

# 離散化した結合写像格子

後藤謙太郎\*

本稿では CML を離散化して得られる CA に必要な状態数を調べた。計算機実験により高々 $2^9$ 状態の CA で CML が模倣されること、また静的な相と乱流的な相との中間に位置する相は他の相に比べ多くの状態数を必要とすることを確認した。さらに、離散化によって得られる CA はその状態数の対数  $\eta$  に関して既約であることをオートマトンの最小化の技法によって示した。

## 1 はじめに

セルオートマトン (cellular automaton; 以下 CA) は最初 von Neumann によって自己複製のモデルとして提案され、これまでに化学反応による空間パターンの時間発展のモデル、さらにその並列性から並列計算機のモデルとして広く研究されてきた (例えば文献 [1, 2] を参照)。

これに対し結合写像格子 (caupled map lattice; CML) は、その局所的な状態の定義を除いてよく似たものである。すなわちセルと呼ばれる各構成要素のとり状態のレンジが、CA では有限個の値であるのに対して、CML では実数値をとり、その発展規則は CML の場合、通常カオス的な力学が採用される。CA と CML そして参考に偏微分方程式の定義間の関係を表 1 に示す。

表 1: モデルの定義の関係 (文献 [3] より改変)

| モデル      | 空間 | 時間 | 局所状態 |
|----------|----|----|------|
| セルオートマトン | 離散 | 離散 | 離散   |
| 結合写像格子   | 離散 | 離散 | 連続   |
| 偏微分方程式   | 連続 | 連続 | 連続   |

CML はその熱力学的な現象論および空間時間的なカオスとしての性質が調べられており、その結果、物理的な現象に限らず、生物、化学などの広い範囲の空間パターンの時間発展に関する記述能力を持っていることが知られている [3]。そこで我々は

\*北海道大学大学院理学研究科数学専攻, email: gotoken@math.hokudai.ac.jp

CML を利用した並列計算を考えるために, CML を離散化することによって得られる CA を調べた.

本論中で用いられる CML は次式で与えられる:

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \frac{\epsilon}{2}\{f(x_{n-1}^i) + f(x_{n+1}^i)\}, \quad (1)$$

ここで関数  $f: I \rightarrow I$  はロジスティック写像  $f(x) = 1 - ax^2$  である. ただし  $I = [I_{\min}, I_{\max}] = [(-1 - \sqrt{1 + 4a})/2a, (1 + \sqrt{1 + 4a})/2a]$  とする.  $x_n^i$  は時刻  $n$  における  $i$  番目のセルの値を表し,  $a$  と  $\epsilon$  はそれぞれ局所的な非線形性とセル間の結合の強さを表している. つまり  $I$  を範囲とする値をとるセルが 1 次元格子の上に配置されており各セルは (1) 式によって両隣のセルに依存して時間発展するモデルを考えている. また時間発展は全セルが同期して一斉に行なう.

ここでモデル (1) の振舞いの分類 [3, 4] を手短に見ておく. 詳細は, 文献 [3, 4] を参照されたい.

### 静的な相

**FR** セル間の結合の強さ  $\epsilon$  を固定しておいて, ロジスティック写像の非線形性を表すパラメーター  $a$  の増加に伴って, いろいろな大きさの領域に分かれ, その中でカオス的な振舞いを示すようになる (図 1.a). このときに生じるそれぞれの領域の位置と大きさは初期値に依存し, それらは時間発展しても変化しない. 各セルは大きな領域ではカオス的であるが, 小さな領域では  $2^m$  周期 ( $m = 1, 2, 3$ ) である. この相は FR(frozen random) と呼ばれる.

**PS** さらに非線形性が大きくなると, 領域のサイズが限定されてしまう. この相を PS(pattern selection) という. 図 1.b では大きさが 1 と 2 の領域になっている. この時の  $a$  によれば本来ロジスティック写像はカオスを示すにも関わらず, 各セルのカオスは抑制されて短い周期になる.

### 臨界的な相

**BD**  $\epsilon \leq 0.2$  以下で非線形性がある範囲にある時は大きさが 1 の領域が選択されるが初期値によってところどころでこの領域が崩れた場所が生じ, しかもこの崩れの位置が時間発展につれてフラフラと移動する. この移動の様子がブラウン運動として記述できるので, これを BD(Brownian motion of defect) という (図 1.c). パターンの欠損 (崩れの位置) は 2 つがぶつかりとパターンとして整合性がとれ消滅する.

