

双極子磁場が作用する球殻中に発生する熱対流

京大・理 荒木圭典 (Keisuke Araki)

同志社・工 小川 泉 (Izumi Ogawa)

同志社・工 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1 はじめに

球殻中の流体運動は、地球物理学、宇宙物理学そして工学における興味から、現在精力的に研究が進められている。その中で、球殻中の熱対流運動は、地球大気の大規模運動、地球内部のマントルにおける対流運動、地球および天体の磁場の維持機構である磁気ダイナモの研究等と深い関わりを持ち、近年の計算機の急速な発達とともにその研究内容も幅広いものとなってきた。

これらの研究において、電磁流体の運動等によって誘起される大規模磁場の発生すなわちダイナモ効果は、流体力学的基礎研究の重要なテーマの一つである¹⁾。ダイナモ効果に関する研究は、異なる分野間の交流によって新しい展開が生じた一例として重要であると言える。

球殻中の熱対流運動に対する双極子磁場の効果に関する研究は、このダイナモ効果の研究の第一歩であり重要な位置づけにある。

このような流体運動を支配する物理的過程を調べるためには、対象となる流体運動の適切なモデル化が重要である。このような流体運動の研究では、ブシネスク近似および電磁流体近似 (MHD 近似) が用いられる。これらの近似において、熱対流運動に対する外部磁場の効果は、速度場の運動方程式中のローレンツ力項および磁場の誘導方程式中の熱対流運動による誘導磁場の項として基礎方程式に組み込まれる。したがって、双極子磁場は、磁場が無いときの熱対流運動と比較して、熱対流運動にどのような影響を及ぼすのかという点がここで調べようとする中心テーマである。

本研究では、双極子磁場が作用する球殻中に満たされた MHD 流体を内殻から熱したときの安定性を数値的に調べた。特に、双極子磁場の熱対流系に及ぼす効果を、臨界レイリー数に対する双極子磁場の効果、および熱対流パターンに対する双極子磁場の効果の 2 点を中心に調べた。

2 基礎方程式および境界条件

半径がそれぞれ r_1 と $r_1 + d$ の同心二重球殻中に満たされた MHD 流体の運動を考える。座標系は、原点を球殻の中心とする球座標 (r, ϑ, φ) を用いる (図 1 参

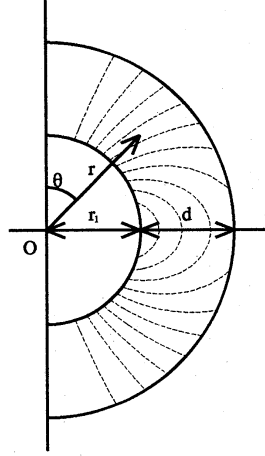


図 1: 系の概念図。点線は双極子磁場。

照)。内殻と外殻はそれぞれ一定温度 $T_0 + \Delta T$ 、 T_0 に保たれている。内殻内部は密度 ρ_0 の物質で満たされており、その中心に磁気双極子が存在する。MHD 流体の性質は一様であると仮定し、その平均密度を ρ 、熱膨張率を α 、熱拡散係数を κ 、動粘性係数を ν 、電気伝導度を σ 、透磁率を μ とする。この MHD 流体には、球殻の中心向きに次式で表される重力がかかっている。

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g_0 \frac{r_1^2}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{r}$ は半径方向のベクトル、 $r = |\mathbf{r}|$ 、 g_0 は内殻表面での重力加速度である。

MHD 流体には、内部発熱が無いと仮定する。このとき、境界条件を満たす平衡温度場は球対称であり、次式で与えられる。

$$T(r) = T_0 + \Delta T \frac{r_1}{d} \left(\frac{r_1 + d}{r} - 1 \right). \quad (2)$$

内殻の中心には磁気双極子モーメント M の磁気双極子が存在し、MHD 流体にはこの双極子によって誘起される双極子磁場が作用している。透磁率は全空間で一定値 μ をもち、この磁場による永久磁化は生じないと仮定する。このとき、磁束密度 $\mathbf{B}$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{B} = \left(\frac{2M \cos \vartheta}{r^3}, \frac{M \sin \vartheta}{r^3}, 0 \right). \quad (3)$$

