

ある発展方程式の解の構成について

神大 理 菊 池 紀 夫

Ω は m 次元ユークリッド空間 R^m の有界な開集合とし, E は Ω で定義され値を R^m にとる二乗可積分関数全体の集合 $L^2(\Omega)$ のヒルベルト部分空間とする。つぎの (1), (2) を仮定する。

(1) つぎの性質をもつ $\{\lambda_n\} \subset R, \{g_n\} \subset E$ ($n=1, 2, \dots$) が存在する。

i) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$),

ii) $g_n(x)|_{x \in \partial\Omega} = 0$, $\{g_n(x)\}$ は Ω の上の連続関数列で, E の完全正規直交系である。

線型閉作用素 A をつぎのように定義する。

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in E; u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \alpha_n^2 < +\infty \right\},$$

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n g_n, \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n \in \mathcal{D}(A).$$

(2) $C > 0, 0 < \alpha < 1$ が存在して

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|Au\| |x - y|^\alpha, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

がなりたつ。ただし, $\|u\|$ は u の $L^2(\Omega)$ ノルムである。

E 上の発展方程式のコーシー問題

$$d u(t) / d t = -A u(t) + f(t), \quad t \in I = [0, T],$$

$$u(0) = 0$$

の解の構成を考える。ただし, $f(t) \in \mathcal{D}(A)$ は t の連続関数とする。

$f(t)$ が t に関係しないときを最初考える。 I を N 等分する。

$$D: 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T,$$

$$h = \delta(D) = T/N.$$

$\{u_k\}$ ($k=0, 1, \dots, N$) を帰納的につぎのように定める。

$$u_0 = 0,$$

$$(u_k - u_{k-1})/h = -A u_k + f,$$

$$\therefore (1 + hA) u_k = u_{k-1} + h f.$$

このような $u_k \in \mathcal{D}(A)$ があるものとすれば, 仮定(1)により

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(k)} f_n$$

とあらわされるから

$$\alpha_n^{(k)} = \{(1 + h\lambda_n)^k - 1\} f_n / h\lambda_n(1 + h\lambda_n)^k$$

となり, A が閉作用素であることに注意すれば, この u_k が上の方程式とみたすものである。また, 評価

$$\|A u_k\| \leq \|f\|, \quad \|A u_{k+1} - A u_k\| \leq h \|f\|$$

が得られる。分割 D に対応して, 関数 $\varphi_D(t, x), \psi_D(t, x)$ を

$$\begin{aligned} f_D(t, x) &= \frac{t_{k+1} - t}{h} u_k(x) + \frac{t - t_k}{h} u_{k+1}(x), \\ \psi_D(t, x) &= u_{k+1}(x), \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \end{aligned}$$

と定義し、 E の元と考えるときには、 $f_D(t), \psi_D(t)$ と書く。

さて、解の構成を試みる。 $\{D_n\}$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(D_n) = 0$$

なる分割列とし、 $f_{D_n}(t, x), \psi_{D_n}(t, x)$ を簡単に、 $f_n(t, x), \psi_n(t, x)$ と書くことにする。また、 $\{f_n(t)\}$ が E で正規族になることをみる。仮定(2)により

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq C \|A u_k\| \cdot |x - y|^\alpha$$

がなりにつから

$$|f_n(t, x) - f_n(t, y)| \leq C \|f\| \cdot |x - y|^\alpha$$

となり、 $t \in I$ と固定したとき、 $\{f_n(t)\}$ は E のコンパクト集合に属し

$$\|D_t^+ f_n(t)\| \leq 2 \|f\|$$

であるから、 $\{f_n(t)\}$ は E で正規族になる。同じように考えて $\{D_t^+ f_n(t)\}$ も E で正規族になっている。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = f(t), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D_t^+ f_n(t) &= d f(t)/dt, \quad t \in I \end{aligned}$$

と仮定できる。作リ方から

$$D_t^+ f_n(t) = -A \psi_n(t) + f, \quad t \in I$$

であり, A が閉作用素であるから

$$dy(t)/dt = -Ay(t) + f, \quad t \in I$$

$$y(0) = 0$$

がなりにつ。 $f(t)$ が t の連続関数のときは, $f(t)$ と階段関数で近似することにより, 解を構成することが出来る。