの予想の一般化の解答も与える。このことについては[50]を参照。

1. 符号数公式

定理の証明に使う重要な公式を示す。 (V, p) を一般の n 次元正規孤立特異点とする。 $(U, X) \rightarrow (V, p)$ を射影的特異点解消で、 $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ が単純正規交叉をもつ因子であるものとする。 $\Delta = \{J \subset I \mid X_J := \bigcap_{i \in J} X_i \neq \emptyset\}$, $\Delta(j) = \{J \in \Delta \mid |J| = j\}$ とおく。

$J \in \Delta(j)$ に対し、 $H^{n-2j}(X_J; \mathbb{R})$ 上の二次形式 Q_J を

$$Q_J(u, v) = (u \cup v \cup c_1(L)^j)[X_J]$$

で定める。ここに L は X_J 上のample直線束である。

主定理 次の等式が成立する。

$$\text{sign}(U, \partial U) = - \sum_{J \in \Delta} \text{sign } Q_J.$$

証明するためには、 U を含む n 次元射影多様体とその上のケーラー計量をえらんで、 $H^n(U, \partial U)$ に具合のよりLefschetz分解を与えることと、その原始部分の次元を X_J のHodge数で表わすことが重要になる。詳しくは[01]を参照。

2. 型 I の場合.

以下, $n=2k$ とし, $\tau_\infty(p) = [\prod_{i \in I} \delta_i \coth \delta_i]_m [v, \partial v]$ とおく.

命題(佐武[S1]). 次の等式が成立する.

$$\tau_\infty(p) - 2^m \chi_\infty(p) = \sum_{j=1}^m (-2)^{n-j} \# \Delta(j).$$

一オ, $X_J (J \in \Delta(j))$ は $n-j$ 次元トーリック多様体で $H^{2i}(X_J) \cong H^{i,i}(X_J)$ だから,

$$h^{i,i}(X_J) = \sum_{t=0}^i (-1)^{i-t} \binom{n-j-t}{i-t} \# \Delta_J(t+j)$$

と表わせる。ここに $\Delta_J(k) = \{K \in \Delta(k) \mid K \supset J\}$ である。この事実と前節の符号数公式より, 次が判る。

命題[0,1]

$$\text{sign}(v, \partial v) = \sum_{j=1}^{n/2} (-1)^j \left\{ 2^{n-j} - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{n-j}{n/2-i} \right\} \# \Delta(j).$$

ふたつの命題中の和を比較すると, 和の範囲が異なることに気づく。ここに困難がある。 Δ がオイラー複体をなすことを使, て長い計算の後, 次が判る。

命題[0,1]

$$\tau_\infty(p) - 2^m \chi_\infty(p) = \text{sign}(v, \partial v).$$

3. 型 II の場合.

このとき、各 X_J はトーリック多様体をファイバーとするアーベル多様体上のファイバー束になり、特に $\chi(\mathcal{O}_{X_J}) = 0$ である。このことから次が判る。

命題 (佐武 [S2])

$$\tau_\infty(p) = 2^n \chi_\infty(p).$$

更に、 X_J の Hodge 数はファイバーの Hodge 数と底空間の Hodge 数で表わせるから、型 I の場合より簡単な計算で次が判る。

命題 [O2]

$$\text{sign}(U, \partial U) = 0.$$

REFERENCES

- [H] F. Hirzebruch, *Hilbert modular surfaces*, Enseign. Math. **19** (1974), 183–281.
- [I] M.-N. Ishida, *The duality of cusp singularities*, preprint.
- [O1] S. Ogata, *Hirzebruch's conjecture on cusp singularities* (preprint).
- [O2] S. Ogata, *Signature defects of Hilbert-Picard modular cusps* (preprint).
- [S1] I. Satake, *On numerical invariants of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$ -rank one*, in “Automorphic Forms of Several Variables,” Taniguchi Symposium, Katata, 1983 (I. Satake and Y. Morita eds.) Adv. Studies in Pure Math. **46**, Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1984, pp. 353–369.
- [S2] I. Satake, *On the y -genus of arithmetic varieties of $\mathbb{Q}$ -rank one*, Advances in Math. (Chinese Math. Soc.) **16** (1987), 269–276.
- [SO] I. Satake and S. Ogata, *Zeta functions associated to cusps and their special values*, in “Automorphic Forms and Geometry of Arithmetic Varieties,” (Y. Namikawa and K. Hashimoto eds) Adv. Studies in Pure Math. **15**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1989, pp. 1–27.
- [T] H. Tshuchihashi, *Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities*, Tohoku Math. J. **35** (1983), 607–639.