**DT** BD よりも非線形性がわずかに大きな範囲では, 欠損は 2 つ組で消滅するだけでなく生じるようになる. この相を DT(defect turbulence) という.

「複雑系の展望—複雑系若手の立場から」

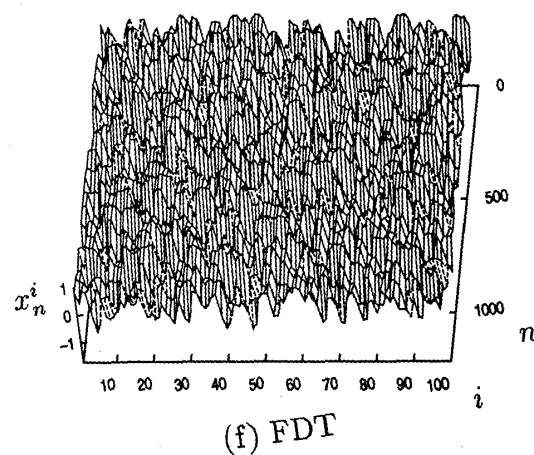
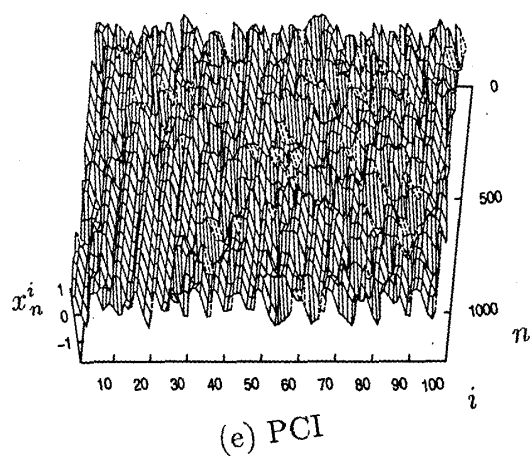
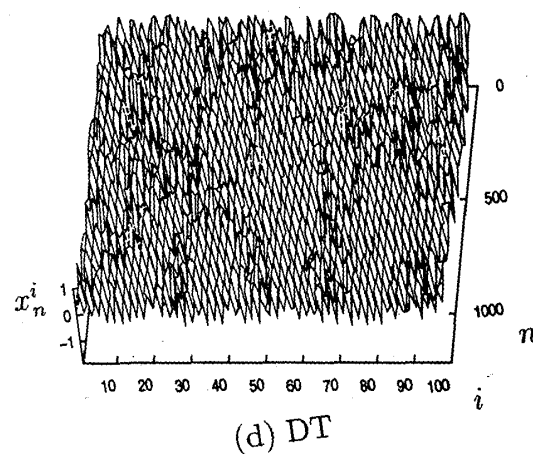
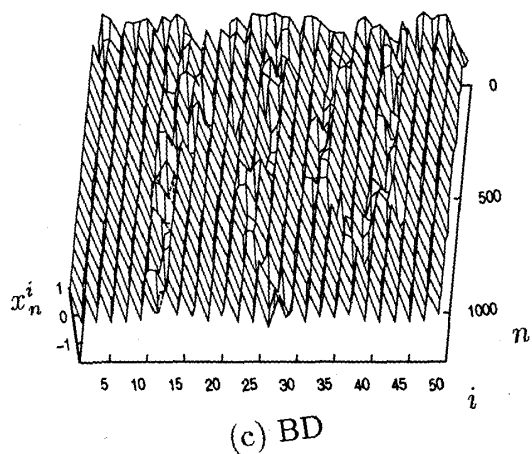
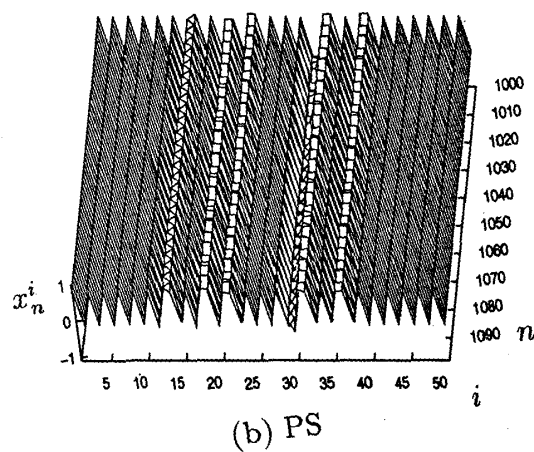
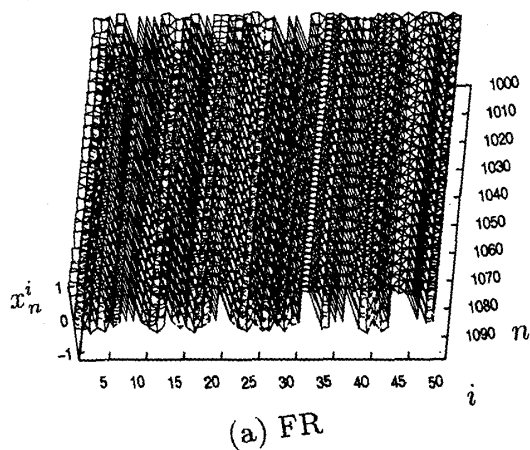


図 1: CML の典型的な振舞い. (a)-(b) は  $n = 2k + 1000, (k = 1, \dots, 50)$ , (c)-(f) は  $n = 64k, (k = 1, \dots, 20)$  に対する時間発展 ( $x_n^i$ ) を描いてある. いずれも初期値 ( $x_0^i$ ) はランダム. それぞれのパラメータの値およびセル数  $N$  は (a)  $a = 1.50, \epsilon = 0.1, N = 50$ , (b)  $a = 1.64, \epsilon = 0.1, N = 50$ , (c)  $a = 1.80, \epsilon = 0.1, N = 50$ , (d)  $a = 1.89, \epsilon = 0.1, N = 100$ , (e)  $a = 1.72, \epsilon = 0.3, N = 100$ , (f)  $a = 1.88, \epsilon = 0.3, N = 100$ .

PCI BD や DT を生じる場合よりも結合の強さが大きなところにはさまざまな大きさの領域がせめぎ合うようにして境界が変化する  $a$  の範囲がある. これを PCI(pattern competition intermittency) という.

### 発達した乱流

FDT DT や PCI の場合よりも非線形性が大きなところでは空間的な秩序構造は認められない. これを FDT(fully developed turbulence) という.

## 2 CML から CA への離散化による変換

計算機実験によって CML の挙動を数値的に追跡する場合, 計算機の内部では各セルの状態はすでに有限精度で表現されている. この観点からすれば CML は非常に大きな状態数を持つセルからなる CA とみなすことができる. ここでは, どの程度の状態数が CML の挙動を再現するのに必要なのかを知るために, 陽に離散化を行なう.

1 次元の CA は 2 つ組  $(Q, \delta)$  で定義される.  $Q = \{q_1, \dots, q_M\}$  は空でない集合で, その要素はセルの状態であり,  $\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$  は最近傍の状態から決まる局所的な時間発展を表す. 一方 CML は  $(I, f, \epsilon)$  で定義される. ここで  $f: I \rightarrow I$  は 1 節と同様にロジスティック写像とし,  $\epsilon$  は近傍からの寄与に相当する係数である.

さて与えられた CML  $(I, f, \epsilon)$  に対して, 離散化によって以下のように CA を構成する. 状態空間の変換は,  $Q \subset I$  となるように,  $q_1 = I_{\min}, q_M = I_{\max}$  とし, また  $i = 1, \dots, M-1$  に対しては  $q_i = q_{i-1} + (I_{\max} - I_{\min})/M$  とする. 局所規則  $f$  から  $\delta$  への変換は, 各  $(u, v, w) \in Q \times Q \times Q$  に対して  $\delta(u, v, w) = q$  とする. ただし  $q \in Q$  は,

$$q - \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2M} \leq (1 - \epsilon)f(v) + \frac{\epsilon}{2}\{f(u) + f(w)\} < q + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2M} \quad (2)$$

を満たすものとする.

状態数  $M$  としては  $2^\eta + 1$  で表されるものを選んだ. ここで整数  $\eta$  は精度を意味し, 計算機用語のビット数に対応する.

