

グロタンディーク・タイヒミュラー群と関連したある直積 分解について

On a direct product decomposition related to the Grothendieck-Teichmüller group

By

南出 新*
Arata MINAMIDE

Abstract

In this article, we announce our results on the Grothendieck-Teichmüller group GT obtained in the joint work with Yuichiro Hoshi and Shinichi Mochizuki. Let $n \geq 2$ be a positive integer and k an algebraically closed field of characteristic zero. Write Π_n for the étale fundamental group of the n -th configuration space of $\mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and $\mathfrak{S}_{n+3}$ for the symmetric group on $n+3$ letters. Then our main theorem asserts that we have a direct product decomposition $\text{Out}(\Pi_n) = GT \times \mathfrak{S}_{n+3}$. The detail of the arguments appearing in this article may be found in [2].

§ 1. 主定理

本節では、星裕一郎氏、望月新一氏との共同研究で得られた、グロタンディーク・タイヒミュラー群に関する結果を紹介する。そこで、まずいくつかの記号を用意する。本稿を通じて、 n を正の整数、 Σ を全ての素数からなる集合、あるいは、一つの素数からなる集合、 k を標数 0 の代数閉体、 X を k 上の双曲的曲線、 X_n を X の n 次配置空間、即ち、

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \overbrace{X \times_k \cdots \times_k X}^n \mid \text{任意の } 1 \leq i < j \leq n \text{ に対して, } x_i \neq x_j\}$$

とする。また、 X_n のエタール基本群の最大副 Σ 商を Π_n と書くことにする。

Received March 30, 2018. Revised October 12, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14H30; Secondary 14H10.

Key Words: Grothendieck-Teichmüller group, combinatorial anabelian geometry, fiber subgroup, generalized fiber subgroup, configuration space.

*京都大学数理解析研究所 606-8502 京都市左京区北白川追分町

RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.

e-mail: minamide@kurims.kyoto-u.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

また、位相的に有限生成な副有限群 G に対して、 G の (連続な) 自己同型のなす群を $\text{Aut}(G)$ と書くことに、そして、 G の (連続な) 内部自己同型のなす群を $\text{Inn}(G)$ と書くことにする。このとき、 $\text{Aut}(G)$ はコンパクト開位相による副有限群の構造を持ち、また、 $\text{Out}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ も $\text{Aut}(G)$ の位相から誘導される位相による副有限群の構造を持つ ([10, Corollary 4.4.4] を参照)。例えば、 Π_n は位相的に有限生成な副有限群であるので ([7, Proposition 2.2, (ii)] を参照)、 $\text{Aut}(\Pi_n)$ 、 $\text{Out}(\Pi_n)$ は副有限群の構造を持つ。

定義 1.1. $n \geq 2$ とする。

- (i) $1 \leq m < n$ に対して、 $n - m$ 個の成分を忘れることによって得られる射影 $X_n \rightarrow X_m$ は全射 $\Pi_n \twoheadrightarrow \Pi_m$ を誘導することに注意する。このようにして誘導された様々な全射 $\Pi_n \twoheadrightarrow \Pi_m$ たちの核を Π_n の **長さ $n - m$ のファイバー部分群** と呼ぶ。

- (ii) Π_n の自己同型 $\alpha \in \text{Aut}(\Pi_n)$ であって、

$$\text{任意のファイバー部分群 } F \subseteq \Pi_n \text{ に対して, } \alpha(F) = F$$

という条件をみたすもののなす群を $\text{Aut}^F(\Pi_n)$ と書くことにする。定義から容易に確認できるとおり、 $\text{Inn}(\Pi_n)$ は $\text{Aut}^F(\Pi_n)$ の正規部分群となる。そこで、以下では、

$$\text{Out}^F(\Pi_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}^F(\Pi_n)/\text{Inn}(\Pi_n) \quad (\subseteq \text{Out}(\Pi_n))$$

と書くことにする。

ここで、**組み合わせ論的遠アーベル幾何**の代表的な結果をいくつか復習する。以下では、 n 次対称群を $\mathfrak{S}_n$ と書くことに、そして、 $n \geq 4$ のとき、 k スキーム上の $(0, n)$ 型曲線 — 即ち、 k スキーム上の種数 0 の固有平滑曲線 (の族) であって n 個の (順序付けられた) 切断が付随したもの — のモジュライスタックを $\mathcal{M}_{0,n}$ と書くことにする。特に、(k スタックの) 自然な同型

$$\mathcal{M}_{0,n} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\})_{n-3}$$

