

正方形ダクト乱流中の秩序構造と二次流れ

関本 敦, 河原 源太

大阪大学基礎工学研究科機能創成専攻

Markus Uhlmann

Turbulent Flow Group, Institute for Hydromechanics, University of Karlsruhe, Germany

Alfredo Pinelli

Modelling and Numerical Simulation Unit, CIEMAT, Madrid, Spain

1 緒言

矩形管路(ダクト)内乱流にはプラントルの第二種二次流れと呼ばれる管軸に垂直な速度をもつ平均流が存在し, 物質や熱, 運動量の平均的な輸送を引き起こすため工学的関心がもたれている. これまでのダクト乱流中の二次流れに関する研究^{1,2)}では, 主に二次流れと各レイノルズ応力成分や平均渦度成分などの統計量との関係について調べられているが, 二次流れの生成機構はいまだ十分に明らかにされていない.

本研究では, 壁面近くに見られる縦渦(流れにほぼ平行な回転軸をもつ渦)やストリーク(縞状に現れる高速領域と低速領域)といった秩序構造と二次流れの関連性を考察する. これらの秩序構造は近年, 平行平板間乱流において活発に議論がなされており, 壁面乱流の自己生成サイクルに重要な役割を果たしていると考えられている³⁾. 矩形ダクト中の乱流現象によって生成する二次流れには, これらの秩序構造が大きく関与していると考えられるが, 時々刻々の秩序構造の挙動は複雑で, 二次流れとの直接的な対応付けには大きな困難が伴う.

今回は, 最も基本的な形状である正方形断面を持つダクトを対象とし, はじめに, ダクト内流れにおいて乱流が維持される臨界レイノルズ数や, 管軸方向に周期境界条件を課した時の最小管軸方向周期箱寸法について求める. 次に, この臨界状態付近の二次流れの特性を述べる. そして, 低レイノルズ数領域において, 二次流れの出現には秩序構造が密接に関わっていることを定量的に示し, 二次流れや平均壁面せん断応力のレイノルズ数依存性を, 壁面付近に存在する秩序構造の観点から考察する.

2 数値計算方法

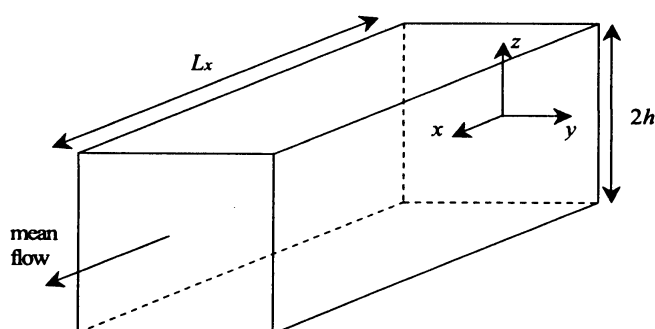


図 1: Flow configuration.

無限の長さの真っ直ぐな正方形ダクト内を流れる非圧縮性流体の運動を考える (図 1 参照)。その支配方程式は Navier-Stokes 方程式と連続の式で、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

のように表わされる。ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ で、 (u, v, w) は (x, y, z) 方向の流速、 p は圧力を密度で割った量、 ν は動粘性係数である。これらを標準的な圧力修正法をもとにして、粘性項にクランク・ニコルソン法、非線形項には 3 段のルンゲ・クッタ法を用いる⁴⁾。これを離散的に表すと以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{u^* - u^{k-1}}{\Delta t} &= -2\alpha_k \nabla p^{k-1} - \gamma_k [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{k-1} - \zeta_k [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{k-2} \\ &\quad + \alpha_k \nu \nabla^2 (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}^{k-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi^k = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{2\alpha_k \Delta t} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^* - 2\alpha_k \Delta t \nabla \phi^k \quad (5)$$

$$p^k = p^{k-1} + \phi^k - \alpha_k \Delta t \nu \nabla^2 \phi^k \quad (6)$$

ここで、 $k = 1, 2, 3$ はルンゲ・クッタのステップ数で $k = 3$ は次の時刻の値に相当する。また、 $\mathbf{u}^*$ は推定中間流速、 ϕ は擬圧力である。ルンゲ・クッタ法のステップ数に関する係数は、 $\alpha_k = [\frac{4}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{6}]$ 、 $\gamma_k = [\frac{8}{15}, \frac{5}{12}, \frac{3}{4}]$ 、 $\zeta_k = [0, -\frac{17}{60}, -\frac{5}{12}]$ であり、流速と圧力に関して二次精度である⁴⁾。

管軸方向 (x) にはフーリエ級数展開、管壁面に垂直な方向 (y, z) にはチェビシェフ多項式展開を適用する。非線形項は擬スペクトル的に計算し、 x 方向のフーリエ係数について 2/3 則によってアライアス誤差を取り除く。それぞれのフーリエ係数に関するヘルムホルツ方程式を高速対角化法によって解く⁵⁾。

この擬スペクトル法によって得られた平均流速分布や各乱流統計量は、過去の差分法を用いた直接シミュレーション¹⁾ や実験測定⁶⁾ との良好な一致が認められた。以下では $Re_b \equiv u_b h / \nu \leq 3500$ (u_b は平均流速、 h はダクトの半幅、 ν は動粘性係数) におけるシミュレーション結果を示す。流量一定の条件下で、管軸方向格子幅 Δx^+ は 15 以下、管壁に垂直方向格子幅 Δy^+ 、 Δz^+ の最大値は 6 より小さくなるように選んだ (ここで、 Δx^+ 、 Δy^+ 、 Δz^+ は平均摩擦速度 u_τ と ν で規格化した格子間隔である)。

3 臨界レイノルズ数及び最小管軸方向周期箱寸法

図 2(a) に示すのは、摩擦速度 u_τ に基づくレイノルズ数 $Re_\tau (\equiv u_\tau h / \nu)$ の Re_b に対する変化である。層流の場合 ($Re_\tau = \sqrt{a Re_b}$, $a = 3.3935$ ⁷⁾) を実線で、乱流に対する経験則⁸⁾ を破線で示している。今回の DNS から得られた結果は経験則と良く一致している。また、乱流状態が存在するのは Re_b がほぼ 1100 以上のときであり、円管内乱流の臨界レイノルズ数 $Re_m (\equiv u_m d / \nu) = 1125$ ⁹⁾ (u_m は平均流速、 d は円管半径) とほぼ同程度である。図 2(b) は、今回の DNS から得られた結果が乱流であるか層流であるかを、 $L_x^+ (\equiv L_x u_\tau / \nu)$, L_x は管軸方向周期箱寸法) と Re_b の平面上に示したものである。臨界レイノルズ数付近を除くと、乱流が維持される最小周期箱寸法 L_x^+ はレイノルズ数に依らず、ほぼ一定の値 (≈ 190) をとり、 L_x は ν / u_τ でスケールリングできることがわかる。

