

Regular threefolds with trivial
canonical bundle

東大理 堀川 頼二

§1. V は $\mathbb{C}$ 上定義された 3 次元代数多様体で, 非特異, 射影的とする. さらに

i) canonical bundle K_V は自明.

ii) $q = \dim H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$

と仮定する. ($q > 0$ の場合については上野 [3] 参照)

V 上の ample line bundle H を一つと, 2

$$h^0(H) = \dim H^0(V, \mathcal{O}(H))$$

とする. H^3 で交点数を表わす.

定理 1. V, H が上の条件をみたすとす, 次のいずれかが成り立つ.

A) V は elliptic threefold $\tilde{V} \rightarrow W$ で global な切断をもつもの double cover 同値.

B) $H^3 \geq 2h^0(H) - 6$.

H^3 の上限については次の定理が成り立つことが井上政久氏によつて注意された。

定理 2 $H^3 \leq 6h^0(H)$ が成り立つ。等号が成り立つための必要十分条件は V が abelian variety を有限不分岐被覆に持つことである。

(定理 1, 2 は $g > 0$ でも成り立つ)

注意 1. 定理 1 の証明は minimal な一般型曲面 S に対する不等式

$$(*) \quad K_S^2 \geq 2p_g(S) - 4$$

の証明 (e.g. [1] Lemma 2) を真似ればよい。 $|H|$ が非特異 member S を含むとき K_S は H の制限であるから $(*)$ から B) が従う。

2. A) は $|H|$ に associate した rational map Φ_H の像が 2次元の場合に起こる。

3. 定理 2 の証明は Yau によつて Calabi conjecture の結果 [4] を用いる。 $|H|$ が非特異 member S を含むとき、定理 2 の不等式は $c_1^2(S) \leq c_2(S)$ と同値である。

§ 2. 定理 1 の A) の場合は以後除外して考へることにする。一般型の曲面の場合と同様に H^3 が下限 $2h^0(H) - 6$ に近い場合には V の構造を決定できる。

と期待される。

定理3. $H^3 = 2h^0(H) - 6$ なる V は定理1のA)をみたすらしいと予想。このとき

- i) $|H|$ に associate した rational map Φ_H は正則。
- ii) $W = \Phi_H(V)$ は $\mathbb{P}^n$, $n = h^0(H) - 1$ 内の $(n-2)$ 次, 3次元 variety なる Φ_H は degree 2 の finite map $V \rightarrow W$ を induce する。

よく知られた例として W は次のうちからいくつかある。

- 1) $W = \mathbb{P}^3$ ($n=3$)
- 2) W は $\mathbb{P}^4$ の非特異な2次超曲面 ($n=4$)
- 3) $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta) \oplus \mathcal{O}(\gamma))$ は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ -bundle なる W は tautological line bundle なる $\mathbb{P}^n$ に埋め込まれたもの ($n = \alpha + \beta + \gamma + 2 \geq 5$)
- 4) W は $\mathbb{P}^{n-1}$ 内の $(n-2)$ 次非特異曲面 W_0 上の cone
- 4a) W_0 は $\mathbb{P}^2$ の Veronese embedding ($n=6$)
- 4b) W_0 は Hirzebruch surface ($n \geq 4$)
- 5) W は $\mathbb{P}^{n-2}$ 内の $(n-2)$ 次有理曲線上の cone。

H が ample であることから 4b) 5) は Φ_H の像にはならずらしいことがわかる。1) - 4a) に対応する V は全2次

の様に構成できる.

1) V は $\mathbb{P}^3$ の (分岐) 2重被覆で branch locus B は 8 次の非特異超曲面.

2) V は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異 2次超曲面 W の 2重被覆で branch locus B は W と 6次超曲面の非特異な完全交叉.

3) V は $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta) \oplus \mathcal{O}(\gamma))$ の 2重被覆で branch locus B は $|-2K_W|$ に属する非特異因子. これは

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (k, k, k), (k, k, k+1), (k, k+1, k+1) \\ (k, k, k+2), (k, k+1, k+2) \quad (k \geq 1)$$

のとみに起こる. (勿論 V は k に依らずに H は k によって変わる)

4a) $\mathbb{P}^2$ の Veronese embedding W_0 上の cone の非特異モデルは $\mathbb{P}^2$ 上の $\mathbb{P}^1$ -bundle $\tilde{W} = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$ である. $\tilde{W} \rightarrow \mathbb{P}^2$ の切断としての normal bundle が $\mathcal{O}(-2)$ のものを W_0 で表わす. $\mathbb{P}^2$ 上の直線の逆像を Γ とし $B_0 \in |5W_0 + 10\Gamma|$ で非特異なものを選ぶ. $B = W_0 + B_0$ を branch locus とする $\tilde{W}$ の 2重被覆を $\tilde{V}$ とすると $\tilde{V}$ は W_0 上に exceptional divisor $E \cong \mathbb{P}^2$ を含む. E を一点に contract したものが V である.