— ここで、 $\mathbb{P}_k^1$ は k 上の射影直線 — が存在することに注意する。

また以下では、群 G とその部分群 H に対して、 H の G における中心化群を $Z_G(H)$ と書くことにする。

定理 1.2. X をアフィン (な双曲的曲線) であると仮定する。

- (i) 1 個の成分を忘れることによって得られる射影 $X_{n+1} \rightarrow X_n$ が誘導する準同型

$$\text{Out}^F(\Pi_{n+1}) \rightarrow \text{Out}^F(\Pi_n)$$

は、どの成分を忘れたかに依存しない。さらに、この準同型は単射であり、 $n \geq 3$ の場合、同型になる。

- (ii) $n \geq 2$, $X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする. ここで, $\mathfrak{S}_{n+3}$ の $\mathcal{M}_{0,n+3} \xrightarrow{\sim} X_n$ への自然な作用は, 自然な単射 $\mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_n)$ を誘導することに注意する. いま

$$\text{GT}_n^\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{Out}^F(\Pi_n) \cap Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) \quad (\subseteq \text{Out}^F(\Pi_n))$$

とおく. このとき, (i) の (単射) 準同型 $\text{Out}^F(\Pi_{n+1}) \rightarrow \text{Out}^F(\Pi_n)$ は同型

$$\text{GT}_{n+1}^\Sigma \xrightarrow{\sim} \text{GT}_n^\Sigma$$

を誘導する. 以下では, これらの同型 ($n \geq 2$) を介して, GT_n^Σ たちを同一視する.

証明. (i) の前半については [3, Theorem A, (i)] を, (i) の後半については [4, Theorem A, (i)] を参照. (ii) は [6, Corollary 4.2, (ii)] と [4, Theorem A, (ii)] より従う. $\square$

注意. 定理 1.2, (i) の準同型の “成分非依存性” は, X が射影的な場合も成り立つ ([3, Theorem A, (i)] を参照). 一方, X が射影的な場合, この準同型は $n \geq 2$ で単射, $n \geq 4$ で同型になることが知られている ([4, Theorem A, (i)] を参照).

定理 1.2 を踏まえると, 次の定義が意味を持つことになる.

定義 1.3. $n \geq 2$, $X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする. このとき, **副 Σ グロタンディーク・タイヒミュラー群**を

$$\text{GT}^\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{GT}_n^\Sigma = \text{Out}^F(\Pi_n) \cap Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) \quad (\subseteq \text{Out}(\Pi_n))$$

で定義する. GT^Σ は, $\text{Out}(\Pi_n)$ の位相から誘導される位相によって, 副有限群の構造をもつ.

注意. 元々, 副有限グロタンディーク・タイヒミュラー群は [1] において (定義 1.3 とは全く違う形で) 定義された. この (オリジナルの) 副有限グロタンディーク・タイヒミュラー群は, 我々の GT^Σ — ここで, Σ は全ての素数の集合 — と一致する. この事実は, [6, Remark 1.11.1], [6, Corollaries 1.12, (ii); 4.2, (i)], [4, Theorem A, (ii)] より従う.

本稿の**主定理**は以下のものである ([2, Corollary C] を参照).

定理 1.4. $n \geq 2$, $X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする. このとき, $\text{Out}(\Pi_n)$ は

$$\text{Out}(\Pi_n) = \text{GT}^\Sigma \times \mathfrak{S}_{n+3}$$

という直積分解を持つ.

主定理の証明の概略は次節において与えられる.

次に, 主定理の一つの応用を説明する. 以下では, 副有限群 G に対して, $Z^{\text{loc}}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{H \subseteq G} Z_G(H)$ — ここで, H は G の開部分群を走る — という記号を用いる.

系 1.5. $n \geq 2$, $X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

- (i) $\mathfrak{S}_{n+3} = Z^{\text{loc}}(\text{Out}(\Pi_n))$.
- (ii) $\text{GT}^\Sigma = Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(Z^{\text{loc}}(\text{Out}(\Pi_n)))$.