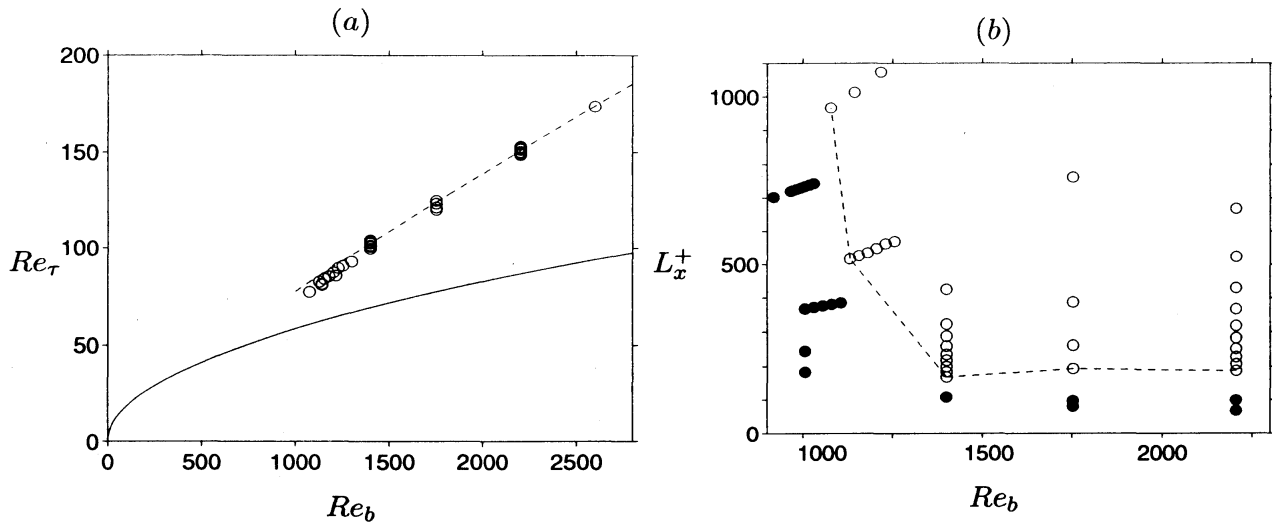


図 2: (a) Variation of the wall friction as a function of the bulk Reynolds number: $\circ$, present results (turbulent); ----, empirical correlation⁸⁾; —, laminar flow. (b) Map of turbulent ($\circ$) and laminar ($\bullet$) flow states in the plane defined by the length of the streamwise period of the computational box (measured in wall units) and the bulk Reynolds number. The dashed lines indicate the border of the region where turbulence can be sustained.

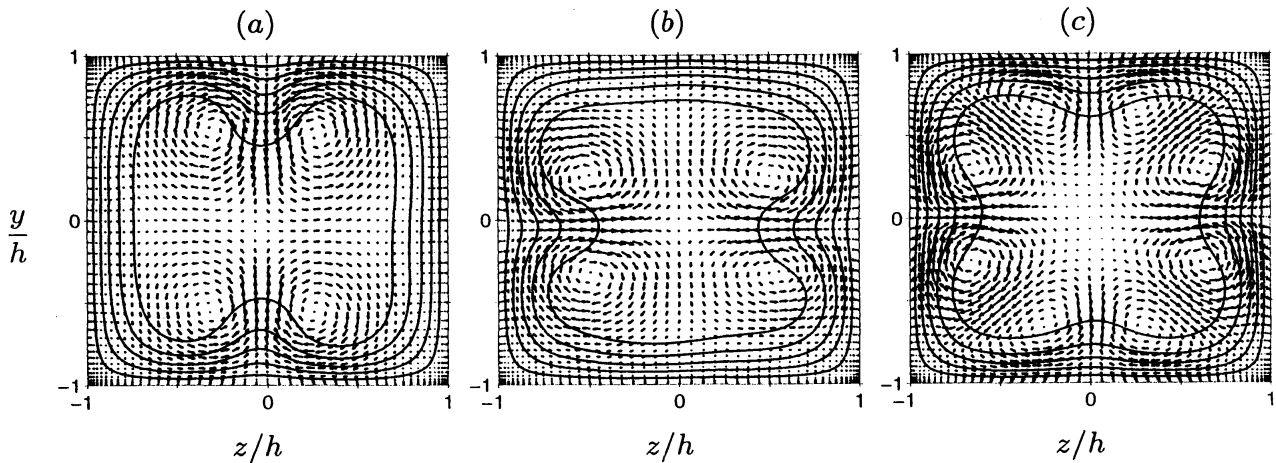


図 3: Temporally averaged velocity field for the streamwise-independent Fourier mode at $Re_b = 1100$ ($L_x/h = 4\pi$). The cross-streamwise component is shown by vectors and the streamwise component is represented by iso-contours. (a), (b) averaged over shorter interval $288h/u_b$ in marginal turbulent state; (c) over longer interval $O(10^4h/u_b)$.

4 低レイノルズ数における二次流れ

4.1 臨界レイノルズ数付近の平均流

乱流が維持される限界近くのレイノルズ数では図 3(a), (b) に示す 4 つ渦パターンが出現する。これらは管軸方向平均流速場の、異なる時間帯における比較的短時間平均であり、(a) と (b) は管軸に関して 90 度回転対称となっている。一方、長時間平均の速度場は図 3(c) のように、角へと向かう二次流れ、つまり 8 つ渦パターンとなる。したがって、この臨界レイノルズ数における流れでは (a) と (b) の二次流れを示す状態がある時刻で切り替わって存在していることになる。この 4 つ渦パターンの状態の指標 I を

$$I(t) \equiv \frac{S_1 + S_3 - S_2 - S_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \quad (7)$$

