

S 族内の RADIUS PROBLEM

小中澤 聖二 (SEIJI KONAKAZAWA)

東京工業高等専門学校

1. はじめに

S を単位円板 D 上で定義された通常の単葉函数の族であるとする,

$$S = \left\{ f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \mid \text{analytic and univalent in } D \right\}. \quad (1.1)$$

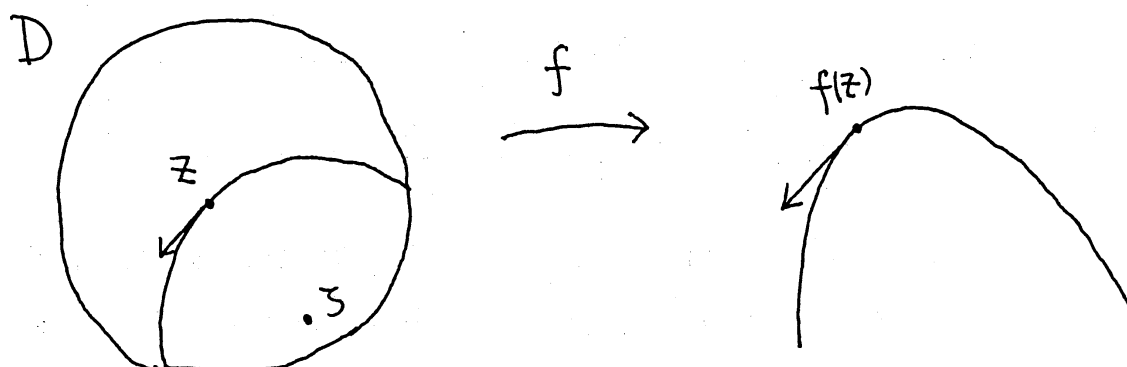
[1] 及び [2] に従って, 次の uniformly convex functions として知られている S の部分族 UCV を定義する,

$$UCV = \left\{ f(z) \in S \mid \operatorname{Re} \left\{ 1 + (z - \zeta) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0 \text{ in } D \times D \right\}. \quad (1.2)$$

この UCV の条件は次と同値である,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \text{ in } D. \quad (1.3)$$

UCV に属する函数は D 内の全ての円弧 (但し, その中心も D に入っているもの) を convex arc に写す.



そこで order α ($0 \leq \alpha < 1$) 付きの族 uniformly convex functions of order α を次で定義しよう,

$$UCV_\alpha = \left\{ f(z) \in S \mid \operatorname{Re} \left\{ 1 + (z - \zeta) \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \alpha \text{ in } D \times D \right\}. \quad (1.4)$$

[2, Theorem 1] にあるのと同じ考察により, この条件は次と同値であることがわかる,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)} \right\} \geq \left| \frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)} \right| \text{ in } D. \quad (1.5)$$

また, 通常の order α ($0 \leq \alpha < 1$) の starlike functions と convex functions の族を,

$$S_\alpha^* = \left\{ f(z) \in S \mid \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \alpha \text{ in } D \right\}, \quad (1.6)$$

及び

$$C_\alpha = \left\{ f(z) \in S \mid \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \alpha \text{ in } D \right\}, \quad (1.7)$$

とそれぞれ表わす.

以下の Theorem 1 及び Theorem 2 は S 内の radius problem に係わるもので, また Theorem 3 は UCV と C_α に関する包含関係のための条件を与えるものである. それは, F. Rønning の uniformly starlike functions と呼ばれる族 UST と S_α^* に関する包含問題,

“Find the largest $\alpha \geq 0$ such that $UST \subset S_\alpha^*$ ” [3]

