

Nonzero-sum stopped game について

— Equilibria in noncooperative Dynkin games —

高知大・理 大坪義夫 (Yoshio Ohtsubo)

§1. 序

Zero-sum stopped game の研究は, Dynkin [3] によって最初に行なわれ (従って, "Dynkin game" と呼ばれることもある)、その後多くの人々によって研究されている — 例えば、離散時間に関しては, Elbakidze [4], Kifer [5], Neveu [8], 連続時間に関しては, Bismut [1], Krylov [6], Stettner [10] などがある。

また, p -person noncooperative stopped game は, Kurano et al. [7], Yasuda et al. [11], Sakaguchi [9] など議論されている。

この報告では, [8] の拡張として, 2-person noncooperative Dynkin game を扱う。これは, [7] の拡張 ($p=2$ のとき) にもなっている。まずその問題を定式化し, 2つの場合について, Nash 均衡点及びそれに対応する Nash 均衡値を求める。

§2. 問題の定式化

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ -加族の増加列とする。 $\{X_n^i, n \geq 0\}$, $\{W_n^i, n \geq 0\}$, $\{Y_n^i, n \geq 0\}$ ($i=1, 2$) を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数の 6 つの列とし、いづれも $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ に適合 (adapted) しているものとする。

この報告を通して、次の仮定をする；

仮定

- (i) $\min(X_n^i, Y_n^i) \leq W_n^i \leq \max(X_n^i, Y_n^i)$, $\forall n \geq 0, \forall i=1, 2$.
- (ii) $E[\sup_n |X_n^i|] < \infty$, $E[\sup_n |Y_n^i|] < \infty$, $\forall i=1, 2$.

player I, II が 各々 stopping time τ, σ を用いたとき、
player I が得る利得は、

$$g_1(\tau, \sigma) \equiv W_\tau^1 I_{(\tau=\sigma<\infty)} + X_\tau^1 I_{(\tau<\sigma)} \\ + Y_\sigma^1 I_{(\sigma<\tau)} + \limsup_n W_n^1 I_{(\tau=\sigma=\infty)},$$

player II が得る利得は、

$$g_2(\tau, \sigma) \equiv W_\tau^2 I_{(\tau=\sigma<\infty)} + X_\tau^2 I_{(\tau<\sigma)} \\ + Y_\sigma^2 I_{(\sigma<\tau)} + \limsup_n W_n^2 I_{(\tau=\sigma=\infty)}$$

であるものとする。但し、 I_A は $A \in \mathcal{F}$ の indicator である。
このとき、player I (resp. II) の目的は、 $g_1(\tau, \sigma)$ を τ に関して (resp. $g_2(\tau, \sigma)$ を σ に関して) 最大にする ことである。

Λ_n を、 $\tau \geq n$ a.s. をみたす ($\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ に関する) stopping time τ の全体とする。

Def. 2.1.

$$(2.1) \quad \begin{cases} (\tau^*, \sigma^*) \in \Lambda_n \times \Lambda_n \\ E[q_1(\tau^*, \sigma^*)] \geq E[q_1(\tau, \sigma^*)], \quad \forall \tau \in \Lambda_n \\ E[q_2(\tau^*, \sigma^*)] \geq E[q_2(\tau^*, \sigma)], \quad \forall \sigma \in \Lambda_n \end{cases}$$

であるとき、 $(\tau^*, \sigma^*) \in$ n での Nash 均衡点であるという。

また、すべての $n \geq 0$ に対し (2.1) が成立するとき、単に Nash 均衡点 ということにする。

この報告では、次の 2 つの場合について述べる；

Case (I): $Y_n^1 \leq X_n^1, X_n^2 \leq Y_n^2, \forall n \geq 0$.

Case (II): $X_n^1 \leq Y_n^1, Y_n^2 \leq X_n^2, \forall n \geq 0$.

Case (II) では finite stage のみを扱う。

Remarks.

(i) $X_n^i = Y_n^i$ ($\forall n \geq 0, \forall i=1,2$) のときは、Kurano et al.