次に、長さ、時間、温度、圧力、磁束密度の代表的なスケールとしてそれぞれ d 、 d^2/κ 、 ΔT 、 $\rho\kappa^2/d^2$ 、 M/d^3 を用いて、各物理量を無次元化する。このとき、系

を支配する無次元化パラメータは、アスペクト比 $R = r_1/d$ 、Rayleigh 数 $Ra = \alpha g_0 \Delta T d^3 / \kappa \nu$ 、Prandtl 数 $P_1 = \nu / \kappa$ 、磁気 Prandtl 数 $P_2 = \sigma \mu \nu$ 、Chandrasekhar 数 $Q = \sigma M^2 / \rho \nu d^4$ である。Bousinesq 近似の下で、速度場の攪乱 $\mathbf{u}$ 、温度の攪乱 Θ 、磁束密度の攪乱 $\mathbf{b}$ を支配する線形化された MHD 方程式は、

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - Ra P_1 \gamma(r) \Theta \mathbf{r} + P_1 \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{Q P_1^2}{P_2} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B}], \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \frac{P_1}{P_2} \nabla^2 \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \tau(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \Theta, \quad (8)$$

ここで、 $\gamma(r)$ 、 $\tau(r)$ は

$$\gamma(r) = \frac{R^2}{r^3}, \quad \tau(r) = \frac{R(R+1)}{r^3} \quad (9)$$

で定義され、 p は圧力の攪乱である。本研究において、攪乱の境界条件は簡単のため次のようにとった。

$$r = R, R+1 \text{ において } \mathbf{u} = \mathbf{b} = 0, \Theta = 0. \quad (10)$$

この研究では、攪乱の場が軸対称であると仮定する。このとき、 $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{b}$ は流れ関数 $\psi(r, \vartheta, t)$ 、 $\omega(r, \vartheta, t)$ 、 $\xi(r, \vartheta, t)$ 、 $\eta(r, \vartheta, t)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\omega}{r \sin \vartheta} \right), \\ \mathbf{b} &= \left(\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \frac{\eta}{r \sin \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

と表すことができる。(11) 式で表される $\mathbf{u}$ 、 $\mathbf{b}$ は連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ を自動的に満たす。 $r = R, R+1$ における変数 ψ 、 ω 、 ξ 、 η 、 Θ に対する境界条件 (10) は、

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega = \xi = \frac{\partial \xi}{\partial r} = \eta = \Theta = 0 \quad (12)$$

によって与えられる。 ψ 、 Θ 、 ξ の式と、 ω 、 η の式は互いに独立しており、MHD 流体の線形安定性を調べるため、 ψ 、 Θ 、 ξ に関する方程式のみを連立して解けばよいことが容易に示される。

3 数値解析

変数 ψ, ξ, Θ を次のように関数展開する。

$$\begin{aligned}\psi(r, \vartheta) &= \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \psi_{ml} G_m(r) \hat{P}_{l+1}(\cos \vartheta), \\ \xi(r, \vartheta) &= \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \xi_{ml} G_m(r) \hat{P}_{l+1}(\cos \vartheta), \\ \Theta(r, \vartheta) &= \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \Theta_{ml} F_m(r) P_l(\cos \vartheta).\end{aligned}\tag{13}$$

ここで L, M はそれぞれ r, ϑ 方向の展開打ち切り項数。展開関数 $F_m(r), G_m(r)$ は、 m 次の Chebyshev 多項式 $T_m(x)$ ($x \in [-1, 1]$) を用いて、

$$F_m(r) = (1 - x^2) T_m(x), \quad G_m(r) = (1 - x^2)^2 T_m(x), \quad \text{ただし } r = \frac{x+1}{2} + R \tag{14}$$