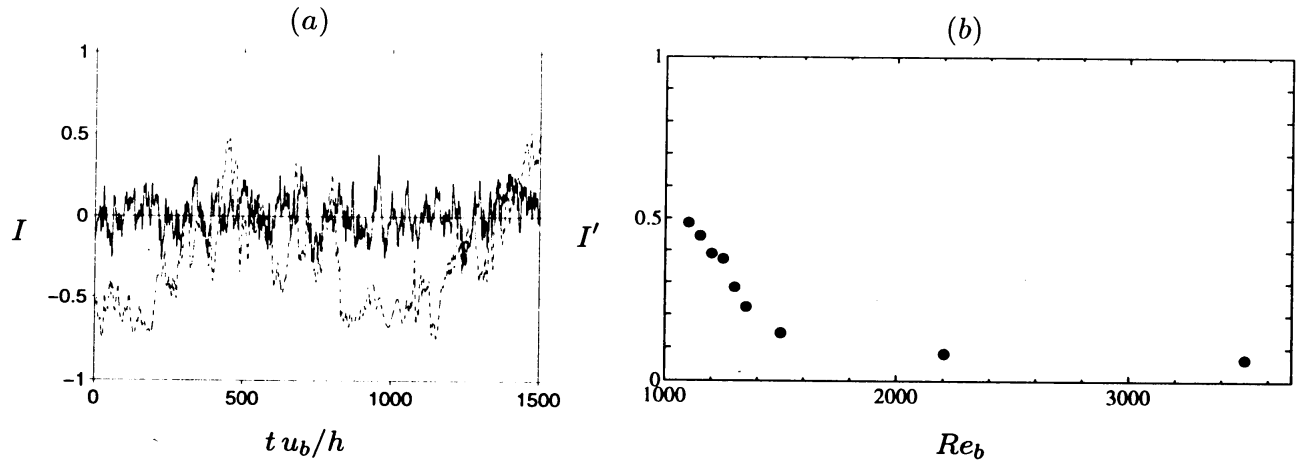


図 4: (a) Temporal evolution of the indicator function I : —, $Re_b = 2200$; ----, $Re_b = 1100$. In both cases $L_x/h = 4\pi$. (b) The r.m.s. values of the indicator I as a function of the Reynolds number.

と定義する。ここで,

$$S_i(t) = \int \int_{\Omega_i} \langle \omega_x \rangle_x^2 dy dz \quad (8)$$

であり (ω_x は管軸方向渦度成分, $\langle \cdot \rangle_x$ は管軸方向平均), Ω_i は

$$\begin{aligned} \Omega_1 &: \{(y, z) | y < z \cap y < -z\}, \\ \Omega_2 &: \{(y, z) | y < z \cap y > -z\}, \\ \Omega_3 &: \{(y, z) | y > z \cap y > -z\}, \\ \Omega_4 &: \{(y, z) | y > z \cap y < -z\} \end{aligned} \quad (9)$$

で定義される領域である。ある時刻での流れ方向平均速度場が 8 つ渦の二次流れパターンであるとき, この指標 I の絶対値は 1 より十分小さな値をとる ($-1 < I < +1$)。 I の時間変動を $Re_b = 1100, 2200$ の場合 (どちらの場合も $L_x/h = 4\pi$) について, 図 4(a) に示す。 $Re_b = 1100$ の場合では, I の絶対値が大きくなる時間帯が存在し, 4 つ渦状態が出現していることがわかる。レイノルズ数が大きくなると, I は零付近で小さな振幅を持って振動し, 4 つ渦状態に特有の, I の絶対値が大きくなる時間帯は観測されない。指標 I の rms 量 $I' (\equiv \sqrt{I^2})$ のレイノルズ数に対する変化を図 4(b) に示す。これは, レイノルズ数が大きくなるにつれて, 4 つ渦状態が出現しなくなるということを示唆している。

$Re_b = 1100$ の場合において, I の値が正/負となっている時間帯での平均流速場を観測すると, 図 3(a)/(b) のようになる。 I が正の大きな値を示している間の瞬間流速場を観察すると, 縦渦やストリークといった秩序構造が壁面 $y/h = \pm 1$ 上に存在し, もう一方の壁面上 ($z/h = \pm 1$) にはこれらの構造がほとんど存在していない。また, 2 つの 4 つ渦パターンが時間的に切り替わることが観測される (図 5(a))。この切り替わり現象が生じるため, 長時間の平均流速場は I が正の状態と負の状態を重ね合わせた速度場 (図 3(c)) となり, これは従来の 8 つ渦パターンの二次流れである。図 5(b) に 4 つ渦の指標 I と散逸率 D の相関図を示す。 D は層流の場合の散逸率 D_{lam} で規格化してある。臨界レイノルズ数の流れにみられる 4 つ渦の状態は, 壁乱流に特有の秩序構造を有しているが, その秩序構造は特定の壁面上にのみ局在していて, 比較的低い散逸率を示しており, 高いレイノルズ数の流れとは異なる性質を有していることがわかる。

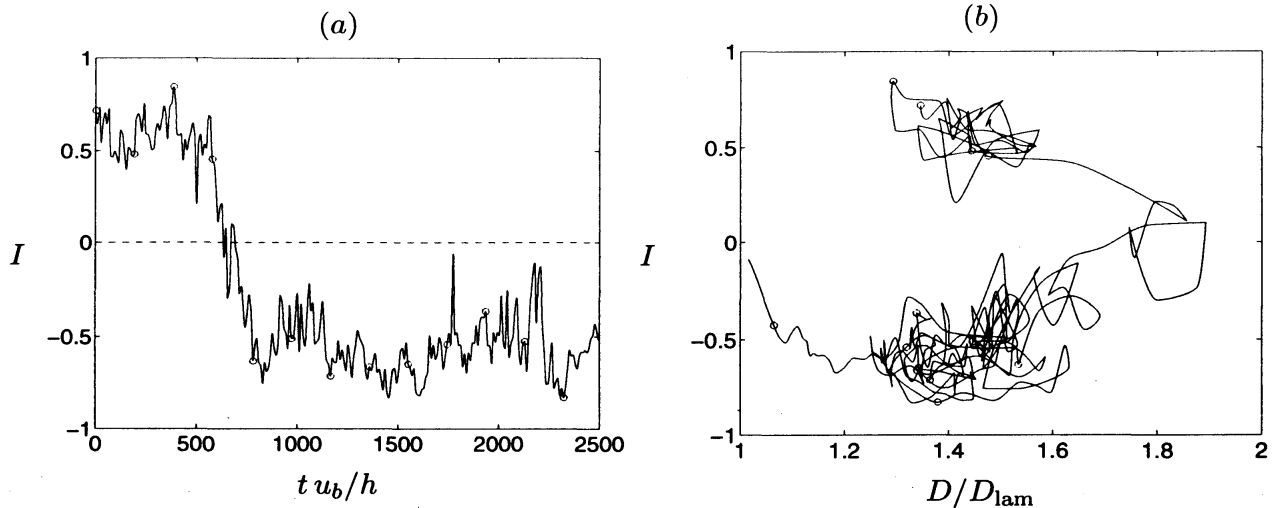


図 5: (a) The temporal evolution of the indicator function showing the switching phenomena of two 4-vortex patterns at $Re_b = 1100$, $L_x/h = 4\pi$. (b) Indicator I vs Dissipation rate D normalized by laminar value D_{lam} . The initial field has $(I, D/D_{lam}) = (0.72, 1.35)$. The circles are marked at interval of $183.1h/u_b$.