[7] の特別な場合； $(p,r)=(2,1)$ である。

(ii) Case (II) において、 $Y_n^2 < W_n^2 = X_n^2 = +\infty$ ($\forall n$) のときは、1-player に関する optimal stopping problem である (cf. Chow et al. [2])。

(iii) Case (II) において、 $X_n^1 = -X_n^2$, $Y_n^1 = -Y_n^2$, $W_n^1 = -W_n^2$ ($\forall n$) のときは、zero-sum Dynkin game である (e.g. [4], [8])。

Case (I), (II) の各々に対して、次のことを目的とする；

(i) Nash 均衡値を求めるために一つの value iteration を与えること。

(ii) Nash 均衡点の存在を示し、それを与えること。

記号について： $(a_1, b_1) \geq (a_2, b_2)$ とは、 $a_1 \geq a_2$ かつ $b_1 \geq b_2$ のことを意味する。また、 $\leq, >, <, =$ についても同様に定めることとする。

§3. Case (I): $Y_n^1 \leq X_n^1$, $X_n^2 \leq Y_n^2$, $n \geq 0$

$N > 0$ を任意に固定した整数とする。このとき、次のように $\{(\beta_n^N, \gamma_n^N), n=0, 1, \dots, N\}$ を定める；

$$(\beta_N^N, \gamma_N^N) = (W_N^1, W_N^2)$$

$$(3.1) \quad (\beta_n^N, \gamma_n^N) = \begin{cases} (E[\beta_{n+1}^N | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]) \\ \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1}^N | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]) \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

(3.1) は、strategies とし $"stop"$, $"continue"$ をもつ

bimatrix game

$$H_n^1 = \begin{bmatrix} (W_n^1, W_n^2) & (X_n^1, X_n^2) \\ (Y_n^1, Y_n^2) & (E[\beta_{n+1}^N | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^N | \mathcal{F}_n]) \end{bmatrix}$$

における一つの Nash 均衡値になっている。

そこで、 (β_n^N, γ_n^N) についていくつかの性質がわかる。

Lemma 3.1. (単調性) 各 n, N ($N \geq n$) に対し、

$$W_n^1 = \beta_n^N \leq \beta_n^N \leq \beta_{n+1}^N$$

$$W_n^2 = \gamma_n^N \leq \gamma_n^N \leq \gamma_{n+1}^N$$

$$(\text{証明}) \quad A_n^R = \{(X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1}^{n+R} | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1}^{n+R} | \mathcal{F}_n])\}$$

とおくと、各 $n \geq 0$ に対し、

$$\begin{aligned} (\beta_{n+1}^{n+1}, \gamma_{n+1}^{n+1}) &= \begin{cases} (E[W_{n+1}^1 | \mathcal{F}_n], E[W_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n]) & \text{on } A_n^1 \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n^1 \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} (X_n^1, Y_n^2) & \text{on } A_n^1 \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n^1 \end{cases} \\ &\geq (W_n^1, W_n^2) \\ &= (\beta_n^N, \gamma_n^N). \end{aligned}$$

次に、各 $m \geq 0$ とある $k \geq 1$ に対し、

$$(\beta_m^{m+k-1}, \gamma_m^{m+k-1}) \leq (\beta_m^{m+k}, \gamma_m^{m+k})$$

と仮定すると、明らかにすべての $n \geq 0$ に対し、 $A_n^R \subset A_n^{R+1}$

である。また、 $A_n^{R+1} - A_n^R$ 上では、 $W_n^1 \leq X_n^1 < E[\beta_{n+1}^{n+R+1} | \mathcal{F}_n]$

である。従って、各 $n \geq 0$ に対し、

$$\begin{aligned} \beta_n^{n+k} &= \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+k-1} | \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^k \\ W_n^1 & \text{off } A_n^k \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+k+1} | \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^k \\ W_n^1 & \text{off } A_n^k \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} E[\beta_{n+1}^{n+k+1} | \mathcal{F}_n] & \text{on } A_n^{k+1} \\ W_n^1 & \text{off } A_n^{k+1} \end{cases} \\ &= \beta_n^{n+k+1}. \end{aligned}$$