## 3 実験

CML の挙動の分類には軌道の粗視化が有効である [3, 4]. ここでの粗視化はロジスティック写像の不安定固定点  $x_* = (-1 + \sqrt{1 + 4a})/2a$  を用いて,

$$\sigma(q) = \begin{cases} 0 & (q \geq x_* \text{ のとき}) \\ 1 & (q < x_* \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

なる, 粗視化関数  $\sigma$  によって行なった. つまり, 軌道  $(x_n^i)_{i,n}$  そのものを見るのではなく粗視化された軌道  $(\sigma_n^i)_{i,n} = (\sigma(x_n^i))_{i,n}$  を見ることにする. また以下では, パターンの時間発展を図示する場合には  $q_n^i = 0$  を黒く,  $q_n^i = 1$  を白く描く. なお, この数値実験は  $x_n^0 = x_n^M$  という周期境界条件を用いている.

### 3.1 定性的な振舞い

精度  $\eta$  が十分高い場合は, CML から離散化して得られる CA はもとの CML と見た目に違いがない. では, 似た挙動をするには, どの程度の  $\eta$  が必要なのだろうか. 我々は実験によって  $\eta = 9$  で十分であることを確認した. この様子をいくつかの実験例によって示す.

CML (1) において,  $a = 1.8, \epsilon = 0.1$  では 1 節で述べたように大きさ 1 の領域のみが選択される. つまり, 各時刻  $n$  におけるスナップショットは  $(\sigma_n^i)_i = \dots 010101 \dots$  となる. 図 2 に, 精度の低下に伴う BD の崩壊の様子を示す.

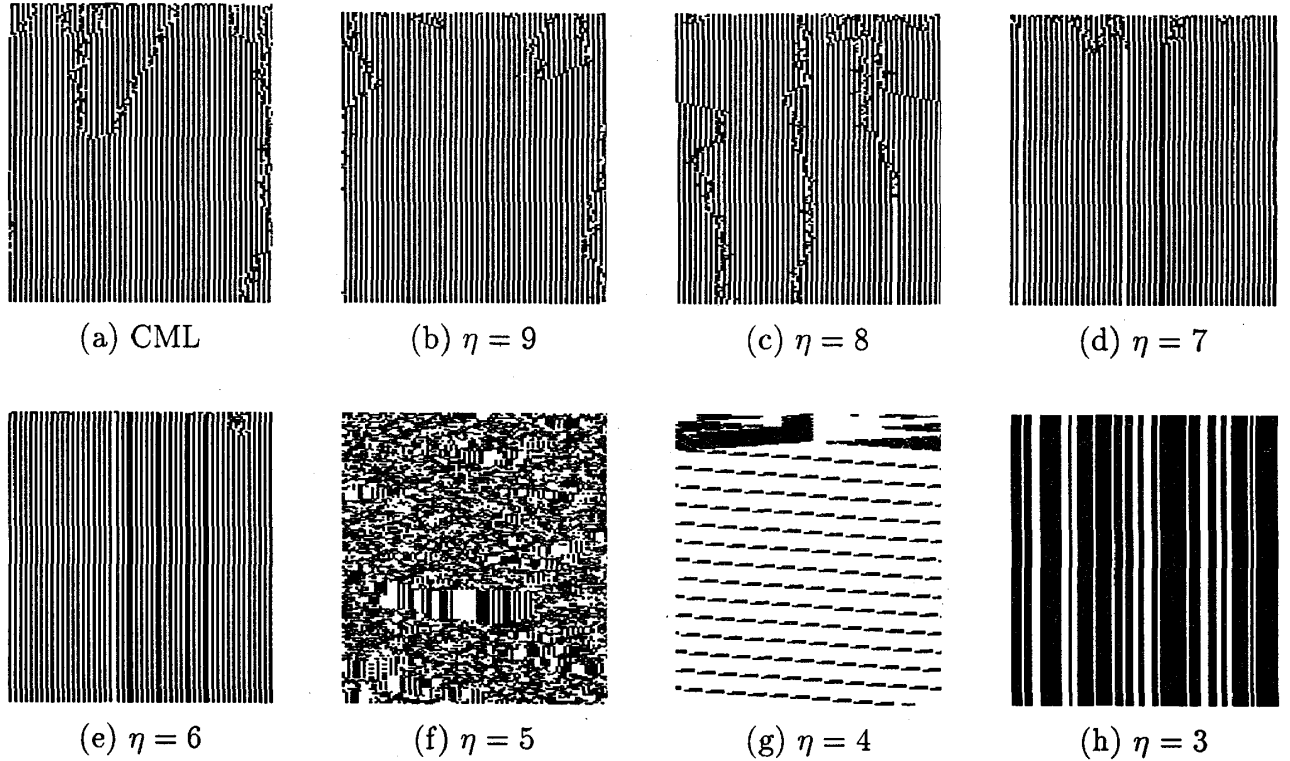


図 2: 精度  $\eta$  の低下に伴う BD の崩れ. 上から下に向かって 64 ステップごとに時刻  $n = 0$  から  $n = 200 \times 64$  まで描いてある. 水平方向にセル  $i$  の順に並べてある.  $a = 1.80, \epsilon = 0.1, N = 101$ . (a) CML (倍精度浮動小数点演算), (b)  $\eta = 9$ , (c)  $\eta = 8$ , (d)  $\eta = 7$ , (e)  $\eta = 6$ , (f)  $\eta = 5$ , (g)  $\eta = 4$ , (h)  $\eta = 3$ .

$\eta = 9$  (図 2.a) では, 上に述べた CML の挙動が再現されているのに対し,  $\eta = 8$  (図 2.b) では欠損が途中で運動をやめて, 局所に留まってしまっているのが分かる. これは本来の CML では不安定な “11” というサイズ 2 のパターンが安定化してしまっ

ているためによるものである。また、 $\eta = 7$  までは安定なパターンのサイズが 2 まででありそのため欠損の運動もある程度観測されるが、 $\eta = 6$  になるとサイズ 3 のものまで安定になってしまい、欠損の運動は長くは続かない。さらに  $\eta$  を下げると、もはや全く異なった挙動を示すようになる。

