

Equivariant Embeddings

阪大 教養部 満洲 俊樹

微分幾何学等で compact 群の C^∞ 多様体への作用を扱う際には、その compact 群をある適当な metric に対する isometries とみなすことにより、随分詳しい情報が得られている。例えば、所謂 exponential map が fixed point locus の normal bundle からもとの多様体への group equivariant な submersion になっているという様なこともたゞらに導かれる。これと同様のことが reductive algebraic group の代数多様体への作用についても言えないであらうか？

以下、基礎体 $k = \mathbb{C}$ 、かつ代数群の作用はすべて regular と仮定する。上記の問題に対して、 $\mathbb{C}^*$ の non-singular projective variety への作用の場合は、Bialynicki-Birula [1] によって強力な stratification theorem が見出され、一方 reductive algebraic group の affine algebraic ~~group~~ variety への作用に関しては Luna [2] によって詳しい研究がなされている。そこで

我々は $G = SL(m; \mathbb{C})$ の non-singular algebraic variety V (not necessarily complete or affine) への non-trivial action を調べてみた。この場合、その fixed point locus V^G が non-singular であることは良く知られている。(これは一般の reductive algebraic group に対して成り立つことである。) 我々は次の定理を得た。

定理: Let W be an irreducible component of V^G s.t. $\text{codim}_V W \leq m \Rightarrow$ Then W is a connected component of V^G with $\text{codim}_V W = m$, and $\exists$ a natural G -equivariant open immersion $N(V:W) \hookrightarrow V$. Furthermore, if ψ is a biregular automorphism of V , then we have the following:

- i) $\psi(W) = W \Rightarrow \psi(N(V:W)) = N(V:W)$ as subsets of V .
- ii) $\psi|_W = \text{id}_W \Rightarrow \exists$ regular function f on W s.t.
 $\psi|_{N(V:W)} = \text{multiplication by } f \text{ in } N(V:W)$.

注意: (この定理は $m=1$ の時は $G = \mathbb{C}^\times$ に対して成り立つ。) さてこの定理の証明は省略するが、ここではその大体の感じがつかえる様に、上の定理で $\dim V = m$ のときの証明の概略を述

べてみる。 $\gamma = \gamma'' \dim V = m$ とし、点 $p \in W$ を v とつ任意に固定する。点 p における $G = SL(m; \mathbb{C})$ の isotropy representation は faithful γ'' あるから (cf.

Bialynicki-Birula [2]), $T_p(V) (\cong \mathbb{C}^m)$ への G -action は $T_p(V)$ の適当な $\mathbb{C}$ -basis をとることによつて standard representation になるか contragredient representation になるかのいずれかである。いずれの場合も $T_p(V)$ は

$$(\#) \quad T_p(V) = (T_p(V) - \{0\}) \cup \{0\}$$

と2つの G -orbit にわかれる。このことから、 W が positive dimension をもつことはない。 $\therefore \dim W = 0$ として $W = \{p\}$ 。これから W は V^G の connected component with $\text{codim}_V \overbrace{W}^{=m}$ となつてゐることがわかる。次に Sumihiro [4] の定理によつて $\exists G$ -stable quasi-affine open nbd U of p in V on which G acts linearly, i.e., for some realization $U \subseteq \mathbb{C}^N$ as a quasi-affine variety, the G -action on U extends to a linear action on $\mathbb{C}^N$ centered at $p=0 \in \mathbb{C}^N$ 。さて $G = SL(m; \mathbb{C})$ は reductive である。この $\mathbb{C}^N$ は G -stable vector subspace の $\hat{\alpha} = \mathbb{C}^N = T_p(V) \oplus T_p(V)^\perp$ に書かれる。こゝで $\text{pr}_1: \mathbb{C}^N \rightarrow T_p(V)$ を canonical projection to the first factor

とすれば $pr_1|_U : U \rightarrow T_p(V)$ は点 p で Jacobian の
 maximal rank を 持つ。 U を適当に小さくするこ
 とによって、最初から $pr_1|_U$ が étale だと仮定
 してよい。さて $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V) - \{0\})$ は m -dimensional
 G -orbits の disjoint union (cf. (#))。 $\dim V = m$ だか
 らすべての m -dimensional G -orbits は open dense in V 。
 よって $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V) - \{0\}) = \text{a single } G\text{-orbit}$ 。とこ
 ろ $T_p(V) - \{0\} \cong \mathbb{C}^m - \{0\}$ ($m \geq 2$) は simply connected
 であるので、 $pr_1|_U$ を $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V) - \{0\})$ に制限
 したもの は isomorphism onto $T_p(V) - \{0\}$ となっている。そ
 こで、 $pr_1|_U$ が birational surjective morphism with finite
 fibres となっており、Zariski main theorem によ
 って、 $pr_1|_U : U \xrightarrow{\cong} T_p(V)$ が isomorphism であること
 がわかる。よって $\exists$ G -equivariant open immersion $(= (pr_1|_U)^{-1})$
 $T_p(V) \hookrightarrow V$ 。さて、 ψ を V の biregular automorphism
 としたとき、 $N(V:W) (= T_p(V)) = \{g \in V; \text{Zariski}$
 closure of $G \cdot g$ in V contains $p\}$ に注意すれば、 $\psi(W)$
 $= W$ ならば $\psi(p) = p$ を仮定 ~~する~~ ^{$T = W$ 時}。 $\psi(N(V:W)) = N(V:W)$
 が導かれることは直ちにわかる。また、 $G = SL(m; \mathbb{C})$
 の non-trivial ^{linear} action の与えられた $\mathbb{C}^m$ (その action