となる。同様にして、 $\gamma_n^{n+k} \leq \gamma_n^{n+k+1}$ が成り立つ。故に induction により、単調増加であることが示された。□

上の lemma により、 $\bar{\beta}_n \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_n^N$, $\bar{\gamma}_n \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_n^N$ が定義できる。

Lemma 3.2. $\{(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n), n \geq 0\}$ は次をみたす；各 $n \geq 0$ に対し

$$(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n) = \begin{cases} (E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{on } A_n \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{off } A_n \end{cases}$$

但し、 $A_n \equiv \{(X_n^1, Y_n^2) < (E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n])\}$.

(証明) (3.1) 式において、 $N \rightarrow \infty$ とすると、Lemma 3.1 から簡単に結論を得る。□

Lemma 3.3. $(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n)$ の最小性) 任意に $m \geq 0$ を固定する。

$\{\delta_n, n \geq m\}, \{\xi_n, n \geq m\} \in \{\mathcal{F}_n, n \geq m\}$ に適合していて次をみたす確率変数の 2 つの列とする; 各 $n \geq m$ に対して、

$$(3.2) \quad (\delta_n, \xi_n) \geq \begin{cases} (E[\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\delta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ (W_n^1, W_n^2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき、任意の $n \geq m$ に対して

$$(\delta_n, \xi_n) \geq (\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n).$$

(証明) 各 $n \geq m$ に対して 明らかに

$$(\beta_n^n, \gamma_n^n) = (W_n^1, W_n^2) \leq (\delta_n, \xi_n)$$

がある。今、任意の $n \geq m$ とある $k \geq 1$ に対して、

$$(\beta_n^{n+k-1}, \gamma_n^{n+k-1}) \leq (\delta_n, \xi_n)$$

と仮定すると Lemma 3.1 の証明と類似の方法により、各 $n \geq m$ に対して

$$(3.3) \quad (\beta_n^{n+k}, \gamma_n^{n+k}) \leq (\delta_n, \xi_n)$$

を得る。従って、induction により (3.3) はすべての n, k に対して成立するから、 $k \rightarrow \infty$ とし、各 $n \geq m$ に対して

$$(\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n) \leq (\delta_n, \xi_n)$$

を得る。□

Lemma 3.4.

$$\limsup_n \bar{\beta}_n = \limsup_n W_n^1, \quad \limsup_n \bar{\gamma}_n = \limsup_n W_n^2 \quad \text{a.s.}$$

(証明) $m \geq 0$ を任意に固定すると、

$$\{ (E[\sup_{k \geq m} W_k^1 | \mathcal{F}_n], E[\sup_{k \geq m} W_k^2 | \mathcal{F}_n]), n \geq m \}$$

は明らかに (3.2) 式を満たす。従って、Lemma 3.3 から

$$E[\sup_{k \geq m} W_k^1 | \mathcal{F}_n] \geq \bar{\beta}_n, \quad \forall n \geq m$$

となる。また、 $\{E[\sup_{k \geq m} W_k^1 | \mathcal{F}_n], n \geq m\}$ は martingale であるから、martingale の性質により、

$$\begin{aligned} \limsup_n \bar{\beta}_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sup_{k \geq m} W_k^1 | \mathcal{F}_n] \\ &= E[\sup_{k \geq m} W_k^1 | \mathcal{F}_\infty] \end{aligned}$$

となる。但し、 $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ である。 $\sup_{k \geq m} W_k^1$ は $\mathcal{F}_\infty$ 可測であるから、

$$\limsup_n \bar{\beta}_n \leq \sup_{k \geq m} W_k^1$$

となる。 m は任意であるから $m \rightarrow \infty$ とし、

$$\limsup_n \bar{\beta}_n \leq \limsup_n W_n^1$$

を得る。逆の不等式は、 $\bar{\beta}_n \geq W_n^1$ ($\forall n$) であることより明らかである。 $\bar{\gamma}_n$ についても同様にし示すことができる。 $\square$