また同様に、PCI も 7 以下の  $\eta$  に対しては認められなくなる (図 3 参照)。BD より

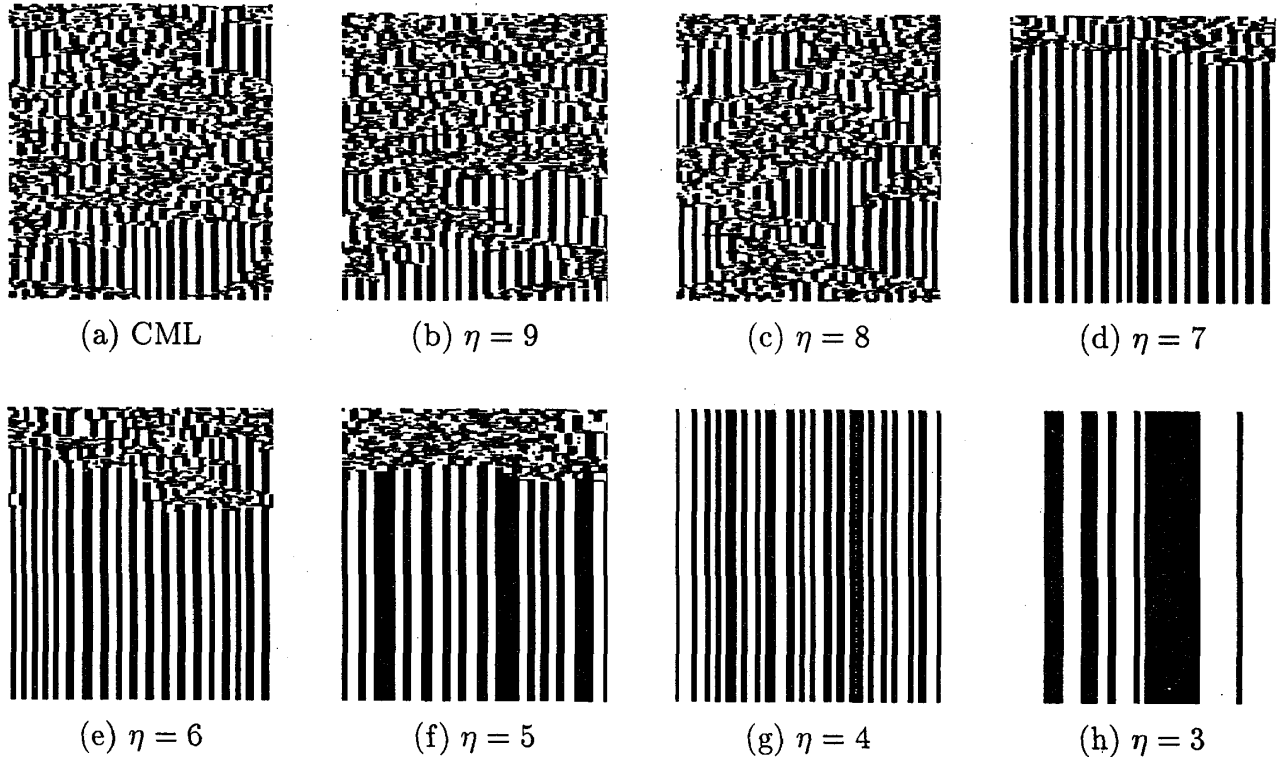


図 3: 精度  $\eta$  の低下に伴う PCI の崩れ.  $a = 1.72, \epsilon = 0.3, N = 101$ . (a) CML (倍精度浮動小数点演算), (b)  $\eta = 9$ , (c)  $\eta = 8$ , (d)  $\eta = 7$ , (e)  $\eta = 6$ , (f)  $\eta = 5$ , (g)  $\eta = 4$ , (h)  $\eta = 3$ .

も非線形性  $a$  が少し高いところに見られる DT も  $\eta$  の低下に伴い崩れていく。これら BD, DT, PCI の 3 相はいずれも  $\eta$  の低下とともに崩れていき、途中 PS に類似した相を経て最終的には  $\eta = 3$  で FR になってしまう。しかし、図 2 の (e) と (f) に見られるように、本来 CML には見られない相が出現することもあることを指摘しておく。

これらの相と比べ、FR や FDT といった相は精度の低下に対し比較的頑丈で、少なくとも  $\eta = 6$  までは認められる。

これらの結果を CA による CML の模倣の度合として表 2 にまとめた。

### 3.2 定量的な側面

CML には、Kaneko によりいくつかの統計量 [4] が導入されており、挙動の分類にはそれらが用いられている。ここでは CA による模倣の度合を定量的に評価する

表 2: 離散化の精度と挙動の定性的な関係. 星の数はもとの挙動 (浮動小数点演算の場合) に対する度合の度合を表す. 模倣の度合の欄に現れる “PS” や “FR” は, もとの相が PS や FR に変化していることを表し, ダッシュ(“—”) はその精度での挙動が分類できないことを表す.

| 本来の挙動 |     | 精度 $\eta$ での模倣の度合い |    |    |    |    |    |    |
|-------|-----|--------------------|----|----|----|----|----|----|
|       |     | 9                  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  |
| 静的な相  | FR  | ★★                 | ★★ | ★★ | ★★ | ★★ | ★★ | ★★ |
|       | PS  | ★★                 | ★★ | ★★ | *  | *  | —  | FR |
| 臨界的な相 | BD  | ★★                 | *  | PS | PS | —  | —  | FR |
|       | DT  | ★★                 | *  | PS | PS | —  | —  | FR |
|       | PCI | ★★                 | ★★ | PS | PS | —  | —  | FR |
| 乱流的な相 | FDT | ★★                 | ★★ | ★★ | ★★ | *  | —  | FR |

ために, パターンエントロピーと動的エントロピーという2つの統計量 [4] を離散化した CA の挙動に対して求めた.

測定する量は粗視化した状態の時間発展  $(\sigma_n^i)_{i,n}$  を用いて算出した. これらの量は各時刻  $n$  におけるスナップショット  $(\sigma_n^i)_i$  中で連続する同じ記号の長さをもとにしている. これをパターンの長さと呼ぶ. 例えばある列 “000110” には長さ3の ‘0’ によるパターンと長さ2の ‘1’ によるパターンと長さ1の ‘0’ によるパターンからなっている. さてパターン分布  $Q(k)$  とは次のように定義される [4]. ある時刻における長さ  $k$  のパターンの個数を数えセル数  $N$  で割り, さらに長時間平均をとったものである. すなわち  $Q(k)$  各セルが長さ  $k$  のパターンに属している確率を表す. これはいわば静的な指標である. またパターン間の遷移確率  $T(k|j)$  はパターンダイナミクスに対して次のように定義される. ある時刻で長さ  $j$  のパターンに属しているセル  $i$  が, しばらく経った後 (我々は8ステップ後とした) 属しているパターンの長さが  $k$  である条件つき確率を  $T(k|j)$  とする.