4.2 平均流のレイノルズ数依存性

$Re_b = 1100, 1500, 2200, 3500$ での長時間平均流速場を図 6 (a, b) に示す ($L_x/h = 4\pi$, 平均した時間は $O(10^4 h/u_b)$). 二次流れの影響により, 平均管軸方向流速分布には円管内乱流にはみられない変形が観測できる. 二次流れ渦はレイノルズ数が大きくなるにつれて図 6(a) のように変化する. また, 図 6(b) に示すように, 二次流れ渦中心付近の平均管軸方向渦度場 ω_x の極大 (小) 点は角へと近づく傾向にある. 図 7(a) に, 二次流れ渦中心のよどみ点の位置を, 図 7(b) に ω_x の二次流れ渦中心付近の極大点の位置を各レイノルズ数について示した. レイノルズ数が 1500 付近より小さい場合と, それより大きな場合ではレイノルズ数に対する変化が大きく異なっていることがわかる. また, 図 8(a, b) によどみ点の位置の角からの距離, 図 8(a, b) に平均管軸方向渦度の極大点の位置の角からの距離を h , 及び ν/u_τ で規格化して示す. 二次流れ渦中心付近のよどみ点の位置はダクト幅 h でスケールされ, 一方, 渦度の極大点の位置は ν/u_τ でスケールされることが期待されるが, このことをはっきりと示すためにはさらに高レイノルズ数の結果も必要であろう.

4.3 平均壁面せん断応力

次に, それぞれのレイノルズ数において, 平均壁面せん断応力 $\bar{\tau}_w$ で規格化された壁面せん断応力の分布を図 10(a, b) に示す ((a) は角からの距離を ν/u_τ で規格化して示した). レイノルズ数が 1100, 1500 の場合は壁面中央付近で極小点を持ち, 角寄りの位置で極大点をとるが, 2200, 3500 の場合は中央と角寄りの位置でも極大点をもつ. 角付近の極大点の角からの距離は, どのレイノルズ数でも $50\nu/u_\tau$ 程度である. つまり, 壁摩擦長でスケールされる秩序構造が壁面せん断応力分布に影響を及ぼしていると考えることができる. これらの統計量のレイノルズ数依存性については, 次節で秩序構造と関連付けて考察する.

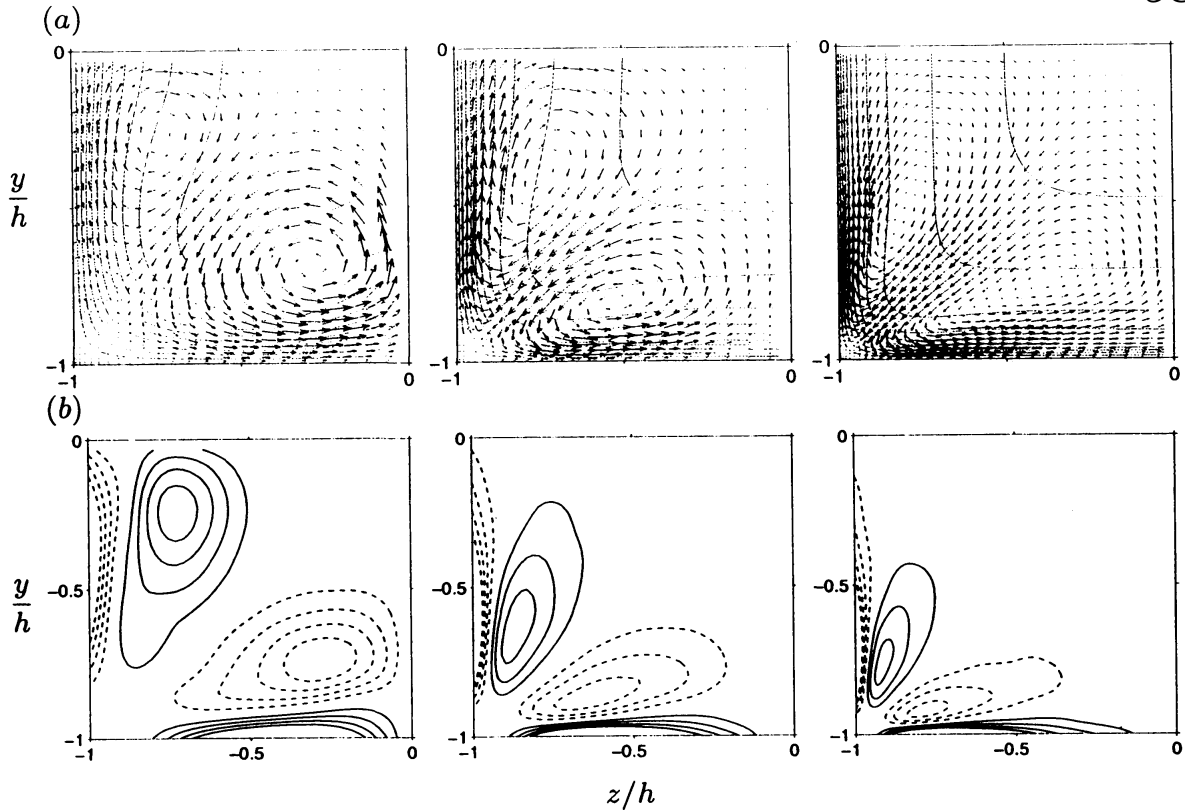


図 6: (a) Temporally averaged velocity field, for the streamwise-independent Fourier mode at (left), $Re_b = 1500$; (center), $Re_b = 2200$; (right) $Re_b = 3500$ ($L_x/h = 4\pi$, quadrant average over longer interval $O(10^4 h/u_b)$). The cross-streamwise component is shown by vectors and the streamwise component is represented by iso-contours: (b) streamwise vorticity field: —, iso-contours of positive vorticity; ----, negative vorticity.