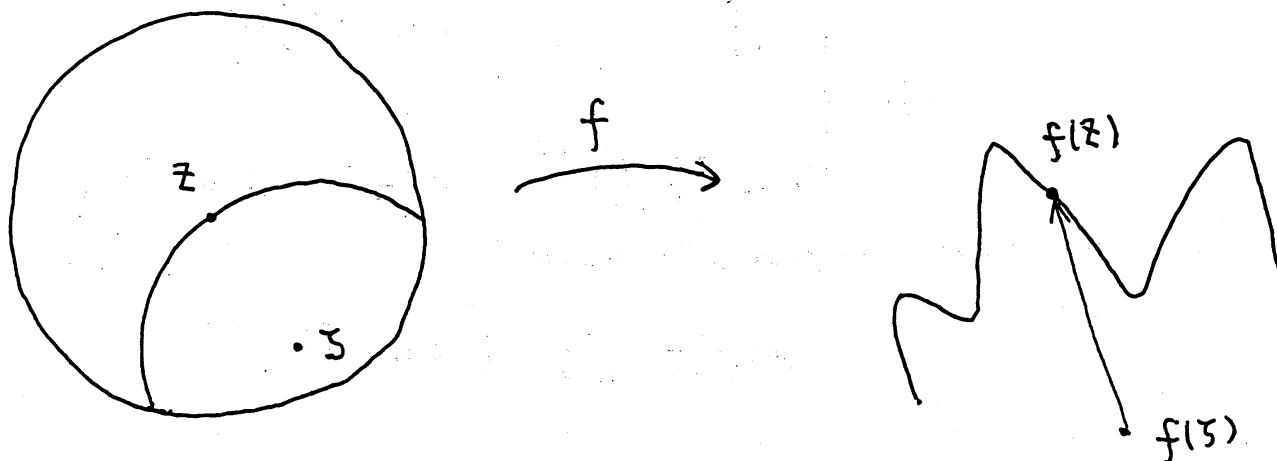
に類似するものであるが one variable characterization (1.3) のおかげで convex case はわかり易い. F. Rønning の問題との類似の言い方をすると

“Find the largest $\alpha \geq 0$ such that $UCV \subset C_\alpha$ ”

の解は, “ $\alpha = \frac{1}{2}$ ” ということになる. ちなみに UST の定義は

$$UST = \left\{ f(z) \in S \mid \operatorname{Re} \frac{f(z) - f(\zeta)}{(z - \zeta)f'(z)} \geq 0 \text{ in } D \times D \right\}$$

であり, z と ζ が分かち難い. この条件は D 内の全ての円弧 (但し, その中心 ζ も D 内に入っているもの) を $f(\zeta)$ に関する星型の curve に写すことを意味している. $UST \subset S_0^*$ は自明であり, F. Rønning 自身は $UST \not\subset S_{1/2}^*$ を示している.



Theorem 1. The radius of uniform convexity of order α ($0 \leq \alpha < 1$) in S is

$$\frac{4 - \sqrt{13 + 2\alpha + \alpha^2}}{3 + \alpha}.$$

これは, $\frac{4 - \sqrt{13 + 2\alpha + \alpha^2}}{3 + \alpha}$ が, 全ての $f(z)$ in S と $r \leq R$ なる r に対して $\frac{1}{r}f(rz)$ が UCV_α に属する, となるような R の上限であることを意味する.

Theorem 2. For $f(z)$ in S , we have the following sharp inequality.

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \begin{cases} \frac{1 - |z|}{1 + |z|} & \text{if } 0 \leq |z| \leq \frac{e-1}{e+1}, \\ \cos x_0 \left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \right)^{\cos x_0} & \text{if } \frac{e-1}{e+1} < |z| \leq \tanh \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

The value of x_0 is defined by the equation,

$$\log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = \frac{x_0}{\sin x_0} \quad \left(0 < x_0 \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Corollary. The radius of starlikeness of order α ($0 \leq \alpha < 1$) in S is the unique root r_0 ($0 < r_0 \leq \tanh \frac{\pi}{4}$) of the equation

$$F(r) = \alpha,$$

where

$$F(r) = \begin{cases} \frac{1-r}{1+r} & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{e-1}{e+1}, \\ \cos x_0 \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{\cos x_0} & \text{if } \frac{e-1}{e+1} < r \leq \tanh \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

The value of x_0 is defined by the equation ,

$$\log \frac{1+r}{1-r} = \frac{x_0}{\sin x_0} \quad \left(0 < x_0 \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Theorem 3. $UCV \subset C_\alpha$ if and only if $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

2. THEOREM 1 の証明

[3, Theorem 4] の証明と同様, sharp estimate

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \quad (2.1)$$

for $|z| = r < 1$, を使う.