特に, 副有限群 Π_n から閉部分群 GT^Σ , $\mathfrak{S}_{n+3} \subseteq \text{Out}(\Pi_n)$ を純群論的に復元できる.

証明. まず (i) を考察する. GT^Σ が $\text{Out}(\Pi_n)$ の (正規) 開部分群であることに注意する (定理 1.4 を参照). 特に, $\mathfrak{S}_{n+3} \subseteq Z^{\text{loc}}(\text{Out}(\Pi_n))$ は明らか. そこで, 逆の包含関係を示す. いま $\sigma \in Z^{\text{loc}}(\text{Out}(\Pi_n))$ とすると, σ は $\text{Out}(\Pi_n)$ のある開部分群 H の任意の元と可換である. 必要であれば, H を $H \cap \text{GT}^\Sigma$ に取り換えることで $H \subseteq \text{GT}^\Sigma$ と仮定しても一般性を失わない. 一方, 定理 1.4 より, $\sigma = a \cdot b$ — ここで, $a \in \text{GT}^\Sigma$, $b \in \mathfrak{S}_{n+3}$ — と書ける. よって,

$$a = \sigma \cdot b^{-1} \in Z_{\text{GT}^\Sigma}(H) = \{1\}$$

となるので (最後の “=” については, [5, Corollary 6.3] を参照), $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+3}$ が従う.

(ii) は, (i), 定理 1.4, そして, $\mathfrak{S}_{n+3}$ の中心自明性より容易に従う. $\square$

注意. Σ を全ての素数の集合とする. 次の問題は現在も未解決である ([11] を参照):

自然な単射 $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \text{GT}^\Sigma$ は同型であろうか

— ここで, $G_{\mathbb{Q}}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群. 仮にこの問題が肯定的であった場合, 定理 1.4, 系 1.5, (ii) から次が結論付けられる (ここで, $n \geq 2$, $X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ である):

$$\text{Out}(\Pi_n) = G_{\mathbb{Q}} \times \mathfrak{S}_{n+3}, \quad G_{\mathbb{Q}} = Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(Z^{\text{loc}}(\text{Out}(\Pi_n))).$$

§ 2. 主定理の証明

本節では, 本稿の主定理 (定理 1.4) の証明の概略を与える. 本節でも前節の記号を引き続き用いるが, ただし,

$$n \geq 2 \quad \text{かつ} \quad X = \mathbb{P}_k^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$$

を仮定する.

まず, 主定理の証明で重要な役割を果たす, **一般化ファイバー部分群** の概念を導入する.

定義 2.1.

- (i) $1 \leq m < n$ に対して, $n - m$ 個の切断を忘れることによって得られる射影¹ $X_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,n+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,m+3} \xrightarrow{\sim} X_m$ は全射 $\Pi_n \rightarrow \Pi_m$ を誘導することに注意する. このよう

¹ $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{m+3}\}$ を $\{1, 2, \dots, n+3\}$ の部分集合とする (ここで, $i_1 < i_2 < \dots < i_{m+3}$). k スタックの射 $p_I: \mathcal{M}_{0,n+3} \rightarrow \mathcal{M}_{0,m+3}$ を次で定める: $\mathcal{M}_{0,n+3}$ の対象 $(C \rightarrow S, \{s_1, \dots, s_{n+3}\})$ — ここで, $C \rightarrow S$ は k スキーム S 上の種数 0 の固有平滑曲線 (の族), $\{s_1, \dots, s_{n+3}\}$ は $C \rightarrow S$ の切断であって, $s_1(S), \dots, s_{n+3}(S)$ が互いに非交差なもの — に $\mathcal{M}_{0,m+3}$ の対象 $(C \rightarrow S, \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{m+3}}\})$ を対応させる (射の対応については省略). p_I を $n - m$ 個の切断を忘れることによって得られる射影と呼ぶ.

にして誘導された様々な全射 $\Pi_n \rightarrow \Pi_m$ たちの核を Π_n の長さ $n - m$ の一般化ファイバー部分群と呼ぶ.