以上の  $Q(j)$  と  $T(k|j)$  を用いて2つの統計量, パターンエントロピー  $S_p$  と動的エントロピー  $S_d$  を定義する. これらの量の物理的な意味は文献 [4] を参照されたい.

$$S_p = - \sum_j Q(j) \ln Q(j) \quad (4)$$

$$S_d = - \sum_{j,k} Q(j) T(k|j) \ln T(k|j) \quad (5)$$

図4と図5に,  $\epsilon = 0.1$  で求めた  $Q(j)$  と  $S_p, S_d$  をそれぞれ示す. 例えば,  $1.78 < a < 1.85, \epsilon = 0.1$  で見られる BD では, パターンエントロピーは非常に小さい ( $S_p \ll 1$ ). しかし, 離散化の精度  $\eta$  の低下に伴い, 長さ2のパターンも選択されるようになり (図4.cの “+”), 結果としてパターンエントロピーも大きくなる (図5.c). 図4の (a)

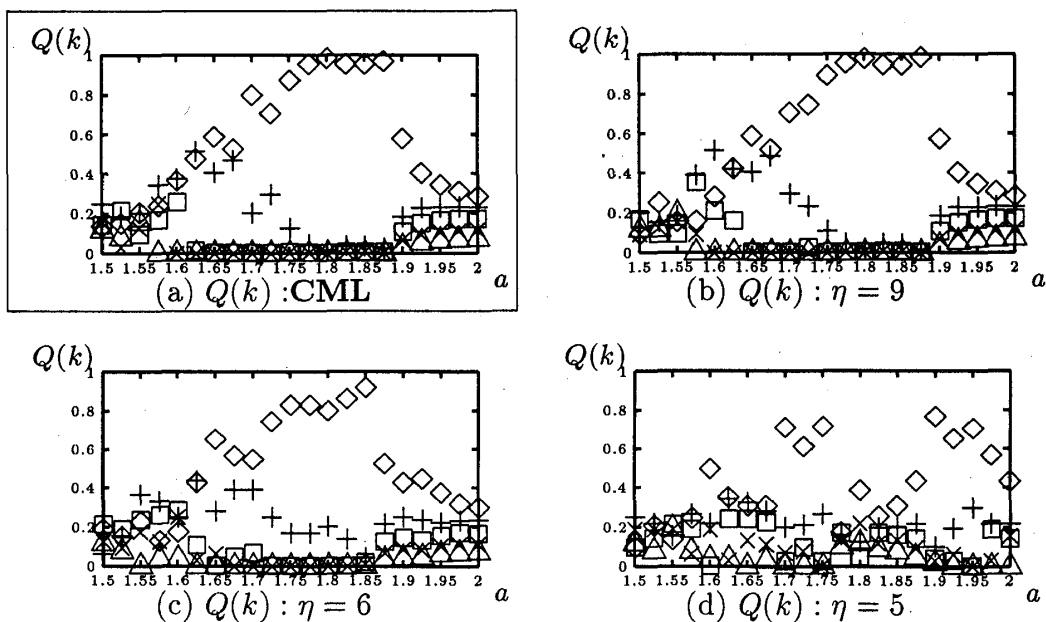


図 4: パターン分布  $Q(k)$ . いずれも横軸は  $a$ , 縦軸は  $Q(k)$  で,  $k = 1, \dots, 5$  に対する  $Q(k)$  の値を描いてある ( $Q(1) : \diamond$ ,  $Q(2) : +$ ,  $Q(3) : \square$ ,  $Q(4) : \times$ ,  $Q(5) : \triangle$ ).  $\epsilon = 0.10$ . 枠で囲った図 (a) は CML の  $Q(k)$ , 他は精度を変えて離散化した CA の  $Q(k)$  でそれぞれの精度は, (b)  $\eta = 9$ , (c)  $\eta = 6$ , (d)  $\eta = 5$ .

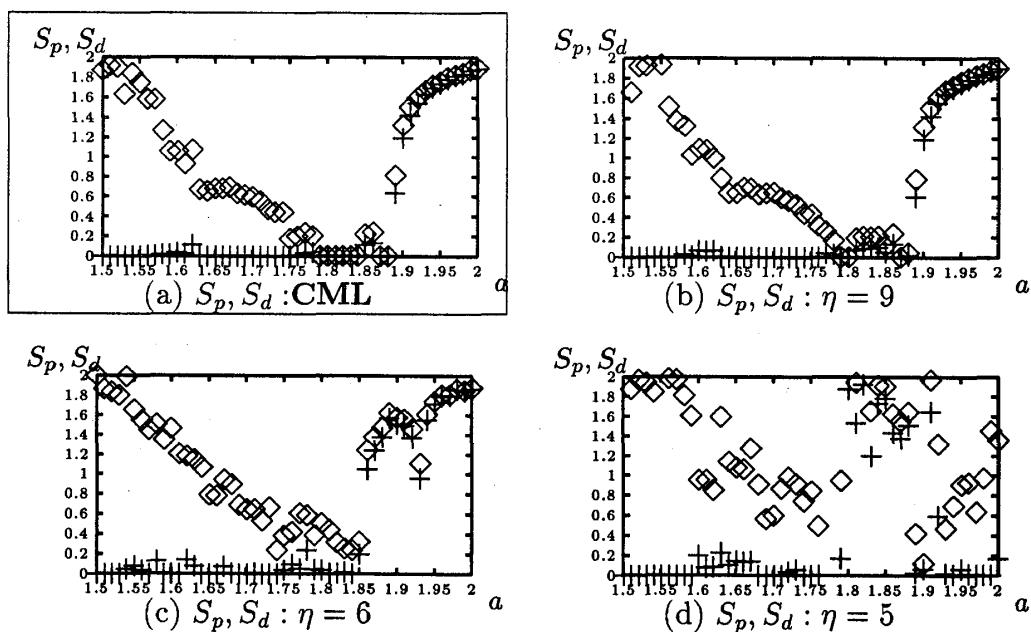


図 5: パターンエントロピー  $S_p$  ( $\diamond$ ) と動的エントロピー  $S_d$  (+). 枠で囲った図 (a) は CML の  $S_p$  と  $S_d$  で, 他は精度を変えて離散化した CA のもの. それぞれの精度は (b)  $\eta = 9$ , (c)  $\eta = 6$ , (d)  $\eta = 5$ .