V の Picard 数を ρ とすると 2 場合

$$\rho = \dim H^1(V, \Omega^1) = \dim H^2(V, \mathbb{H})$$

(Ω^1 は V 上の正則 1 次形式の層, $\mathbb{H}$ は V の dual である)

上に述べた 1) 2) 4a) の場合 $\rho=1$, 3) の場合 $\rho=2$ である. 従って 1) 2) 4a) の V 上の ample line bundle は整数倍を除いて unique である. 4a) の場合 $H=2H_0$ となり, 2 である (次節 1)). 3) の場合には V は次数 2 の K3 曲面の pencil の構造を持ち, 2 である V であり従って V 上の ample line bundle を持つ.

§3. 定理 4. $H^3 = 2h^0(H) - 5$ である V は定理 1 の A) をみたす V である. このとき $|H|$ は高々 1 つの base point を持ち, V は 1 回の blowing up で除去される. また $|H|$ の general member は非特異既約である.

2 場合 V の構造は次のようになる.

- 1) $h^0(H)=3, H^3=1$: V は §2 の 4a) と同じである.
- 2) $h^0(H)=5, H^3=5$: V は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異 5 次超曲面.
- 3) $h^0(H)=4, H^3=3$: V は $\mathbb{P}^3$ の 3 重被覆である w の weight を 2 とした方程式

$$w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = 0$$

(各 a_i は $\mathbb{P}^3$ の同次座標の $2i$ 次同次式) で与えられる.

3') $h^0(H) = 4$, $H^3 = 3$: $|H|$ は base point b をもち、 V の b における blowing up を $\tilde{V}$ とすれば $\tilde{V}$ は $\mathbb{P}^3$ の 2 重被覆で、branch locus は平面 L_0 と 9 次曲面 B_0 の和で、 B_0 は L_0 上の 3 次曲線に沿って 3 重曲線をもつ。
(3) 3') は [2], II, §2, Theorem (2.3) で与えられた曲面を含むものがある。

4) $h^0(H) = 6$, $H^3 = 7$: V は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^2$ -bundle $W = \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2))$ の 2 重被覆と双有理同値。branch locus は W の各 fibre 上に 8 次因子を induce する。
(これは [2], II, §1, Theorem (1.3) の B_1) の曲面を $|H|$ の member と (2 含む threefold である)。

5) V は $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}(\alpha) \oplus \mathcal{O}(\beta) \oplus \mathcal{O}(\gamma))$ の 2 重被覆と双有理同値。branch locus は 2 本の fibre Γ と $B_0 \in |-2K_W + \Gamma|$ からなり、 B_0 は Γ 上の 2 次曲線に沿って 3 重曲線をもつ。
これは $(\alpha, \beta, \gamma) = (k, k, k), (k, k, k+1), (k, k+1, k+1)$ ($k \geq 1$) のとき起こる。([2], II, Theorem (1.3) の A) に対応する)

1) 2) 3) 3') については $\rho = 1$, 4) 5) については $\rho \geq 2$ である。

§4. 変形についての注意

Serre's duality により $\dim H^2(V, \mathcal{O}_V) = g = 0$ であるから $\{V_x\}$ と $V = V_0$ の small deformation の族とすれば H は各 V_x 上に ample line bundle H_x に extend される。従って deformation の構造が移ることは容易に期待できない。 § 2 の V について (3) の (α, β, γ) について

$$(k+1, k+1, k+1) \rightarrow (k, k+1, k+2)$$

$$(k, k+1, k+1) \rightarrow (k, k, k+2)$$

が可能では specialization の全である。 § 3 の V については (3') が (3) の specialization である。

- [1] Horikawa, E., On deformations of quintic surfaces, Invent. Math., 31 (1975), 43-85.
- [2] ---, Algebraic surfaces of general type with small c_1^2 , I, Ann. of Math. 104 (1976), 357-387. II, Invent. Math., 37 (1976), 121-155.
- [3] Ueno, K., On algebraic threefolds of parabolic type, Proc. Japan Acad. 52 (1976), 541-543.
- [4] Yau, S. T., Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, PNAS, 74 (1977), 1798-1799.