(ii) Π_n の自己同型 $\alpha \in \text{Aut}(\Pi_n)$ であって,

$$\text{任意の一般化ファイバー部分群 } F \subseteq \Pi_n \text{ に対して, } \alpha(F) = F$$

という条件をみたすもののなす群を $\text{Aut}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ と書くことにする. 定義から容易に確認できるとおり, $\text{Inn}(\Pi_n)$ は $\text{Aut}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ の正規部分群となる. そこで, 以下では,

$$\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Aut}^{\text{gF}}(\Pi_n) / \text{Inn}(\Pi_n) \quad (\subseteq \text{Out}(\Pi_n))$$

と書くことにする.

注意. Π_n の任意のファイバー部分群は, Π_n の一般化ファイバー部分群である. 従って, $\text{Aut}^{\text{gF}}(\Pi_n) \subseteq \text{Aut}^{\text{F}}(\Pi_n)$, $\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n) \subseteq \text{Out}^{\text{F}}(\Pi_n)$ という包含関係が成立する.

主定理の証明で鍵となるのが, 次の結果である ([2, Theorem A, (ii)] を参照).

定理 2.2. $\alpha \in \text{Aut}(\Pi_n)$ とする. このとき, 長さ $n - m$ の一般化ファイバー部分群 $F \subseteq \Pi_n$ に対して, $\alpha(F)$ は Π_n の長さ $n - m$ の一般化ファイバー部分群である.

注意. 定理 2.2 において, $\alpha(F)$ は F と一致するとは限らない.

定理 2.2 を一旦認め, 先に主定理 (定理 1.4) の証明を行う.

主定理の証明. $\text{Out}(\Pi_n)$ の (任意の) 元は, Π_n の長さ 1 の一般化ファイバー部分群の集合に置換を誘導する (定理 2.2 を参照). 特に, 次の完全系列が存在する:

$$1 \longrightarrow \text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n) \longrightarrow \text{Out}(\Pi_n) \longrightarrow \mathfrak{S}_{n+3} \longrightarrow 1$$

— ここで, 自然な単射 $\mathfrak{S}_{n+3} \hookrightarrow \text{Out}(\Pi_n)$ (定理 1.2, (ii) を参照) は “ $\text{Out}(\Pi_n) \rightarrow \mathfrak{S}_{n+3}$ ” の分裂を定めることに注意する. そこで, 後述の命題 2.3 を適用することにより, 直積分解

$$\text{Out}(\Pi_n) = \text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n) \times \mathfrak{S}_{n+3}$$

を得る. すると, $\mathfrak{S}_{n+3}$ の中心自明性より $\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n) = Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3})$ となるので,

$$\text{GT}^{\Sigma} = \text{Out}^{\text{F}}(\Pi_n) \cap Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\mathfrak{S}_{n+3}) = \text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n)$$

が従い, よって, 主定理の証明が完結する. □

命題 2.3. 包含関係 $\mathfrak{S}_{n+3} \subseteq Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n))$ が成り立つ.

証明. $\mathfrak{S}_{n+3}$ の任意の互換が $\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ と可換することを示せば充分である. 一方, $\mathfrak{S}_{n+3}$ の任意の互換は, 互換 $\tau = (1, 2) \in \mathfrak{S}_{n+3}$ — 即ち, X_n の k 自己同型

$$X_n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{\text{第 1 成分と第 2 成分を入れ替え}} (x_2, x_1, \dots, x_n) \in X_n$$

から誘導される $\text{Out}(\Pi_n)$ の元 — と $\mathfrak{S}_{n+3}$ 共役である. 従って, 命題 2.3 を示すためには, $\tau \in Z_{\text{Out}(\Pi_n)}(\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n))$ を証明すれば充分. (ここで, $\text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ は $\text{Out}(\Pi_n)$ の正規部分群であることに注意する.) $\sigma \in \text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ とする. このとき, 定義から容易に確認できるとおり, $\tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} \in \text{Out}^{\text{gF}}(\Pi_n)$ である. また, 定義から容易に確認できるとおり, 定理 1.2, (i) の自然な準同型 $\text{Out}^{\text{F}}(\Pi_n) \rightarrow \text{Out}^{\text{F}}(\Pi_{n-1})$ による $\sigma, \tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1}$ の像は一致する. 従って, 定理 1.2, (i) の単射性部分より, $\sigma = \tau \cdot \sigma \cdot \tau^{-1}$ が結論付けられる. $\square$

最後に, 定理 2.2 の証明の概略を与える. まず, 次の命題を復習する.