で定義され、各 m 毎に境界条件 (12) を満たしている。また $\hat{P}_l(\cos \vartheta)$ は l 次の Legendre 関数 $P_l(\cos \vartheta)$ を用いて次式で定義される。

$$\hat{P}_l(\cos \vartheta) = \sin \vartheta \frac{\partial P_l}{\partial \vartheta}(\cos \vartheta). \tag{15}$$

行列の固有値・固有ベクトルの計算には二重 QR 法および Newton-Raphson 法を用いて解いた。打ち切り項数の最大値は、 $(M, L) = (30, 30)$ である。

静止状態のまわりでの線形安定性解析において、赤道に関して対称な攪乱と反対称な攪乱は、それぞれ独立に取り扱うことができる。

本研究では、 ϑ 方向の攪乱の振舞いを評価するために、速度場の半径方向成分 u_r のパワースペクトル $E_l(u_r)$ を導入する。

$$\begin{aligned}E(u_r) &= \iiint \|u_r(r, \vartheta)\|^2 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \\ &= \sum_{l=1}^{L+1} E_l(u_r).\end{aligned}\tag{16}$$

ここで $E_l(u_r)$ は次式で定義される。

$$E_l(u_r) = \frac{2\pi l^2(l+1)^2}{2l+1} \sum_{m=0}^M \sum_{m'=0}^M \psi_{ml} \psi_{m'l} \int_R^{R+1} G_m(r) G_{m'}(r) r^{-2} dr. \tag{17}$$

線形安定性を調べているので、 ψ, ξ, Θ の振幅は一意に決まらない。エネルギースペクトルの考察においては、 $E(u_r) = 1$ に規格化して考えるものとする。

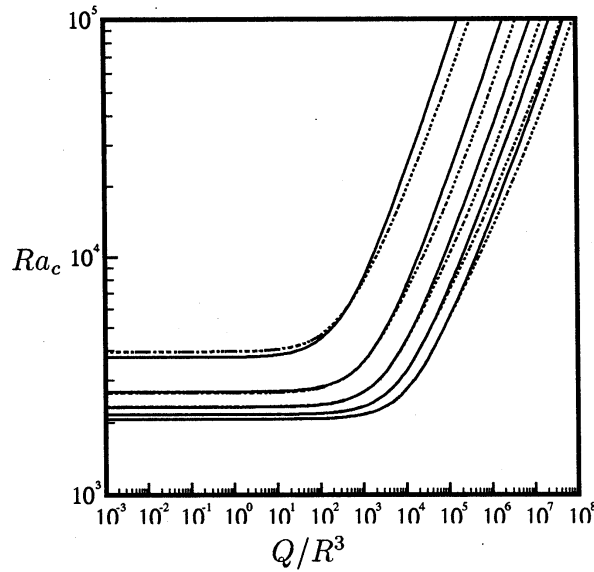


図 2: 臨界 Rayleigh 数 Ra_c の外部磁場依存性。実線は対称モード、破線は反対称モードの臨界値を表す。各曲線のアスペクト比 R は上より順に $R = 1, 2, 3, 4, 5$ である。Chandrasekhar 数の定義より、MHD 流体にかかる磁束密度は、同じ Q 値に対して R^{-3} に比例する。したがって Q/R^3 の値を横軸にとって臨界値を比較してある。

4 結果および考察

本研究では、熱不安定性に対する双極子磁場の影響を調べる。双極子磁場の効果は、Lorentz 力および熱対流による誘導磁場として基礎方程式中に表現されている。双極子磁場の強さを表すパラメーターは Chandrasekhar 数 Q である。以下において、臨界 Rayleigh 数 Ra_c および線形中立解の対流パターンの Q 依存性について考察する。

4.1 臨界 Rayleigh 数の外部磁場依存性

臨界 Rayleigh 数 Ra_c の外部磁場依存性を、アスペクト比 R 毎に調べた (図 2)。アスペクト比および臨界モードの対称性に依らず、 Ra_c は Q の増加関数となっている。すなわち外部磁場が強いほど、熱対流の発生は抑制される。また、 Ra_c の Q 依存性は、磁場の強さによって大きく二つの領域に分割されることが分かる。まず外部磁場が強い場合、 Ra_c はアスペクト比および臨界モードの対称性によ