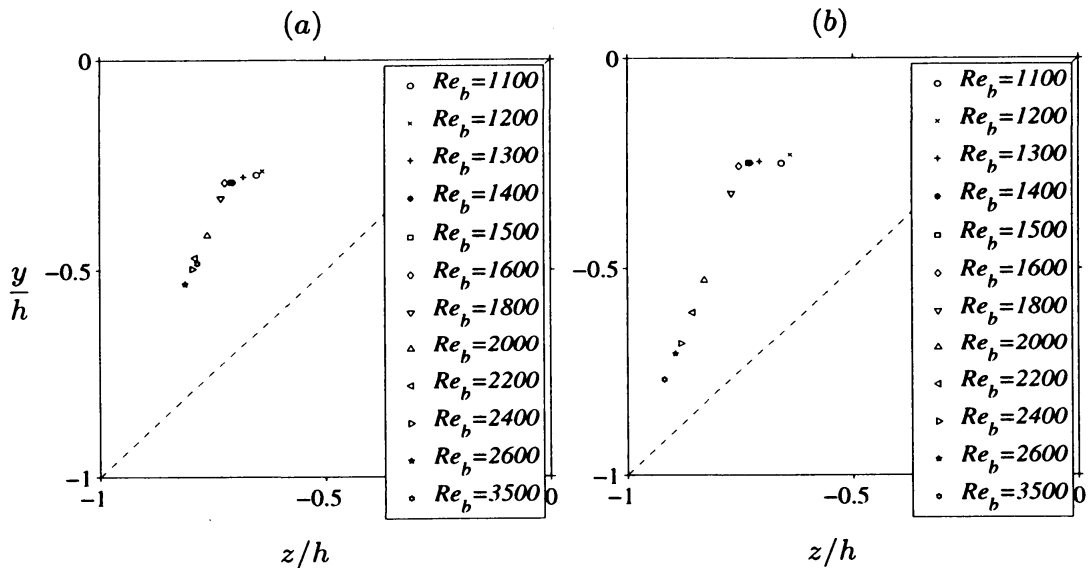


図 7: (a) Stagnation points of mean secondary flow. (b) Maximum points of mean streamwise component of vorticity.

5 秩序構造と平均流

5.1 縦渦中心の PDF

二次流れと秩序構造の関連性を調べるために秩序構造を定義し定量的に議論を進める。縦渦の中心軸がある管断面を通る点を次の2つの条件,

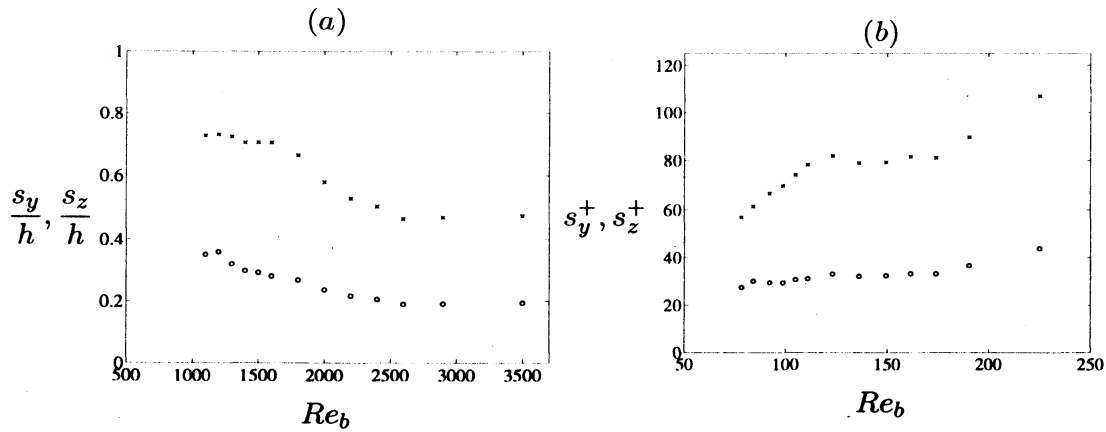


図 8: The distance (s_y, s_z) of the stagnation points from the corner, (a) scaled by duct half width h , (b) scaled by ν/u_τ . Symbols: $\circ$ distance to $y/h = -1$; $\times$ distance to $z/h = -1$ (see fig. 7 (a)).

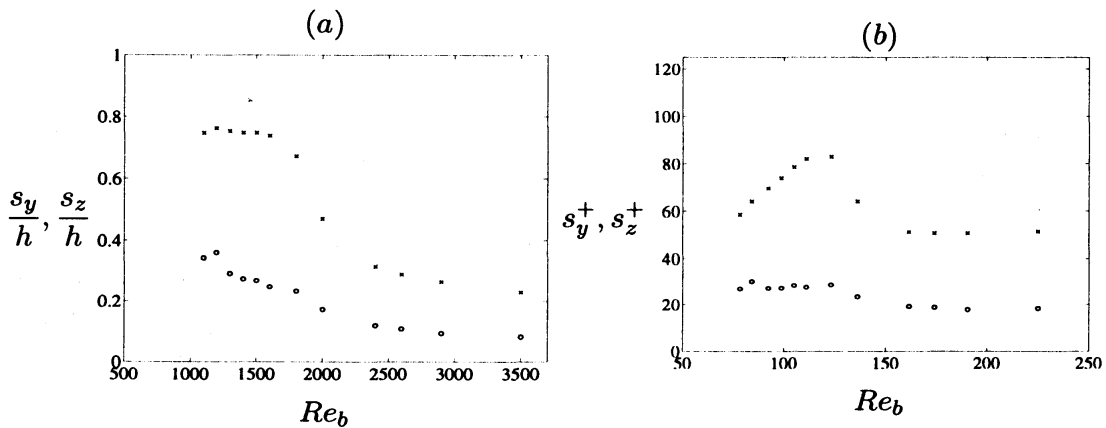


図 9: The distance (s_y, s_z) of the maximum points of mean streamwise vorticity from the corner, (a) scaled by duct half width h . (b) scaled by ν/u_τ . Symbols: $\circ$ distance to $y/h = -1$; $\times$ distance to $z/h = -1$ (see fig. 7 (b)).