命題 2.4. G を非アーベルな自由副 Σ 群であって, 位相的に有限生成なものとする. また, $H \neq \{1\}$ を G の正規閉部分群であって, 位相的に有限生成なものとする. このとき, H は G の開部分群である.

証明. [7, Theorem 1.5] を参照. $\square$

そして, 定理 2.2 の証明において重要な役割を果たすのが, 次に述べる定理である. 以下では, 副有限群 G とその閉部分群 H に対して, H と G の交換子群の (G での) 閉包を $[H, G] \subseteq G$ と書くことにする. 特に, $G^{\text{ab}} \stackrel{\text{def}}{=} G/[G, G]$ と書くことにする.

また以下では, ある素数

$$l \in \Sigma$$

を固定する. そして, 副有限群 G に対して, その最大副 l 商を $\overline{G}$ と書くことにする.

定理 2.5. $\overline{\Pi}_n$ の降中心列, 即ち,

$$\overline{\Pi}_n(1) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Pi}_n \supseteq \overline{\Pi}_n(2) \supseteq \overline{\Pi}_n(3) \supseteq \dots$$

— ここで, $\overline{\Pi}_n(i+1) \stackrel{\text{def}}{=} [\overline{\Pi}_n(i), \overline{\Pi}_n]$ ($i \geq 1$) — に付随した ($\mathbb{Q}_l$ 上の) 次数付きリー代数 $\bigoplus_{i \geq 1} (\overline{\Pi}_n(i)/\overline{\Pi}_n(i+1) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l)$ を $\text{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\overline{\Pi}_n)$ と書くことにする. また, $\text{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\overline{\Pi}_n)$ の ($\mathbb{Q}_l$ 上の) 次数付きリー代数としての自己同型のなす群を $\text{Aut}(\text{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\overline{\Pi}_n))$ と書くことにする. このとき, 同型

$$\text{Aut}(\text{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\overline{\Pi}_n)) \cong \mathfrak{S}_{n+3} \times \mathbb{Q}_l^\times$$

が存在する.

証明. [8, Lemma 4.1.2], または, [9, Theorem D] を参照. $\square$

定理 2.2 の証明. $\alpha \in \text{Aut}(\Pi_n)$ が誘導する $\text{Aut}(\text{Gr}_{\mathbb{Q}_l}(\bar{\Pi}_n))$ の元を $\tilde{\alpha}$ と書くことにする. 特に, α を $\alpha \cdot \beta$ — ここで, $\beta \in \text{Aut}(\Pi_n)$ は適切な元 $\in \mathfrak{S}_{n+3} \subseteq \text{Out}(\Pi_n)$ の (ある) 持ち上げ — に取り換えることで, $\tilde{\alpha}$ はスカラー ($\in \mathbb{Q}_l^\times$) 倍であると仮定しても一般性を失わない (定理 2.5 を参照). このとき, 定理 2.2 を示すためには, 以下を示せば充分:

$F \subseteq \Pi_n$ を (ある) 射影 $\text{pr} : X_n \rightarrow X$ から定まる, 長さ $n-1$ の一般化ファイバー部分群とする (定義 2.1, (i) を参照). このとき, $\alpha(F) = F$ が成り立つ.

(一般の “長さ $n-m$ の場合” は, この “長さ $n-1$ の場合” に帰着される. 詳細については, [2, Theorem 2.5, (v)] を参照.) 以下では, pr から誘導される全射 $\Pi_n \twoheadrightarrow \Pi_1$ を p と書くことにする. (特に, $F = \text{Ker}(p)$ である.) まず, 次を主張する:

主張 1 p が誘導する全射 $\bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \twoheadrightarrow \bar{\Pi}_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ の核は, 自然な射の合成 $\Pi_n \twoheadrightarrow \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \hookrightarrow \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ による F の像が生成する $\mathbb{Q}_l$ 部分空間と一致する.