$$w = u + iv = \frac{zf''(z)}{(1-\alpha)f'(z)}$$

とおけば (1.5) 及び (2.1) はそれぞれ,

$$\operatorname{Re}\{1+w\} \geq |w| \quad (2.2)$$

$$\left| w - \frac{2r^2}{(1-\alpha)(1-r^2)} \right| \leq \frac{4r}{(1-\alpha)(1-r^2)}, \quad (2.3)$$

となる. そこで, いつ disk (2.3) が放物線 (2.2) の中にあるか見てやる. disk (2.3) は帯状領域

$$\frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \leq u \leq \frac{2r(r+2)}{(1-\alpha)(1-r^2)} \quad (2.4)$$

にあり, 放物線 (2.2) の頂点は $(u, v) = (-\frac{1}{2}, 0)$ なので, 次が必要である,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{2r(r-2)}{(1-\alpha)(1-r^2)}.$$

よって,

$$r \leq \frac{4 - \sqrt{13 + 2\alpha + \alpha^2}}{3 + \alpha}. \quad (2.5)$$

逆に, 条件 (2.5) を仮定する. (2.3) より, その boundary は,

$$v^2 = \left(\frac{4r}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \right)^2 - \left(u - \frac{2r^2}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \right)^2 \quad (2.6)$$

を満たす. 他方, (2.2) は,

$$1 + 2u - v^2 \geq 0 \quad (2.7)$$

を意味する. (2.6) を (2.7) に代入し,

$$\left(u - \frac{(3 - \alpha)r^2 - (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \right)^2 - \frac{4r^2 ((1 - \alpha)r^2 + (3 + \alpha))}{(1 - \alpha)^2(1 - r^2)^2} \geq 0. \quad (2.8)$$

従って (2.8) が 条件 (2.5) のもとに interval (2.4) 内で成立することを確かめればよい.

ここで不等式,

$$\frac{(3 - \alpha)r^2 - (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \leq \frac{2r(r - 2)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \quad (2.9)$$

は,

$$r \leq \frac{-2 + \sqrt{5 - 2\alpha + \alpha^2}}{1 - \alpha}, \quad (2.10)$$

と同値であり, また簡単な計算により,

$$\frac{4 - \sqrt{13 + 2\alpha + \alpha^2}}{3 + \alpha} < \frac{-2 + \sqrt{5 - 2\alpha + \alpha^2}}{1 - \alpha} \quad (2.11)$$

(但し $0 \leq \alpha < 1$) , が解るので (2.9) は条件 (2.5) のもとに成立することを知る.

よって, (2.8) が $u = \frac{2r(r - 2)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)}$ で成り立つなら, それは interval (2.4) 全域で成り立つ. そして実際,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2r(r - 2)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} - \frac{(3 - \alpha)r^2 - (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \right)^2 - \frac{4r^2 ((1 - \alpha)r^2 + (3 + \alpha))}{(1 - \alpha)^2(1 - r^2)^2} \\ &= \frac{(3 + \alpha)r^2 - 8r + (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(1 - r^2)} \end{aligned}$$

は条件 (2.5) のもとに non-negative である. 以上で Theorem 1 が示された.

3. THEOREM 2 の証明

$\frac{zf'(z)}{f(z)}$ ($f \in S, |z| = r < 1$) の range の境界の F. Rønning's による parametrization ,

$$W_r(\theta) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\cos \theta} \left(\cos \left(\sin \theta \log \frac{1+r}{1-r} \right) + i \sin \left(\sin \theta \log \frac{1+r}{1-r} \right) \right), \quad (3.1)$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ [2] を用いる. 両辺の real part をとって,

$$\operatorname{Re} W_r(\theta) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\cos \theta} \cos \left(\sin \theta \log \frac{1+r}{1-r} \right). \quad (3.2)$$

ここで (3.2) の右辺が全ての θ で non-negative であるとする,

$$\cos \left(\sin \theta \log \frac{1+r}{1-r} \right) \geq 0 \text{ for all } \theta.$$

これより,

$$\log \frac{1+r}{1-r} \leq \frac{\pi}{2},$$

よって,

$$r \leq \tanh \frac{\pi}{4}.$$

先ず, $r < \tanh \frac{\pi}{4}$ と仮定し, (3.2) の両辺の logarithm をとり,

$$\log \operatorname{Re} W_r(\theta) = \cos \theta \log \frac{1+r}{1-r} + \log \left(\cos \left(\sin \theta \log \frac{1+r}{1-r} \right) \right). \quad (3.3)$$