- 速度勾配テンソルの第二不変量が管断面内で極大値をとる点,
- その極大点の周りで管断面上に射影された流線が螺旋形である条件¹⁰⁾を満足する点

として定義する. これによって, ある時刻において各管断面での渦中心の位置座標を特定することが可能である. 縦渦中心の確率密度分布 (PDF) を描くと図 11(a) – (d) のようになる. これらは $Re_b = 1100, 2200$ の場合の長時間サンプリングの結果で, (a), (c) は正の渦度を持つ (時計回りの) 縦渦, (b), (d) は負の渦度を持つ (反時計回りの) 縦渦中心の PDF を示し, 二次流れ渦の中心付近では PDF の値は大きくなっている. したがって, 秩序構造 (縦渦) が側壁の影響を受けることによって, 特定の領域に存在する頻度が大きくなり, 縦渦の重ね合わせとして平均速度場に二次流れが生じていると考えられる. また, $Re_b = 1100$ の場合において, 4 つ渦状態に対応する時間帯で縦渦中心の短時間のサンプリングを行い, 渦中心の PDF を描くと, 4 つ渦パターンの二次流れに対応した PDF が得られる¹¹⁾.

臨界レイノルズ数付近の流れにおいては, 壁面 $y/h = \pm 1$ (または $z/h = \pm 1$) 上に, 互いに反転する縦渦対が 1 組ずつ納まる状態となり, 壁面 $z/h = \pm 1$ (または $y/h = \pm 1$) 付近に縦渦対が入り込む余地が残されていないために 4 つ渦パターンの二次流れが出現すると考えられる.

レイノルズ数が大きくなると, 4 つ渦パターンを示す流動はなくなり, 8 つ渦パターンの二次流れパターンのみが存在するようになる (例えば, 図 4(b) での $Re_b = 1500$ 付近). これは, レイ

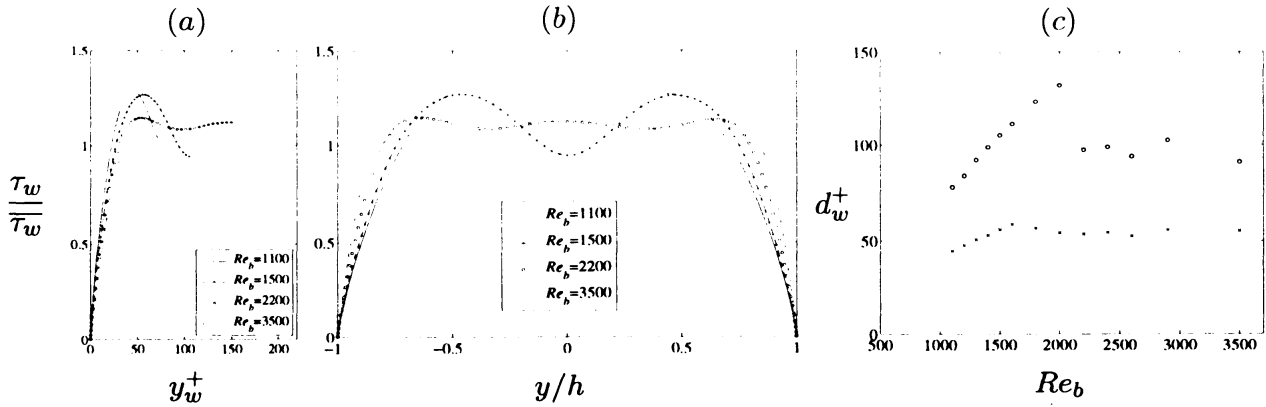


図 10: Mean local wall shear stress normalized by the average over the whole walls at four Reynolds numbers ($L_x/h = 4\pi$), as a function of the distance (a) from the corner, y_w^+ in wall units, (b) from the wall bisector, y/h . (c) The distance of the local minimum (o) and maximum (x) of mean wall shear stress from the corner in wall unit, d_w^+ .

ノルズ数の増加に伴いコルモゴロフスケールの10倍程度の直径を持つ縦渦は、管路幅に対して小さくなり、各壁面上に1組の縦渦対が存在できるようになるためである。このことは、図7(a), (b)において、 $Re_b = 1500$ 付近を境に、レイノルズ数に対する変化の様子が大きく異なることに対応している。

さらにレイノルズ数が大きくなると、図11(c), (d)のように、縦渦は壁面に沿う比較的広い範囲に存在するようになる。これは、縦渦が平行平板間乱流と同様に、壁面に沿ってある程度自由に移動することができるようになるためである。

$Re_b = 2200$ の結果である図11(c), (d)には、角寄りの位置だけでなく壁面中央付近にもPDFの極大点がみられる。このレイノルズ数では、一つの壁面上に2組の縦渦対が存在し、PDFが壁面中央付近で極大点を持つと考えられる。しかしながら、正と負の渦度をもつ縦渦同士が打ち消し合うため、図6(b)の平均二次流れには、縦渦中心の小さなピークの影響は見られない。

5.2 低速ストリークのPDF

次に、ストリークと平均壁面せん断応力との関係について考察する。ある時刻での低速ストリークの位置を、管軸方向平均した局所せん断応力の極小点として定義し、ある壁面上でのその位置の時間変化を追跡すると図12のようになる。また、すべての壁面を合わせて、そのPDFを描くと図13のようになる。これから、レイノルズ数が増加すると低速ストリークのPDFの極大点が1本から2本に変化していることが見て取れる。前節の平均壁面せん断応力の極小点の数とおおよその位置は、PDFの極大点の数およびその位置と一致する。 $Re_b = 1100, 1500$ の場合には、すでに述べたように縦渦対が各壁面上に1組しか存在できないため、低速ストリークは各壁面上で平均1本存在する。

$Re_b = 2200$ の場合には、ある壁面上に2組の縦渦対が存在することが可能であるため、低速ストリークが2本存在することになる。したがって、このときは2本の低速ストリークが図13の極大点の位置(側壁からおおよそ 100^+ の位置)によく出現することがわかる。

$Re_b = 3500$ の場合においては、各壁面に低速ストリークが3本以上存在できるが、PDFの極大点は2つである。これは、壁面中央付近では縦渦構造が自由に移動できるため、低速ストリークの存在頻度は平行平板間乱流のように一様となるためであると考えられる。一方、角付近では側壁の影響を受けて縦渦構造の移動が制限されるため、低速ストリークも側壁に近い位置では動きを制限されることになり、結果として、低速ストリークのPDFの極大点が

側壁から $100\nu/u_\tau$ 付近に生じると考えられる.