主張 1 は, 以下の可換図式より従う:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Pi_n & \xrightarrow{p} & \Pi_1 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \bar{F}^{\text{ab}} & \longrightarrow & \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} & \longrightarrow & \bar{\Pi}_1^{\text{ab}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \bar{F}^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l & \longrightarrow & \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l & \longrightarrow & \bar{\Pi}_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

— ここで, 垂直の矢印は全て自然な射であり, また, 全ての水平列は完全である. (中央の水平列の完全性については, [2, Proposition 2.2, (i)] を参照.)

次に, 以下の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_n & \xrightarrow{\alpha} & \Pi_n & \xrightarrow{p} & \Pi_1 \\ \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow \phi_1 \\ \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l & \xrightarrow[\text{スカラー倍}]{\tilde{\alpha}} & \bar{\Pi}_n^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l & \xrightarrow{\tilde{p}} & \bar{\Pi}_1^{\text{ab}} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l \end{array}$$

— ここで, 垂直の矢印は全て自然な射. 特に, $\tilde{p}(\tilde{\alpha}(\phi_n(F))) = \{0\}$ となることに注意する (主張 1 を参照). いま次を主張する:

主張 2 包含関係 $\alpha(F) \subseteq F$ が成り立つ.

実際, $p(\alpha(F)) \neq \{1\}$ と仮定する. すると, 命題 2.4 より, $p(\alpha(F))$ は Π_1 の (正規) 開部分群である. (ここで, F は位相的に有限生成であることに注意する. この事実の証明については, [2, Theorem 2.5, (iv)] の証明を参照.) 一方, $\phi_1(p(\alpha(F))) = \{0\}$ であることから,

$\text{Im}(\phi_1)$ は有限群である

ということが結論付けられる. しかし, これは $\mathrm{Im}(\phi_1) = \overline{\Pi}_1^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}_l \oplus \mathbb{Z}_l$ に矛盾する.
特に, 主張 2 より, 次の短完全列が存在する:

$$1 \longrightarrow F/\alpha(F) \longrightarrow \Pi_n/\alpha(F) \longrightarrow \Pi_n/F \longrightarrow 1.$$

一方, $\Pi_n/\alpha(F) (\stackrel{\sim}{\leftarrow} \Pi_n/F \stackrel{\sim}{\rightarrow} \Pi_1)$ は階数 2 の自由副 Σ 群 (特に, 無限群) であるので, 再び命題 2.4 を適用することで, $F/\alpha(F) = \{1\}$ を得る. 従って, $\alpha(F) = F$ となる. $\square$

§ 3. 謝辞

本稿は, 研究集会 “代数的整数論とその周辺 2017” での筆者の講演を基としたものです. 講演の機会を与えて下さいました, 関係者の皆様に深く感謝致します. また, 本稿の内容は星裕一郎氏, 望月新一氏との共同研究によるものです. この場をお借りして, 星裕一郎氏, 望月新一氏に感謝申し上げます. 本稿の執筆に際し, 筆者は京都大学数理解析研究所 共同利用・共同研究拠点事業の助成を受けております.

参考文献

- [1] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\overline{\mathbb{Q}})$, *Algebra i Analiz* **2** (1990), pp. 149–181.
- [2] Y. Hoshi, A. Minamide, and S. Mochizuki, *Group-theoreticity of Numerical Invariants and Distinguished Subgroups of Configuration Space Groups*, RIMS Preprint **1870** (March 2017).
- [3] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, *Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2012), pp. 659–811.
- [4] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves II: Tripods and combinatorial cuspidalization*, RIMS Preprint **1762** (November 2012).
- [5] A. Minamide, Indecomposability of various profinite groups arising from hyperbolic curves, *Math. J. Okayama Univ.* **60** (2018), pp. 175–208.
- [6] S. Mochizuki, On the Combinatorial Cuspidalization of Hyperbolic Curves, *Osaka J. Math.* **47** (2010), pp. 651–715.
- [7] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The Algebraic and Anabelian Geometry of Configuration Spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), pp. 75–131.
- [8] H. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), pp. 71–136.
- [9] H. Nakamura and N. Takao, Galois rigidity of pro- l pure braid groups of algebraic curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), pp. 1079–1102.
- [10] L. Ribes and P. Zalesskii, *Profinite Groups (Second Edition)*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics* **40**, Springer-Verlag (2010).

- [11] L. Schneps, The Grothendieck-Teichmüller group $\widehat{GT}$: a survey, *Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press (1997), pp. 183–203.