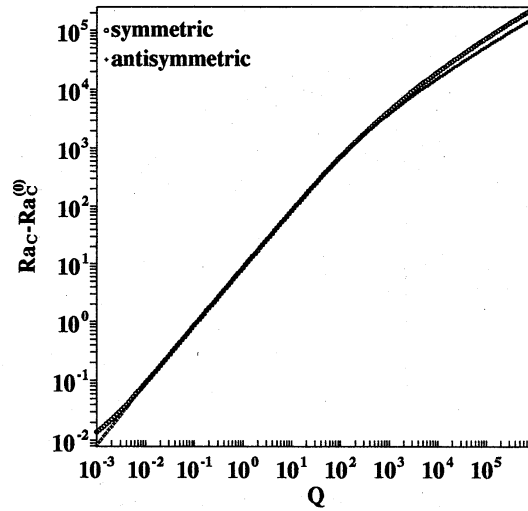


図 3: 臨界 Rayleigh 数 Ra_c の外部磁場依存性。 $R = 1$ の場合のデータをプロットしなおしたもの。

らず、

$$Ra_c \propto Q^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

に従っている。この領域での重要な特徴の一つは、反対称モードが系の臨界 Rayleigh 数を与えていることである。すなわち、外部磁場が強い領域においては、アスペクト比によらず反対称な流れが生じやすくなる。

次に磁場が弱い場合について調べる。図 3 は、縦軸を $Ra_c - Ra_c^{(0)}$ にとって、 $R = 1$ の場合の臨界 Rayleigh 数をプロットしなおしたものである。ここで、 $Ra_c^{(0)}$ は $Q = 0$ の場合の臨界 Rayleigh 数である。この量を以下「臨界 Rayleigh 数の増加量」と呼ぶ。磁場が弱い領域では、内殻半径によらず、臨界 Rayleigh 数は外部磁場の強さ Q に対して、

$$Ra_c - Ra_c^{(0)} \propto Q \quad (19)$$

の依存性を持ち、またこの性質は R に依らないことが分かった。

4.2 臨界レイリー数の内殻半径依存性

図 4 に $Ra_c - Ra_c^{(0)}$ の R 依存性を図示した。ここでは Chandrasekhar 数を $Q = CR^3$ (C は定数) として、臨界 Rayleigh 数の増加量を比較した。臨界 Rayleigh 数の増加量 $Ra_c - Ra_c^{Q=0}$ は、 R の増加とともに減少し、

$$Ra_c - Ra_c^{Q=0} \propto R^{-2.5} \quad (20)$$

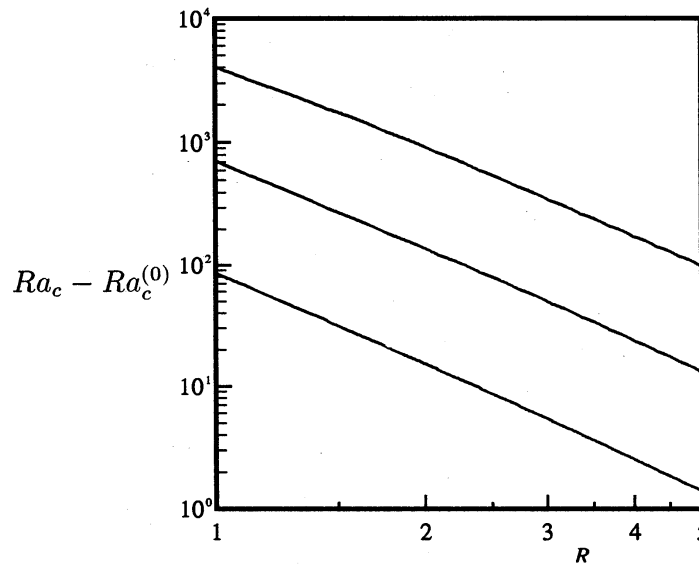


図 4: 臨界 Rayleigh 数の増加量 $Ra_c - Ra_c^{(0)}$ のアスペクト比 R 依存性。各曲線の Chandrasekhar 数は上より順に $Q = R^3 \times 10^3$, $R^3 \times 10^2$, $R^3 \times 10$ である。