6 結言

スペクトル法を用いた正方形ダクト内乱流のDNSを行い、乱流が維持する臨界レイノルズ数および最小の管軸方向周期箱寸法を決定した. 臨界レイノルズ数付近の乱流では、管軸まわりに 90° 回転すると互いに一致する2つの4つ渦パターンの平均二次流れが出現する. これらのパターンを示す流動は互いに時間的に切り替わるため、長時間平均としての平均二次流れは2つの4つ渦パターンを重ね合わせた8つ渦パターンとなる. また、レイノルズ数の増加と共に4つ渦パターンを示す流動は見られなくなり、良く知られた8つ渦パターンの二次流れとなることを、4つ渦パターンの指標 I を導入して定量的に示した. 今回調べた低レイノルズ数領域 (Re_b が1500から3500) では、壁面付近の秩序構造 (縦渦と低速ストリーク) は、隣接する壁面の影響を受けて特定のスパン方向位置に現れる. その位置は、ダクト幅と秩序構造の長さスケールとの比によって異なり、 $Re_b \approx 2000$ 付近を境として、互いに反転する縦渦構造とその間にある低速ストリークがある壁面上に1組存在する状態から2組存在するようになり、その結果二次流れの様子や平均壁面せん断応力の分布が大きく変化する. さらにレイノルズ数を大きくすると、壁面中央付近では秩序構造は平行平板間乱流と同様のふるまいをするため互いに打ち消し合い、その影響は平均化されるが、角付近では側壁が存在することによって秩序構造が拘束を受けるため、統計量にはっきりと影響が残る. そのため、平均管軸方向渦度場や平均壁面せん断応力分布の極小点や極大点の位置は ν/u_τ でスケールされる. 一方、平均二次流れはダクト幅スケールの大規模な流れであり、二次流れ渦のよどみ点に関してはダクト幅 h でスケールされることが期待される. しかしながら、今回の低レイノルズ数の計算では最小の渦のスケールとダクト幅とのスケール差はあまり大きくないため、平均速度場に関するスケージング則ははっきりしない. 今後、さらに高いレイノルズ数のDNS結果を含めて詳細に調べる必要がある.

参考文献

- [1] Gavrilakis, S., *J. Fluid Mech.*, **244** (1992), pp.101–129
- [2] Gessner, *J. Fluid Mech.*, **58** (1973), pp.1–25
- [3] Hamilton, J. M., Kim, J. and Waleffe, F., *J. Fluid Mech.*, **287** (1995), pp.317–348
- [4] Verzicco, R. and Orlandi, P., *J. Comput. Phys.*, **123** (1996), pp.402–414
- [5] Haldenwang, P., Labrosse, G., Abboudi, S. and Deville, M., *J. Comput. Phys.*, **55** (1984), pp.115–128
- [6] 河原源太・ほか4名, 機論., **66-641**, B(2000), pp.95–102
- [7] Tatsumi, T. and Yoshimura, T., *J. Fluid Mech.*, **212** (1990), pp.437–449
- [8] Jones, O., *ASME J: J. Fluids Engng.*, **98** (1976), pp.173–181
- [9] Faisst, H. and Eckhardt, B., *J. Fluid Mech.*, **504** (2004), pp.343–352
- [10] Kida, S. and Miura, H., *J. Phys. Soc. Japan*, **67-7** (1998), pp.2166–2169
- [11] Uhlmann, M. Pinelli, A. Kawahara, G. and Sekimoto, A., *J. Fluid Mech.*, **588** (2007), pp.153–162