ここで,

$$R := \log \frac{1+r}{1-r},$$

とおくと (3.3) の右辺は,

$$R \cos \theta + \log (\cos (R \sin \theta)), \quad (3.4)$$

となる. 最小値を求めるので,

$$R \cos \theta = -\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \theta}$$

としてよい。そこで、

$$x := R \sin \theta,$$

とおくと (3.4) は、

$$\Psi(x) := -\sqrt{R^2 - x^2} + \log \cos x,$$

$-R \leq x \leq R$, となる。この $\Psi(x)$ ($-R \leq x \leq R$) の最小値を知りたい。その導関数は、

$$\Psi'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \tan x.$$

(I) $R \leq 1$ であれば、

$$\min_{-R \leq x \leq R} \Psi(x) = \Psi(0) = -R,$$

これは、

$$\operatorname{Re} W_r(\theta) \geq \frac{1-r}{1+r},$$

を意味する。よって、

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \text{ for } |z| \leq \frac{e-1}{e+1}.$$

(II) $1 < R < \frac{\pi}{2}$ であれば、等式

$$R = \frac{x_0}{\sin x_0},$$

を満たす unique な解 x_0 ($0 < x_0 < R$) があり、そこで最小値がとられる、

$$\min_{-R \leq x \leq R} \Psi(x) = \Psi(x_0).$$

これは、

$$\operatorname{Re} W_r(\theta) \geq e^{\Psi(x_0)},$$

を意味し、

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq \cos x_0 \left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^{\cos x_0},$$

for $\frac{e-1}{e+1} < |z| < \tanh \frac{\pi}{4}$, ここに, x_0 ($0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$) は, 等式

$$\log \frac{1+|z|}{1-|z|} = \frac{x_0}{\sin x_0},$$

の unique な解, を知る. さて, $r = \tanh \frac{\pi}{4}$, つまり $R = \frac{\pi}{2}$, であれば (3.2) は

$$\operatorname{Re} W_{\tanh \frac{\pi}{4}}(\theta) = e^{\frac{\pi}{2} \cos \theta} \cos \left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \right) \geq 0,$$

すなわち,

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq 0 \text{ if } |z| = \tanh \frac{\pi}{4},$$

となり, これは case (II) に含めてよい. 以上で Theorem 2 が示された.

さて, $F(|z|)$ を Theorem 2 の不等式の右辺とすると, これは $|z|$ が 0 から $\tanh \frac{\pi}{4}$ まで増加するとき, 1 から 0 まで減少する. よって order α ($0 \leq \alpha < 1$) に対して, unique な解 r_0 ($0 < r_0 \leq \tanh \frac{\pi}{4}$) があり $F(r_0) = \alpha$, を満たしその r_0 は radius of starlikeness of order α を与える. 例えば,

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{3} \text{ if } \alpha = \frac{1}{2}, & r_0 &= \frac{e-1}{e+1} \text{ if } \alpha = \frac{1}{e}, \\ r_0 &= \tanh \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \text{ if } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}, & r_0 &= \tanh \frac{\pi}{4} \text{ if } \alpha = 0, \end{aligned}$$

などとなる.

4. THEOREM 3 の証明

$w = u + iv = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ とおくと, UCV の条件式 (1.3) と C_α の条件式 (1.7) はそれぞれ

$$1 + 2u \geq v^2 \tag{4.1}$$

及び

$$u \geq \alpha - 1, \tag{4.2}$$

となる. よって, 放物線 (4.1) が half-plane (4.2) に含まれるための条件は

$$\alpha \leq \frac{1}{2}.$$

実際，条件の必要性は不等式 (2.1) の sharpness，Koebe 函数の役割，に依っている。

REFERENCES

1. A. W. Goodman, *On uniformly starlike functions*, J. Math. Anal. Appl. 155 (1991), 364–370.
2. F. Rønning, *Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 189–196.
3. ———, *Some radius results for univalent functions*, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995), 319–327.

193 東京都 八王子市 梶田町 1220-2
E-mail address: kona@tokyo-ct.ac.jp