Def. 3.1. $\forall n \geq 0$ に対し、

$$\tau_0 \equiv \tau_0(n) \equiv \inf \{ k \geq n \mid \bar{\beta}_k = W_k^1 \}$$

$$\sigma_0 \equiv \sigma_0(n) \equiv \inf \{ k \geq n \mid \bar{\gamma}_k = W_k^2 \}$$

とおく。但し、 $\{\}$ が空集合のときは $+\infty$ と定める。

Lemma 3.5. (i) $\forall n \geq 0$ に対し 2. a.s. 1 =

$$(1) \quad \bar{\beta}_n = W_n^1 \Leftrightarrow \bar{\beta}_n \leq X_n^1 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n \leq Y_n^2 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n = W_n^2$$

$$(2) \quad \bar{\beta}_n > X_n^1 \Leftrightarrow \bar{\gamma}_n > Y_n^2$$

$$(ii) \quad \tau_0 = \sigma_0 \quad \text{a.s.}$$

(証明) (i) は Lemma 3.2 からすぐにわかる。(ii) は (i) から明らかである。□

以下、 $\bar{\beta}_n, \bar{\gamma}_n$ の代わりに、 $\bar{\beta}(n), \bar{\gamma}(n)$ とかく = ともある。
また、 $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$ とおき、 $\tau \wedge \sigma = +\infty$ のとき、
 $\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma) = \limsup_n \bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}(\tau \wedge \sigma) = \limsup_n \bar{\gamma}_n$ と定める。
このとき、次の重要な lemma を得る。

Lemma 3.6. $\forall n \geq 0$ に対し 2.

$$(i) \quad \bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma) | \mathcal{F}_n] \geq E[g_1(\tau, \sigma) | \mathcal{F}_n], \forall \tau \in \Lambda_n$$

$$(ii) \quad \bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau \wedge \sigma) | \mathcal{F}_n] \geq E[g_2(\tau, \sigma) | \mathcal{F}_n], \forall \sigma \in \Lambda_n$$

(証明) (i) のみを示す。Lemma 3.2 から $\forall n \geq 0$ に対し、

$$\bar{\beta}(k) = E[\bar{\beta}(k+1) | \mathcal{F}_k], \quad n \leq \forall k < \sigma_0 \equiv \sigma_0(n)$$

であることは明らかである。従って 2. $\{\bar{\beta}(k \wedge \sigma_0); k \geq n\}$ は regular martingale となり、[8] の Prop. IV-5-24 と 25

から、任意の $\tau \in \Delta_n$ に対し、

$$\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau \wedge \tau_0) | \mathcal{F}_n]$$

が成り立つ。また、 $\tau_0 < \infty$ のとき $\bar{\beta}(\tau_0) = W_{\tau_0}^1$ であり、更に $\tau_0 > k$ のとき $\bar{\beta}(k) > X_k^1$ である。従って、 $W_n^1 \geq Y_n^1$ であることより Lemma 3.4 を用いて、

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(n) &= E[\bar{\beta}(\tau \wedge \tau_0) | \mathcal{F}_n] \\ &= E[\bar{\beta}(\tau) I_{(\tau < \tau_0)} + \bar{\beta}(\tau_0) I_{(\tau_0 < \tau)} \\ &\quad + \bar{\beta}(\tau_0) I_{(\tau = \tau_0 < \infty)} + \limsup_n \bar{\beta}_n I_{(\tau = \tau_0 = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &\geq E[X_\tau^1 I_{(\tau < \tau_0)} + Y_{\tau_0}^1 I_{(\tau_0 < \tau)} \\ &\quad + W_{\tau_0}^1 I_{(\tau = \tau_0 < \infty)} + \limsup_n W_n^1 I_{(\tau = \tau_0 = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[q_1(\tau, \tau_0) | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