と (c) を比較して分かるように  $\eta = 6$  においては DT 相は  $a$  の増加に対して早く ( $a = 1.86$  付近) FDT に移行する。

また  $(\sigma_n^i)_{i,n}$  を直接目で観察しても分からないが、FDT では、パターンダイナミクスの多様性が相対的に減少してしまう箇所がある (図 5.c の  $a = 1.93$  付近). けれども FR, PS, FDT は精度の低下に対しても  $\eta \geq 6$  ではおおむね保存されており、これは目視による定性的な観察と一致する.  $\eta = 5$  では、図 4.5 の (c) に示されるように CML の特徴は完全に失われてしまい、 $S_d$  が広い範囲にわたってほぼ 0 であり、この時のパターン分布  $Q(5)$  に注目すれば FR または PS になっていることが分かる。

以上の実験をまとめると、粗視化した時系列  $(\sigma_n^i)_{i,n}$  を再現するために十分な状態数は  $2^9$  であると結論される。

## 4 $\eta$ の既約性

前節までで、 $2^9$  状態の CA によって CML を模倣できることを示した. この節ではこの  $2^9$  状態の CA とパターン生成器として等価なものを構成し、そのうちで状態数が最小なものをもめることで、CML を模倣する CA の既約性を評価する. その結果、ある精度  $\eta$  のもとで離散化を行なった後では、その CA と同じ  $\sigma$  列を出力をするものは  $\eta - 1$  以下の精度では表現できないことが示される。

このことを示すためには Myhill-Nerode の定理 [5, 6] によって与えられるオートマトンの最小化手続きを用いる. この手続きは等価なオートマトンのうち最小なものを得る目的で、CA の研究でも比較的良好に用いられるテクニックなので [7, 8], 簡単に解説する。

2 節では、1 次元の CA を  $(Q, \delta)$  によって与えたがこのままでは、状態を減らすことができない. そこで  $\sigma$  列を観察することを考慮して、 $(Q, \delta)$  をもとに CAO (CA with observation) を以下のように構成する. 以下の構成は各セルが近傍からの入力 (メッセージ) に対して状態に応じた出力 (メッセージと観測値) を返すという機械的な観点を具体化したものである. なお、以下では集合  $X$  の 0 個以上の有限個の並び ( $X$  をアルファベットとする有限の長さの語) 全体からなる集合を  $X^*$  で表す. また集合  $X^*$  には  $X$  の要素の 0 個の並び (空語)  $\varepsilon$  が常に含まれているとする。

CAO は 6 つ組  $C = (Q, \Gamma, \Sigma, \tilde{\delta}, \gamma, \sigma)$  で与えられる. ここで、各成分の意味は次の通り:  $Q$  は、状態の集合である.  $\Gamma$  は、時間発展の際に近接セル間でやりとりされる記号の集合で、その要素をメッセージと呼び、ここでは単純に  $\Gamma = Q$  とした.  $\Sigma$  は、粗視化して観測される記号の集合 ( $= \{0, 1\}$ ) である.  $\tilde{\delta}: Q \times (\Gamma \times \Gamma)^* \rightarrow Q$  は局所規則である. ただし、 $\tilde{\delta}$  は次の関係を満たす:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(q, \varepsilon) &= q & q \in Q \\ \tilde{\delta}(q, ax) &= \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(q, a), x) & q \in Q, a \in \Gamma \times \Gamma, x \in (\Gamma \times \Gamma)^* \end{aligned} \quad (6)$$

(ここで  $x$  として空語  $\varepsilon$  も許されていることを注意しておく. この点が 2 節の  $\delta$  ともっとも異なる点である).  $\gamma: Q \rightarrow \Gamma$  は、ある状態の時に近接セルに発するメッセージを与える規則で、 $\Gamma$  の選び方に対応してここでは  $\gamma$  を恒等写像とした. そし

て  $\sigma: Q \rightarrow \Sigma$  はある状態に対する粗視化された観測を与える規則であり、これは 3 節で与えた (3) 式に従うものとした。

次に  $\Gamma, Q, C$  の上の同値関係をそれぞれ定義する。ふたつのメッセージ  $a, b \in \Gamma$  が同値である (これを  $a \equiv_{\Gamma} b$  と書く) とは、 $\tilde{\delta}(q, (a, x)) = \tilde{\delta}(q, (b, x))$  と  $\tilde{\delta}(q, (x, a)) = \tilde{\delta}(q, (x, b))$  が任意の  $q \in Q, x \in \Gamma$  に対して成り立っていることをいう。ふたつの状態  $p, q \in Q$  が同値である ( $p \equiv_Q q$ ) とは、 $\gamma(\tilde{\delta}(p, x)) = \gamma(\tilde{\delta}(q, x))$  と  $\sigma(\tilde{\delta}(p, x)) = \sigma(\tilde{\delta}(q, x))$  が任意の  $x \in (\Gamma \times \Gamma)^*$  に対して成り立っていることをいう。また、 $p \equiv_Q^k q$  とは、長さが  $k$  以下のすべてのメッセージ  $x \in \bigcup_{l=0}^k (\Gamma \times \Gamma)^l$  に対して  $\gamma(\tilde{\delta}(p, x)) \equiv_{\Gamma} \gamma(\tilde{\delta}(q, x))$  が成り立っていることをいう。言い替えれば、 $p \equiv_Q^k q$  とは  $p$  と  $q$  が長さ  $k$  以下の入力に対しては常に同じメッセージを出力することを表す。そしてふたつの CAO  $C = (Q, \Gamma, \Sigma, \tilde{\delta}, \gamma, \sigma)$  と  $C' = (Q', \Gamma, \Sigma, \tilde{\delta}', \gamma', \sigma')$  が同値である ( $C \equiv C'$ ) とは、任意の  $q \in Q'$  に対して  $p \equiv_Q q$  が成り立つような  $p \in Q$  が存在し、かつ逆に任意の  $p \in Q$  に対して  $q \in Q'$  が存在して  $p \equiv_Q q$  が成り立つことをいう。

このとき最小化とは、 $Q$  から同値類による分割、すなわち  $Q' = Q/\equiv_Q$  なる  $Q'$  を導くことにはかならないことが Myhill-Nerode の定理の証明を用いて示される。具体的には次のような帰納的な手順として Min 1-3 に書き下すことができる：

**Min 1**  $Q$  を商集合  $Q/\equiv_Q^0$  に分割する。定義より  $\gamma(p) \equiv_{\Gamma} \gamma(q)$  と  $\sigma(p) = \sigma(q)$  をすべての対  $p, q \in Q$  について調べれば良い。