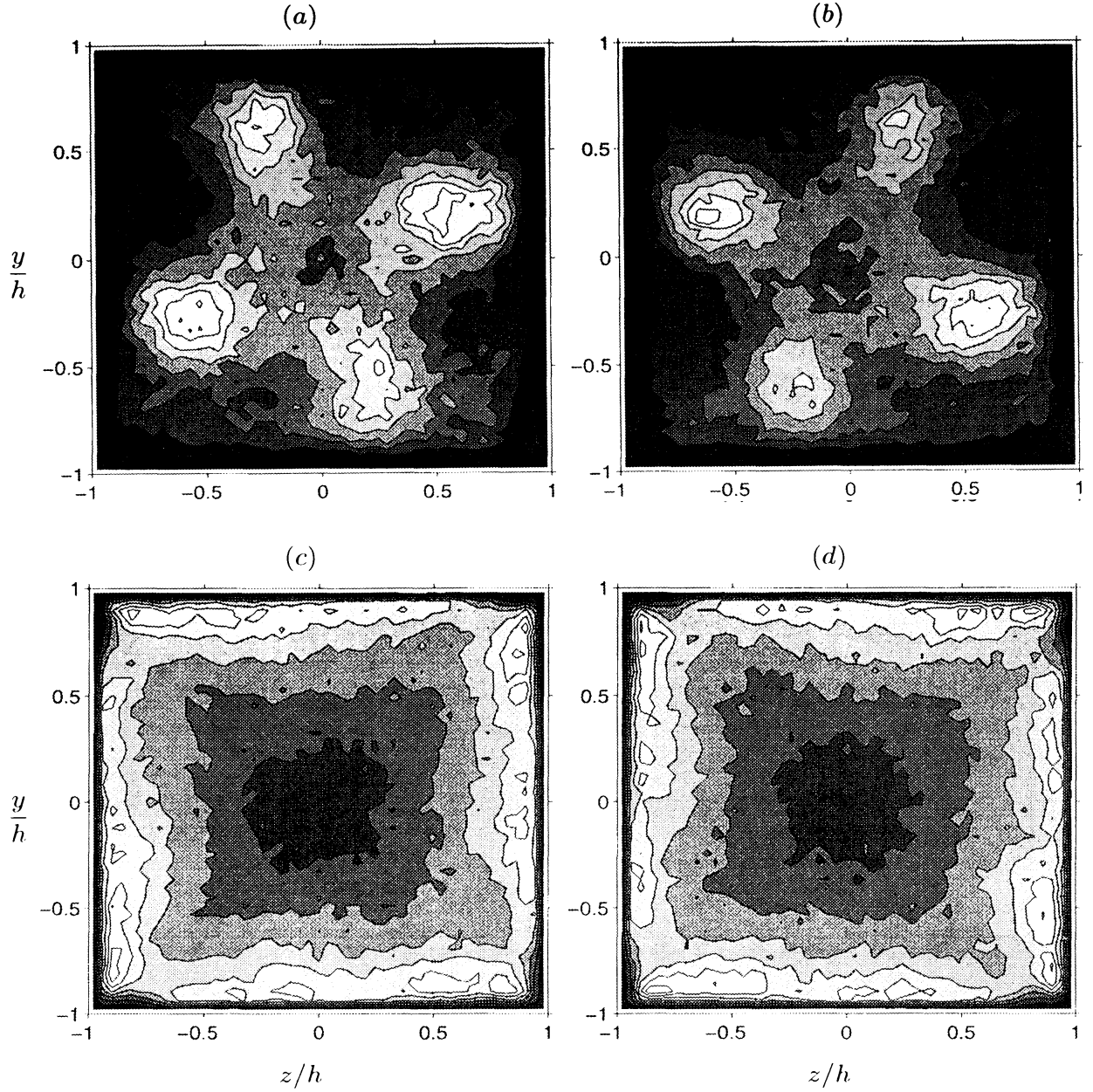


FIG 11: The PDF of the position of vortex centers: (a), (b) $Re_b = 1100$; (c), (d) $Re_b = 2200$ ($L_x/h = 4\pi$). (a), (c) vortices with positive (clockwise) streamwise vorticity; (b), (d) negative (counter-clockwise) streamwise vorticity.

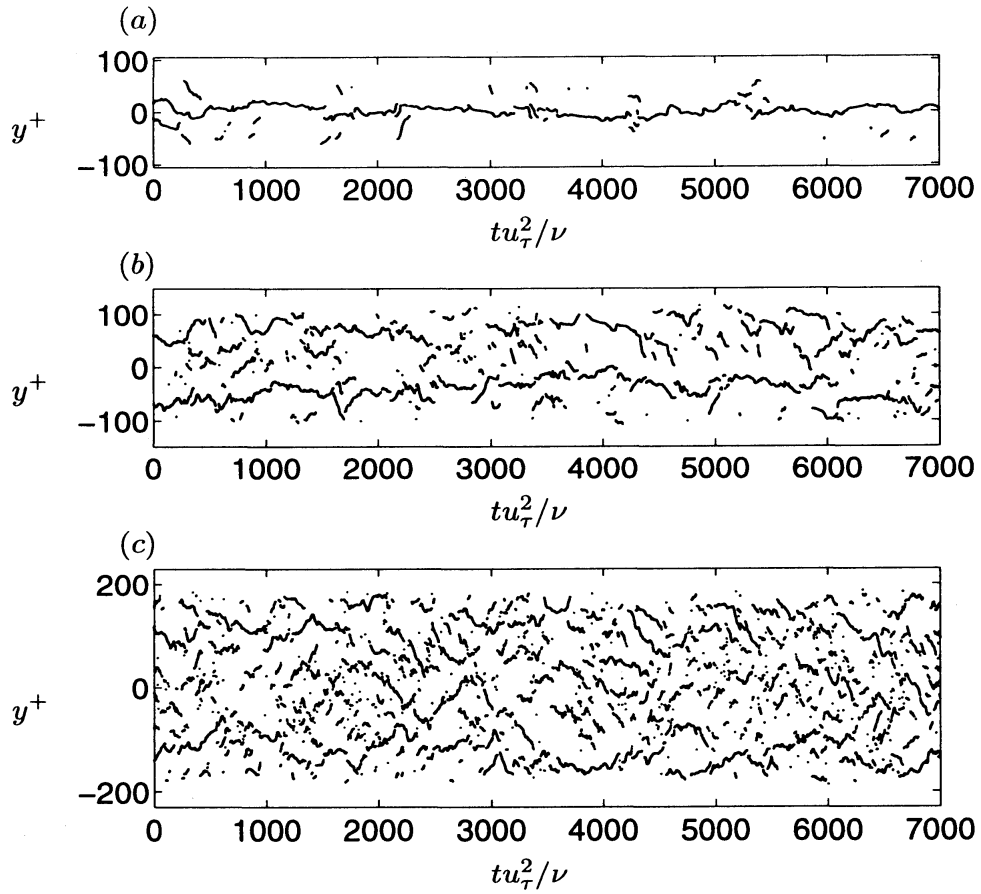


Figure 12: Time evolution of the positions of local minimum point of the streamwise averaged wall shear stress on a wall. (a) $Re_b = 1500$; (b) $Re_b = 2200$; (c) $Re_b = 3500$.

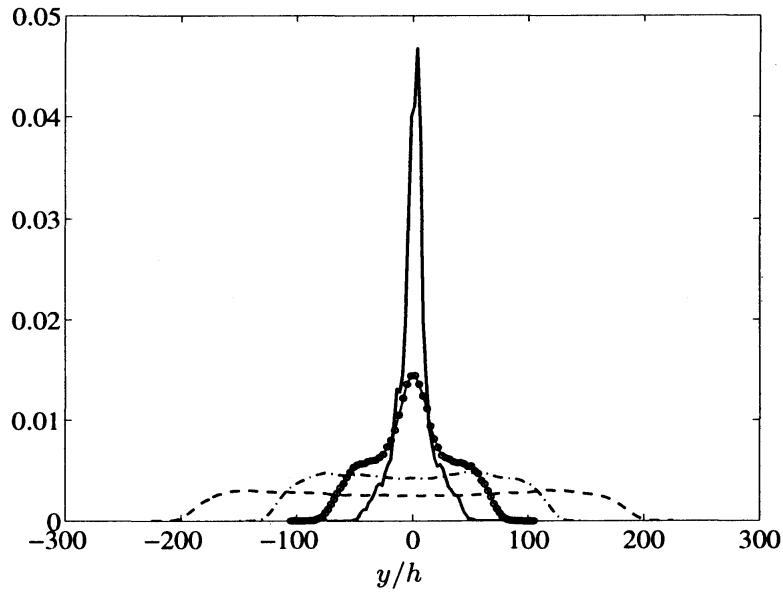


Figure 13: The PDF of the position of low-velocity streaks on the duct wall: —, $Re_b = 1100$; —○—, $Re_b = 1500$; —□—, $Re_b = 2200$; ----, $Re_b = 3500$.