となる。また、Lemma 3.5-(i) より、

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(n) &= E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \tau_0) | \mathcal{F}_n] = E[W_{\tau_0}^1 | \mathcal{F}_n] \\ &= E[q_1(\tau_0, \tau_0) | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

である。故に、(i) が示された。□

Theorem 3.1. (τ_0, τ_0) は Nash 均衡点であり、また、それに対応する Nash 均衡値は、

$$\begin{aligned} (E[q_1(\tau_0, \tau_0)], E[q_2(\tau_0, \tau_0)]) &= (E[\bar{\beta}(\tau_0 \wedge \tau_0)], E[\bar{\gamma}(\tau_0 \wedge \tau_0)]) \\ &= (E[\bar{\beta}_n], E[\bar{\gamma}_n]) \\ &\quad \left\langle \text{for the starting time } n \right\rangle \end{aligned}$$

(証明) Lemma 3.6 から 明らかである。□

次に別の Nash 均衡点 を求めよう。その前に 下の条件 を導入する；

$$(A.1) \quad X_n^1 = W_n^1, \quad Y_n^2 = W_n^2, \quad \forall n \geq 0.$$

Lemma 3.7. (A.1) のもとで、Lemma 3.2 の結果は 次の (i)(ii) と同値である；

(i) 各 $n \geq 0$ に対し、

$$\bar{\beta}_n = \begin{cases} \max(X_n^1, E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{if } Y_n^2 < E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ X_n^1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}_n = \begin{cases} \max(Y_n^2, E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{if } X_n^1 < E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ Y_n^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(ii) 各 $n \geq 0$ に対し、

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_n &= (X_n^1 - E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I(Y_n^2 < E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ &\quad + (X_n^1 - E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I(Y_n^2 \geq E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ &\quad + E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ \bar{\gamma}_n &= (Y_n^2 - E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I(X_n^1 < E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ &\quad + (Y_n^2 - E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I(X_n^1 \geq E[\bar{\beta}_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ &\quad + E[\bar{\gamma}_{n+1} | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

証明は明らかである。

Def. 3.2. 各 $n \geq 0$ に対し

$$\tau^* \equiv \tau^*(n) \equiv \inf \{ k \geq n \mid X_k' \geq E[\bar{\beta}_{k+1} | \mathcal{F}_k] \}$$

$$\sigma^* \equiv \sigma^*(n) \equiv \inf \{ k \geq n \mid Y_k^2 \geq E[\bar{\gamma}_{k+1} | \mathcal{F}_k] \}$$

とおく。但し、 $\{\}$ が空のときは $+\infty$ とする。

このとき、必ずしも $\tau^* = \sigma^*$ ではないが、次の性質をもつ：

Lemma 3.8.

(i) $\tau_0 \leq \tau^*, \sigma_0 \leq \sigma^* \quad \text{a.s.}$

(ii) $\tau_0 \wedge \sigma_0 = \tau^* \wedge \sigma^* = \tau^* \wedge \sigma_0 = \tau_0 \wedge \sigma^* = \tau_0 = \sigma_0 \quad \text{a.s.}$

(証明) 定義と Lemma 3.2 と 3.7 から簡単にわかる。□

Lemma 3.9. (A.1) をみたすものとする。各 $n \geq 0$ に対し、

(i) $\bar{\beta}(n) = E[\bar{\beta}(\tau^* \wedge \sigma^*) | \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau^*, \sigma^*) | \mathcal{F}_n]$

$$\bar{\beta}(n) \geq E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*) | \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau, \sigma^*) | \mathcal{F}_n], \quad \forall \tau \in \Lambda_n$$

(ii) $\bar{\gamma}(n) = E[\bar{\gamma}(\tau^* \wedge \sigma^*) | \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau^*, \sigma^*) | \mathcal{F}_n]$

$$\bar{\gamma}(n) \geq E[\bar{\gamma}(\tau^* \wedge \sigma) | \mathcal{F}_n] \geq E[g_2(\tau^*, \sigma) | \mathcal{F}_n], \quad \forall \sigma \in \Lambda_n$$