**Min 2**  $p \equiv_Q^k q$  である  $p, q$  のうち任意の  $a \in \Gamma$  に対して  $\tilde{\delta}(p, a) \equiv_Q^k \tilde{\delta}(p, a)$  が成り立つものだけを新たな同値類として、これによって  $\equiv_Q^k$  から細分されてできる同値類を  $\equiv_Q^{k+1}$  とする。

**Min 3** 手順 2 を  $Q/\equiv_Q^k = Q/\equiv_Q^{k+1}$  になるまで繰り返す。

Min の各段階で規則なども作り直さなければならないので、与えられた CAO  $C = (Q, \Gamma, \Sigma, \tilde{\delta}, \gamma, \sigma)$  と同値で最小な CAO  $C' = (Q', \Gamma, \Sigma, \tilde{\delta}', \gamma', \sigma')$  は最終的に  $Q' = \Gamma^*Q/\equiv_Q$ ,  $\tilde{\delta}([p], a) = [\tilde{\delta}(p, a)]$ ,  $\gamma([p], a) = \gamma(p, a)$ ,  $\sigma'([p]) = \sigma(p)$  とし、Min の各段階でも適宜更新していくものとする。ただし、ここで  $[p] \in Q/\equiv_Q$  は  $p \in Q$  を代表元とする同値類を表す。手続き Min が最小な CAO を与えることことの証明は文献 [6, 9] を参照されたい (厳密に言えば手続き Min は、Mealey 機械 [5] の最小化アルゴリズムと呼ぶべきである)。

さて上記の手続きに従って、実際に CML を  $\eta \leq 9$  で離散化して作ったいくつかの CAO に手続き Min を適用したところ次のような観察結果を得た。

**観察 1**  $p, q \in Q \subset I$  が同値なら、 $p = -q$  かつ  $|p|, |q| \leq x_*$ 。

**観察 2**  $q = 0$  とその近傍を除いて、どの  $q \in Q$  についても  $[q]$  の要素は高々 2 である。

これらの結果はロジスティック写像の性質から容易に説明される [9]。

またこの結果から分かるように、最小化手続きによる状態の圧縮率  $r = |Q'|/|Q|$  の下限  $r_{\text{inf}}$  は、次の式で評価される:

$$\begin{aligned} r &\geq r_{\text{inf}} \\ &= \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}} - x_*}{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}} \\ &= \frac{1 - 2a - \sqrt{1 + 4a}}{4a} \end{aligned}$$

ここで、 $a \leq 2.0$  より

$$r_{\text{inf}} \geq 0.75 \quad (7)$$

を得る。これはすなわち一度離散化した CML と同値な CA を完全に模倣するには少なくとも 0.75 倍の状態数が必要なので、 $\eta \approx \log_2 |Q|$  より離散化によって得られる CA は精度  $\eta$  に関して既約であるといえる。

## 5 議論

本稿では CML を離散化して得られる CA に必要な状態数を調べた。計算機実験により高々  $2^9$  状態の CA で CML が模倣されることを確認した。また静的な相と乱流的な相との中間に位置する相は他の相に比べ多くの状態数を必要とする。さらに、離散化によって得られる CA はその状態数の対数表現  $\eta$  に関して既約であることをオートマトンの最小化の技法によって示した。

上述の結果はあくまで粗視的な観測  $(\sigma_n^i)_{i,n}$  とそれに基づく統計量に関するものであることに注意しなければならない。粗視化された時系列を模倣することを目標とすることで状態数の最小化を実行できたが、その反面、どのような粗視化規則を選択するかによって必要な最小状態数が決定されるといえる。そのためある粗視的観測のもとで挙動を模倣するのに必要な状態数が示唆するものと、その粗視化の正当性は別の問題として考えなければならない。

また CA を用いた表現によってパターンダイナミクスに潜在する並列計算あるいは情報処理がどのように見いだされるかは今のところ明らかではない。

そこで、これらの問題に関連した研究を紹介しながら現時点で可能な解決策を以下で検討していく。

### 必要な状態数の示唆するものと粗視化の限界

粗視化によって CA が CML を模倣するという方法がとれたが、CA による記述は注目する性質によっては特別な取り扱いを可能にする。例えば、ここで示したように、等価なものの中でもっとも記述量が少なくて済むものを求めることができる。このように記述量に注目してモデルを特徴づけることは、計算量の理論と関連して複雑さの定義の候補として考えられている。ここで示した結果のうち臨界的な相を

再現するには他の相に比べ多くの状態数が必要だということはいわゆるカオスの縁 [10, 11] と何らかの関係があるのかも知れない。つまり臨界的な相は豊かな情報処理能力を潜在的に持っている可能性があるという考えである。

もっとも別の考え方も可能である。ここでの取り扱いは  $\sigma$  という粗視化規則に依拠したが、これは CML の中程度の非線形性での領域を抽出するのに適していたからであった。しかし、この粗視化では強い非線形性での挙動をうまく取り扱えていない可能性がある。実際 3.2 節で指摘したように本来の FDT には見られないエントロピーの落ち込みも起こっている。このことから  $\sigma$  のような単純な規則では、乱流のような秩序構造が顕在していないものに対してその系列の文法的な特徴を取り出すことができず、統計的な性質しか認識していない。

このように自明でない領域を見落したために分類に失敗してしまうといった危険を回避するのは困難ではある。実際、我々の実験結果についても別の粗視化をもとにした場合必要な状態数としてことなる結果が得られる可能性は十分ありうる。

## 系の挙動に即した粗視化をどうやって得るか

このような問題に対して、自明でない粗視化規則を発見する手段が近年 CA に関して発達しているので簡単に紹介する。

Grassberger[12] は Rule 18 の CA(CA 18 と呼ぶ)において、CA という決定論的な規則であるにも関わらず確率的な拡散と見られる現象が存在することを指摘した。CA 18 はランダムな初期条件から始めると時間発展でたくさんの三角形を生じるもので、Wolfram の分類でいえばクラス III の典型例である。ある規則にしたがって各時刻毎にセルに印をつけると、この印を付けられたセルの固まりはちょうど CML の BD のようにフラフラと動き回り他の固まりとぶつかると印が消えるように見える。