に従っている。

4.3 外部磁場が熱対流パターンに及ぼす影響

次に外部磁場の影響による、臨界モードの対流パターンの変化を考察する。磁場がない場合 ($Q = 0$)、臨界モードの ϑ -方向の関数形は特定の l に対する Legendre 関数 $P_l^m(\cos \vartheta)$ で与えられることが知られている。

図 5 に、 $R = 1$ の場合における臨界モードの ψ の等高線図を示した。 $R = 1$, $Q = 0$ のとき、臨界の l は、対称モードが $l = 4$ 、反対称モードが $l = 5$ によって与えられる。

図 5(b) より明らかなように、外部磁場 B は、臨界モードの対流のパターンに大きな影響を与える。まず対流ロールの振幅に関して、赤道付近のロールが相対的に強調されている。次に、対流ロールの流線の向きが、外部磁場の向きに揃う方向に変形されている。

図 6 に、反対称臨界モードの場合の ψ の等高線図を示した。対称流れの場合と同じように磁場が強くなると極付近の対流は抑制される。対称モードの場合と同様、流線が磁力線の向きに変形している。磁場が強くなるにつれて、赤道上の対流

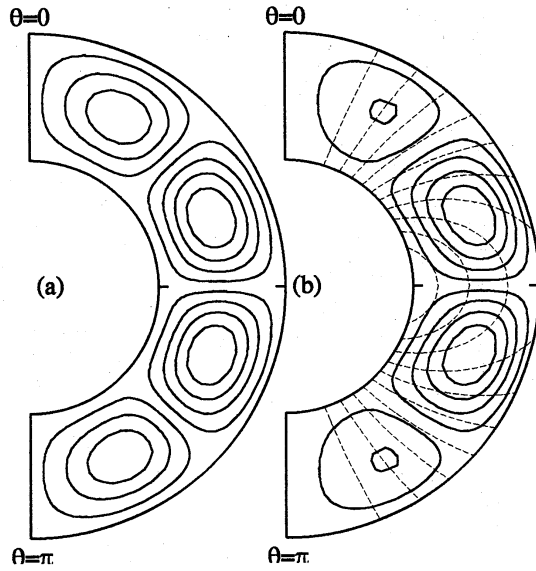


図 5: 対称臨界モードの ψ の等高線図。
(a) $Q = 0$, (b) $Q = 10^4$.

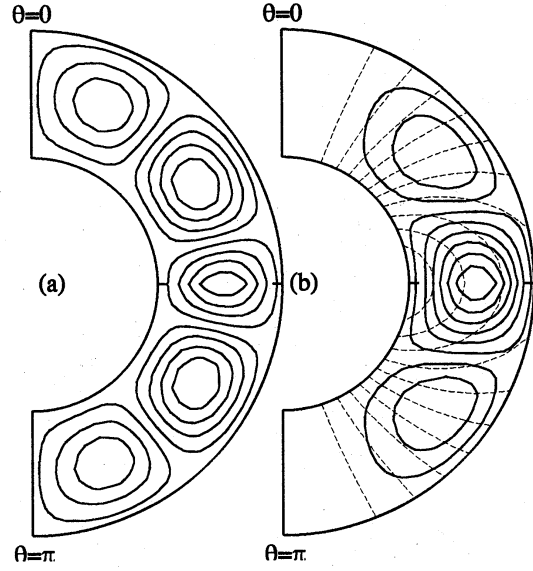


図 6: 反対称臨界モードの ψ の等高線図。
(a) $Q = 0$, (b) $Q = 10^4$.