は $SL(m; \mathbb{C})$ の standard representation の contragredient representation のいずれかに equivalent となることは well-known) に対し、 G -equivariant biregular automorphism of $\mathbb{C}^m$ which maps $\{0\}$ to $\{0\}$ は必ず vector space $\mathbb{C}^m$ の scalar multiplication になっているという事実から、 $\psi|_W = \text{id}_W$ (i.e., $\psi(p) = p$) のとき $\psi|_{N(V:W)} = \text{scalar multiplication by a complex number in } N(V:W) (= T_p(V))$. となっていて、このことから直ちに導かれる。

以上は $\dim V = m$ のときの定理の証明の概略であるが一般の $\dim V \geq m$ の場合も ($\dim V < m$ となることはない) ただ単に W の各点 p に対する上の議論を、 W に沿ってのばしていくことにより、証明をするわけである。詳しくは [3] を見られたし。

最後に上の定理の応用を二つあげておく。

Cor: $G = SL(m; \mathbb{C}) \times V \longrightarrow V$ non-trivial regular action

V : m -dimensional normal complete variety, V^G contains a simple point of V .

$\Rightarrow V \cong \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (biregular)

証明) $p \in V^G$ を V の simple point とせよ。 V^G の点 p を通る irreducible component W をとると、上の定理によつて、 $\dim W = 0$ かつ $W = \{p\}$ となっている。 しかも $\exists$ natural open immersion: $T_p(V) \hookrightarrow V$ 。 さて点 p に於ける isotropy representation

$$G \in \mathrm{SL}(m; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(T_p(V))$$

は m -dimensional $\mathbb{C}$ -vector space $T_p(V)$ の $\mathbb{C}$ -basis を適当に定めることによつて standard representation になるか contragredient representation になるか、いずれかである。 いずれの場合も $T_p(V) (\cong \mathbb{C}^m)$ に U と $\mathbb{P}^1$ の orbit $\mathbb{P}(T_p(V)) (= \text{set of lines in } T_p(V)) \cong \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ をつけ加えることによつて G -equivariant compactification $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ of $T_p(V)$ を得る。 さて、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \\ \cup & \searrow & \\ T_p(V) & \hookrightarrow & V \end{array}$$

によつて G -equivariant birational map φ が定義される。 φ の set of points of indeterminacy ($=S$) は、 $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}) (= \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) - T_p(V))$ の G -stable subset T'' しかも $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の中 T'' codimension 2 以上。 よつて ~~それ~~

S is $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ of proper subset. $\therefore$ $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ is single orbitであるから、結局 $S = \emptyset$. $\exists \varphi$ is birational morphism. 一方、 φ のある fibre の positive dimension をも、 n と仮定すると、 $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の curve と codim 1 の subvariety は必ず intersect することに反し、不合理。よって φ は birational finite morphism. V : normal ので Zariski's Main theorem により、 φ は isomorphism. (q.e.d.)

次にあつた Corollary は証明を省く。(詳しくは [3] を見よ。)

Cor: Let $m, n \in \mathbb{Z}_+$ and let $G = SL(m+1; \mathbb{C}) \times SL(n+1; \mathbb{C})$ act regularly and essentially effectively on an $(m+n+1)$ -dimensional non-singular complete variety V . Denoting by G' (resp. G'') the subgroup $SL(m+1; \mathbb{C}) \times \{e\}$ (resp. $\{e\} \times SL(n+1; \mathbb{C})$) of G , we assume that $V^{G'}$ contains a subvariety W with two properties:

- (a) $W \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
- (b) W is a single G'' -orbit.

Then V is isomorphic to either $\mathbb{P}^{m+n+1}(\mathbb{C})$ or the projective bundle $\mathbb{P}(\underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)}_{(m+1)\text{-copies}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$

over $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ with some $d \in \mathbb{Z}$.

但し $\perp$ で "essentially effective action" といふのは $\{g \in G; g \cdot p = p \ \forall p \in V\}$ が "finite group" であるということである。

以上、我々の得た定理はその idea を Bialynicki-Birula [1] 及び Luna [2] に多く依っていることを注意して報告を終える。

References

- [1] A. Bialynicki-Birula : Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.*, 98(1973), 480-497
- [2] D. Luna : Slices étales, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire, 33(1973), 81-105

- [3] T. Mabuchi : Equivariant embeddings of
normal bundles of fixed point loci, Osaka J. math., 16 (1979)
- [4] H. Sumihara : Equivariant completion, J. math.
Kyoto Univ., 14 (1974), 1-28.