(証明) Lemma 3.8 より、 $\tau^* \wedge \sigma^* = \tau_0 \wedge \sigma_0$ であるから、

Lemma 3.6-(i), (ii) の上式によつて、この lemma (i) (ii) の上式も (条件 (A.1) 下で) 成立する。

以下、(i) の下式を示す。Lemma 3.7-(i) より、各 $n \geq 0$ に対

し 2. $n \leq k < \sigma^* = \sigma^*(n)$ のとき,

$$\bar{\beta}(k) = \max(X_k', E[\bar{\beta}(k+1)|\mathcal{F}_k]) \geq E[\bar{\beta}(k+1)|\mathcal{F}_k]$$

である。従って 2. $\{\bar{\beta}(k \wedge \sigma^*), k \geq n\}$ は, regular supermartingale となり, [8] より 各 $n \geq 0$ と任意の $\tau \in \Lambda_n$ に対し 2.

$$\bar{\beta}(n) \geq E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*)|\mathcal{F}_n]$$

が成立する。さらに,

$$\begin{aligned} E[\bar{\beta}(\tau \wedge \sigma^*)|\mathcal{F}_n] &= E[\bar{\beta}(\tau) I_{(\tau \leq \sigma^*)} + \bar{\beta}(\sigma^*) I_{(\sigma^* < \tau)} \\ &\quad + \limsup_n \bar{\beta}_n I_{(\tau = \sigma^* = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &\geq E[X_\tau' I_{(\tau \leq \sigma^*)} + Y_{\sigma^*}' I_{(\sigma^* < \tau)} \\ &\quad + \limsup_n X_n' I_{(\tau = \sigma^* = \infty)} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[q_1(\tau, \sigma^*)|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

が成り立つ。これで証明は十分である。□

Theorem 3.2. (A.1) のもとで,

- (i) (τ^*, σ^*) は Nash 均衡点である。
- (ii) 2つの Nash 均衡点 $(\tau_0, \sigma_0), (\tau^*, \sigma^*)$ は交換可能である。即ち, $(\tau_0, \sigma^*), (\tau^*, \sigma_0)$ も Nash 均衡点である。更に, 上の 4つの Nash 均衡点は同じ均衡値をもつ。

(証明) (i) Lemma 3.9 からすぐわかる。

(ii) (i) と Lemma 3.6, 3.9 と Theorem 3.1 から簡単に証明できる。□

§4. Case (II): $X_n^1 \leq Y_n^1$, $Y_n^2 \leq X_n^2$, $n \geq 0$

この節では、finite stage (N -stage とする) を扱う。

△. $\Lambda_n^N \equiv \{\tau \in \Lambda_n \mid \tau \leq N \text{ a.s.}\}$ とおく。

$\{(\beta_n, \gamma_n), n=0, 1, 2, \dots, N\}$ を次のように定める；

$$(\beta_N, \gamma_N) = (W_N^1, W_N^2)$$

$$(4.1) \quad (\beta_n, \gamma_n) = \begin{cases} (E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ \quad \text{if } (X_n^1, Y_n^2) < (E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \\ (Y_n^1, Y_n^2) \\ \quad \text{if } X_n^1 < E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n] \text{ \& } Y_n^2 \geq E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ (X_n^1, X_n^2) \quad \text{if } X_n^1 \geq E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n] \end{cases}$$

$$n=0, 1, \dots, N-1.$$

これは、§3 と同様に、bimatrix game

$$H_n^2 \equiv \begin{bmatrix} (W_n^1, W_n^2) & (X_n^1, X_n^2) \\ (Y_n^1, Y_n^2) & (E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) \end{bmatrix}$$

における一つの Nash 均衡値になっている。注意として、

$(X_n^1, Y_n^2) \geq (E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n], E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n])$ のときは、均衡値