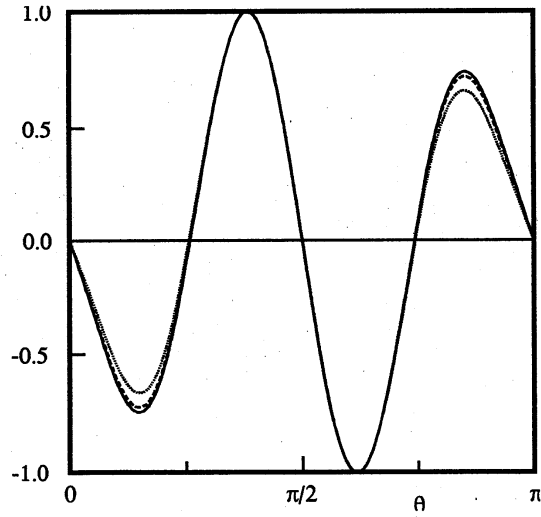


図 7: 流体層の中心 $r = R + 1/2$ における対称臨界モードの ψ の振幅。実線: $Q = 0$, 破線: $Q = 1$, 点線: $Q = 10^3$.

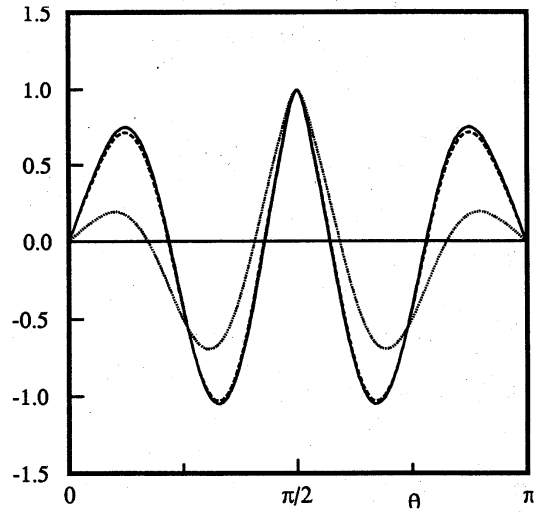


図 8: 流体層の中心 $r = R + 1/2$ における反対称臨界モードの ψ の振幅。実線: $Q = 0$, 破線: $Q = 1$, 点線: $Q = 10^3$.

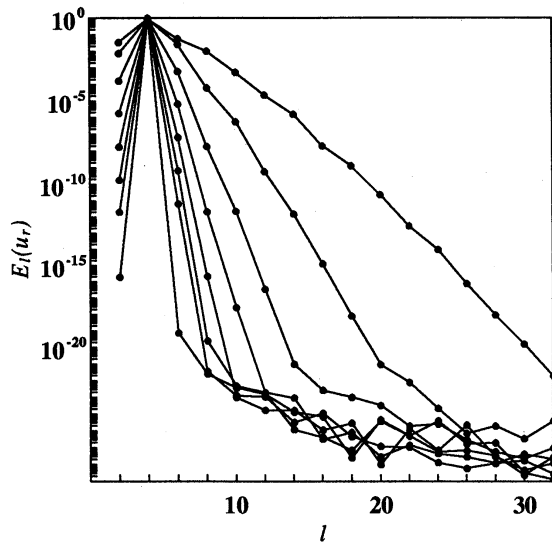


図 9: 対称臨界モードのエネルギースペクトル。各スペクトルの Chandrasekhar 数は内側から広がる方へ向けて、 $Q = 0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ である。

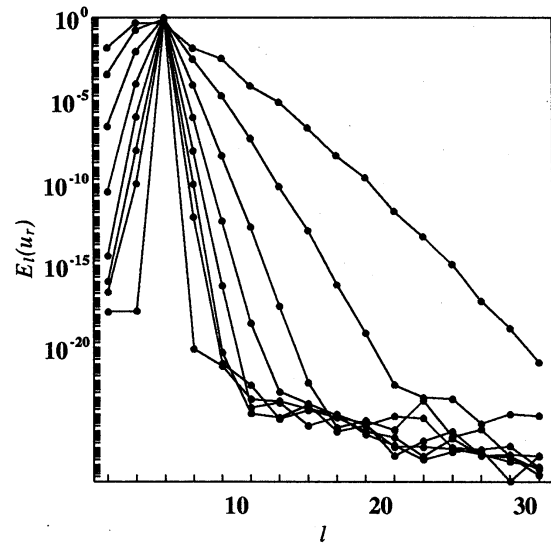


図 10: 反対称臨界モードのエネルギースペクトル。各スペクトルの Chandrasekhar 数は内側から広がる方へ向けて、 $Q = 0, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$ である。