Jen[13] はこの印づけの規則を一般化し、非線形な CA を線形な CA と可換にする変換を開発した。これにより、代数的手法を非線形な CA に適応することを可能になり、例えば CA 18 や CA 126 のような非線形な CA を CA 90 という線形な CA で完全に模倣することでそれらの周期解を求める方法を示している。

また Hanson ら [8] および Cratchfield ら [14] は、同様の変換を言語理論的に調べ、CA 18 の相空間におけるアトラクターの吸引領域 (basin) の構造を明らかにした。以上の扱いは 2 状態 1 近傍のいわゆる ECA(elementary CA) についてのみであったが、さらに Cratchfield ら [15] はこの技法を 2 状態 2 近傍の CA 2614700074 に応用した。これまで見てきた CML の欠損や CA 18 の印づけによると、欠損や印はある時刻のセルをそれぞれ 2 つの領域に分割し、領域は 1 種類しかない。しかし Cratchfield らの場合は 2 種類の領域を構成した。これは特徴を保存しつつ粗視化する“自明でない”粗視化規則の例である。このため適切な粗視化のもとで大域的状態の分類ができ、今後空間時間的な構造の詳細な研究が期待できる。

CML から離散化して得た我々の CA に関しては現在のところ解決していない。

## 計算機実験そのものに関する問題

ところで流体などのシミュレーションによる研究は近年の計算機の機能向上および価格低下によりシミュレーションそのものは高速かつ安価に行なえるようになっているが、実験結果を吟味する段階においては高速にシミュレートできる分だけデータが増大し処理時間がますますかかるという一見矛盾した様相を呈していると聞く。上に述べた粗視化の問題についても同様で実のところ  $2^Q$  の状態に対しては遷移規則の解析に非常に時間がかかる。例えば最小化の計算コストは状態数  $|Q|$  に対し  $O(|Q|^2)$  なので大量に行なうのはかなり難しい。また挙動の言語的特徴を発見するのはさらに困難である。その意味で、今後、計算量に密着した統計的推論の理論の建設と実用化が望まれる。参考までに計算論的学習 ([16, 17, 18] など) をその候補として挙げておく。

## 力学系による計算

最後に力学系と計算の関わりについて若干述べたい。CA は Conway のライフゲーム [19] に見られるように原理的に Turing 機械を模倣することができる計算万能なクラスを含む。Moore[20] によって示されたように、3次元の連続力学系でも同じく Turing 機械を埋め込むことができる。力学を計算するという観点から Blum[21] らは計算の定義を実数上に拡大した。これらの扱いは計算を実行する機械の表現方法に基づいているもので、いわば“統語的な”アプローチといえる。これらの方法で計算可能な関数と力学系による表現のクラスとの関係が示されてきたが、力学系が持つ情報処理をより深く論ずるためには、さらに情報処理の内容を具体的に記述する必要もあり、そのために“意味論的な”理論も要求される。この分野の研究としては、Hayashi[22] に始まる“領域理論 [23] を通しての力学系研究”がごく最近 Edalat[24] によって基礎づけられている。このアイデアを応用すれば力学系のアトラクターと帰納的関数 [6] やプログラミング言語のモデル [25] とのアナロジーが関数空間の不動点として示される。すなわち“力学系の意味論”という新たな方向性が示唆され前述の Blum らによる実数上の計算 [21] との関わりなどは特に興味深い問題である。また CA の力学的な大域的構造の発見技法 [8, 14] と合わせて考えることで、パターンダイナミクスや大自由度力学系に潜在する情報処理を解釈するための契機になる可能性も大いにある。

## 参考文献

- [1] S. Wolfram eds., Theory and applications of cellular automata, World Scientific (1986).
- [2] H.A. Gutowitz ed., Cellular automata: theory and experiment, Proc. of a workshop sponsored by the center for nonlinear studies Los Alamos National Laboratory, *Physica D* 45 (1990).

- [3] K. Kaneko, The coupled map lattice: introduction, phenomenology, Lyapunov analysis, thermodynamics and applications, in Theory and applications of coupled map lattices, K. Kaneko ed., John Wiley & Sons (1993).
- [4] K. Kaneko, *Physica D* 34 (1989) 1.
- [5] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1979). (邦訳. 野崎昭弘, 高橋正子, 町田元, 山崎秀記訳, オートマトン・言語理論・計算論 I, サイエンス社 (1984)).
- [6] 有川 節男, 宮野 悟, オートマトンと計算可能性, 培風館 (1986).
- [7] S. Wolfram, *Commun. Math. Phys.* 96, (1984) 15-57.
- [8] J.E. Hanson and J.P. Crutchfield, *J. Stat. Phys.* 66 (1992) 1415-1462.
- [9] K. Goto, A. Yamaguchi and I. Tsuda. (1995) *preprint*.
- [10] C.G. Langton, Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation, in Emergent Computation, S. Forrest ed., North-Holland (1990).
- [11] J.P. Crutchfield, *Physica D* 75 (1994) 11-54.
- [12] P. Grassberger, *Physica 10D* (1984) 52-57.
- [13] E. Jen, *Nonlinearity* 4 (1990) 251-276.
- [14] J.P. Crutchfield and J.E. Hanson, *Chaos* 3 (1992) 215-224.
- [15] J.P. Crutchfield and J.E. Hanson, *Physica D* 69 (1993) 279-301.
- [16] B. Natarajan, Machine Learning, Morgan Kaufmann (1991)
- [17] S. Doshita, K. Furukawa, T. Nishida, Preceedings of the third workshop on Algorithmic Learning Theory (ALT'92), Japanese society for artificial Intelligence (1992).
- [18] 安西 祐一郎, 認識と学習, 岩波講座ソフトウェア科学 16, 岩波書店 (1989)
- [19] E. Berlekamp, J.H. Conway and R. Guy, Winning Ways for your Mathematical Plays, Academic press (1982)
- [20] C. Moore. *Nonlinearity* 4 (1991) 199-230  
*Phys. Rev. Lett.* 64 (1990)
- [21] L. Blum, M. Shub and S. Smale, *Bull. of AMS* 21 (1989) 1
- [22] S. Hayashi, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 21 (1985) 1059-1066
- [23] S. Abramsky and A. Jung, Domain theory, in Handbook of logic in computer science, Vol. 3, S. Abramsky, D.M. Gabbay and T.S.E. Maibaum, eds., Clarendon Oxford (1994).
- [24] A. Edalat, *Info. and Comp.* 120 (1995) 32-48
- [25] 横内寛文, プログラム意味論, 情報数学講座 7, 共立 (1994)