は (X_n^1, X_n^2) と (Y_n^1, Y_n^2) の 2 つあるが、この報告では、す

べての $n \geq 0$ に対して、 (X_n^1, X_n^2) に統一する。そうでないよ

うに定めたときは、以下と同様の議論をすることができ、従

って、 N -stage game であることも考慮すると、このように

方法によって求められる Nash 均衡値 (stopped game にお

ける) は、 2^N 個あることになる。

明らかに、各 $n \leq N$ に対し、

$$(\beta_n, \gamma_n) \geq (X_n^1, Y_n^2)$$

であり、また、(4.1) と同値な表現として、次を得る；

$$A_n \equiv \{X_n^1 < E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n] \text{ \& } Y_n^2 \geq E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

$$B_n \equiv \{X_n^1 \geq E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

とおくと、各 $n \leq N-1$ に対し、

$$(i) \quad \beta_n = \begin{cases} \max(X_n^1, E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{off } A_n \\ Y_n^1 & \text{on } A_n \end{cases}$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \max(Y_n^2, E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) & \text{off } B_n \\ X_n^2 & \text{on } B_n \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \beta_n &= (X_n^1 - E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I_{A_n^c} \\ &\quad + (Y_n^1 - E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I_{A_n} + E[\beta_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ \gamma_n &= (Y_n^2 - E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n])^+ I_{B_n^c} \\ &\quad + (X_n^2 - E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]) I_{B_n} + E[\gamma_{n+1} | \mathcal{F}_n]. \end{aligned}$$

Def. 4.1. 各 $n \geq 0$ に対し、

$$\tau_0 \equiv \tau_0(n) \equiv \inf \{k \mid \beta_k = X_k^1, n \leq k \leq N\}$$

$$\sigma_0 \equiv \sigma_0(n) \equiv \inf \{k \mid \gamma_k = Y_k^2, n \leq k \leq N\}$$

とおく。但し、そのような k が存在しないときは N とする。

次の条件を導入する；

$$(C.1): (\forall n) (X_n^2 = Y_n^2 \Rightarrow X_n^1 = Y_n^1)$$

$$(C.2): (\forall n) (X_n^1 = Y_n^1 \Rightarrow X_n^2 = Y_n^2)$$

Lemma 4.1.

$$(i) (C.1) \text{ のもとで, } \sigma_0 < N \Rightarrow \beta_{\sigma_0} = Y_{\sigma_0}^1 \text{ a.s.}$$

$$(ii) (C.2) \text{ のもとで, } \tau_0 < N \Rightarrow Y_{\tau_0} = X_{\tau_0}^2 \text{ a.s.}$$

$$(iii) \tau_0 = \sigma_0 = k < N \Rightarrow X_k^1 = Y_k^1 \text{ or } X_k^2 = Y_k^2 \text{ a.s.}$$

(証明) τ_0, σ_0 の定義と (4.1) 式から簡単に証明できる。□

以下、 $\beta_n = \beta(n)$, $\gamma_n = \gamma(n)$ とかくともある。

Lemma 4.2.

$$(i) (C.1) \text{ のもとで, 各 } n \leq N \text{ に対し,}$$

$$\beta(n) = E[\beta(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_1(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\beta(n) \geq E[\beta(\tau \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] \geq E[g_1(\tau, \sigma_0) | \mathcal{F}_n], \forall \tau \in \Lambda_n^N$$

$$(ii) (C.2) \text{ のもとで, 各 } n \leq N \text{ に対し,}$$

$$\gamma(n) = E[\gamma(\tau_0 \wedge \sigma_0) | \mathcal{F}_n] = E[g_2(\tau_0, \sigma_0) | \mathcal{F}_n]$$

$$\gamma(n) \geq E[\gamma(\tau_0 \wedge \sigma) | \mathcal{F}_n] \geq E[g_2(\tau_0, \sigma) | \mathcal{F}_n], \forall \sigma \in \Lambda_n^N$$