ロールの南北方向のサイズが大きくなる。

図 7 に、流体層の深さ方向の中心の位置 $r = R + 0.5$ での臨界モードの ψ の振幅をプロットした。磁場が強くなるにつれて、極付近の対流ロールの振幅は相対的に弱くなっている。しかし、対称モードの ψ のゼロ点の ϑ の位置、すなわち対流ロールの南北方向の幅はほとんど変化しない。

一方、図 8 に示すように、反対称モードの場合には、磁場が強くなるにつれて、流れ関数 ψ のゼロ点の位置が変化する。また、極付近において極端に振幅が減衰している。

この結果より、外部磁場が強くなるにつれて、極付近に発生する対流の振幅は相対的に弱くなる。

4.4 形成されるロールの数

ここでは、速度場の攪乱の半径方向成分 u_r の ϑ -方向のエネルギースペクトル $E_l(u_r)$ の分布の、外部磁場依存性を調べ、 ϑ -方向に形成されるロールの個数との関連を議論する。図 9 に、アスペクト比 $R = 1$ の場合の、対称臨界モードの u_r のエネルギースペクトル $E_l(u_r)$ をプロットした。

先述したように、磁場の無い場合、臨界モードは特定の l で与えられるので、スペクトルはその l に鋭いピークを持つ分布となる。外部磁場がかかると、その l の

だけでなく、サイド・バンドのモードも次第に励起されていき、磁場の強さに伴ってエネルギースペクトルのバンド幅が、広がっていくことが分かる。このバンド幅の広がり、外部磁場が流体運動を、磁力線の向きに制御したため生じたものと考えられ、図5および図6における対流パターンの変化と対応している。

対称モードの場合は、外部磁場の強さによらず、 $l=4$ のモードが卓越している。したがって、対称モードの対流パターンの形成には、 $l=4$ のモードが最も大きな影響力を持っており、図5に示したようにロールの個数が4個であることと対応している。

一方、反対称モードの場合には、磁場が弱い場合は、 $l=5$ のモードが卓越している。しかし、外部磁場が大きくなるにつれて、 $l=3$ のモードの励起が著しくなる。図10より、Chandrasekhar 数 $Q=10^3$ で、スペクトルのピークは $l=5$ から $l=3$ へと入れ替わる。このピークの入替わりは、図6において示した、対流パターンの変化と対応付けられる。 $Q=0$ の場合、 $l=5$ のモードの影響でパターンが形成されているので、対流ロールが5個はっきりと現れている。しかし、 $Q=10^3$ の場合には、 $l=3$ のモードの卓越によって、対流パターンが形成されているものと考えられ、大きなロールの個数は3個に減少している。

参考文献

- 1) 吉澤 徹; 1991 日本物理学会誌 Vol.46, No.9. 734.
- 2) S.Chandrasekhar; 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon, Oxford). 146.
- 3) K.Araki, S.Yanase and J.Mizushima; 1994 *Journal of the Physical Society of Japan* Vol.63, No.6, 2123.
- 4) 古東文哉, 水島二郎; 1994 同志社大学理工学研究報告 第35巻 第1号. 45.
- 5) 砂川重信; 1989 理論電磁気学 第2版. 紀伊國屋書店, 111.
- 6) K.Araki, S.Yanase and J.Mizushima; *Proc. RIMS workshop, Unstable and Turbulent Motion of the Fluid, Kyoto, 1992*, ed.S.Kida (World Scientific, Singapore, 1993). 59.