(証明) Lemma 4.1 を用いて、Lemma 3.6 を使えば、Lemma 3.9 と同様な方法によって証明することが出来る。□

Theorem 4.1. (C.1), (C.2) のもとで、 (τ_0, σ_0) は Nash 均衡点である。

証明は Lemma 4.2 から明らかである。

Def. 4.2. 各 $n \geq 0$ に対し、

$$\tau^* \equiv \tau^*(n) \equiv \inf \{k \mid X_k' \geq E[\beta_{k+1} | \mathcal{F}_k], n \leq k < N\}$$

$$\sigma^* \equiv \sigma^*(n) \equiv \inf \left\{ k \mid X_k' < E[\beta_{k+1} | \mathcal{F}_k] \text{ \& } Y_k^2 \geq E[Y_{k+1}^2 | \mathcal{F}_k] \right\}$$

$$n \leq k < N$$

とおく、但し、その方が存在しないときは N とおく。

Lemma 4.3. (i) $\tau_0 \leq \tau^*, \sigma_0 \leq \sigma^*, \tau_0 \wedge \sigma_0 = \tau^* \wedge \sigma^* = \tau_0 \wedge \sigma^* = \tau^* \wedge \sigma_0$ a.s.

$$(ii) \quad \tau^* = \sigma^* \Rightarrow \tau^* = \sigma^* = N$$

$$(iii) \quad \tau^* < N \Rightarrow \beta_{\tau^*} = X_{\tau^*}', \quad Y_{\tau^*}^2 = X_{\tau^*}^2$$

$$(iv) \quad \sigma^* < N \Rightarrow \beta_{\sigma^*} = Y_{\sigma^*}', \quad Y_{\sigma^*}^2 = Y_{\sigma^*}^2$$

証明は (4.1) 式を用いれば簡単にできる。

Lemma 4.4. $\tau_0, \sigma_0 \in \tau^*, \sigma^*$ におきかえることにすると、

Lemma 4.2 の結果が、(C.1), (C.2) の条件なしで成立する。

証明は、Lemma 4.1 と 4.3 の違いを考慮して、Lemma 4.2 と同様にしてできる。

Theorem 4.2 (i) (τ^*, σ^*) は Nash 均衡点, である。

(ii) (C.1) のもとで, (τ^*, σ_0) は Nash 均衡点, である。

(iii) (C.2) のもとで, (τ_0, σ^*) は Nash 均衡点, である。

(iv) (C.1) と (C.2) のもとで, 4つの Nash 均衡点 (τ_0, σ_0) , (τ^*, σ^*) , (τ^*, σ_0) , (τ_0, σ^*) は, 同じ均衡値をもつ。

(証明) Lemma 4.2 と 4.4 から明らかである。□

参考文献

- [1] Bismut, J.-M. (1977). Sur un probleme de Dynkin. Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Gebiete, 39, 31-53
- [2] Chow, Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D. (1971). Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton Mifflin, Boston.
- [3] Dynkin, E.B. (1969). Game variant of a problem on optimal stopping. Soviet Math. Dokl. 10, 270-274.
- [4] Elbakidze, N.V. (1976). The construction of the cost and optimal policies in a game problem of stopping a Markov process. Theor. Probability Appl. 21, 163-168.
- [5] Kifer, Yu.I. (1971). Optimal stopped games. Theor. Probability Appl. 16, 185-189.
- [6] Krylov, N.V. (1971). Control of Markov processes and W-spaces. Math. USSR-Isv. 5, 233-266.
- [7] Kurano, M., Yasuda, M. and Nakagami, J. (1980). Multi-variate stopping problem with a majority rule. J. Oper. Res. Japan, 23, 205-222.
- [8] Neveu, J. (1975). Discrete-Parameter Martingales. North-Holland, Amsterdam.

- [9] Sakaguchi, M. (1980). Non-zero-sum games related to the secretary problem. J. Oper. Res. Japan, 23, 287-293.
- [10] Stettner, L. (1982). Zero-sum Markov games with stopping and impulsive strategies. Appl. Math. Optim. 9, 1-24.
- [11] Yasuda, M., Nakagami, J. and Kurano, M. (1982). Multi-variate stopping problems with a monotone rule. J. Oper. Res. Japan, 25, 334-350.