

Hyponormal 作用素と uniformly convexity

上越教育大学 長 宗雄

Abstract. The purpose of this lecture is to show that if an operator T is a hyponormal operator on a uniformly convex space then $\text{co } \sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$.

X is complex Banach space とし. X^* is X の dual space とする.

また.

$$\pi = \{(x, f) \in X \times X^* : \|f\| = f(x) = \|x\| = 1\}$$

とする. $T \in B(X)$ に対して.

$$V(T) = \{f(Tx) : (x, f) \in \pi\} : \text{spatial numerical range of } T.$$

$$V(B(X), T) = \{F(T) : F \in B(X)^*, \|F\| = F(I) = 1\} : \text{numerical range of } T.$$

と定義する. このとき, 次の性質は, 良く知られている.

$$\text{co } \sigma(T) \subset \overline{V(T)}, \quad \overline{\text{co } V(T)} = V(B(X), T).$$

[定義].

$$(1) T : \text{hermitian} \Leftrightarrow V(T) \subset \mathbb{R}$$

$$(2) T : \text{hyponormal} \Leftrightarrow \exists H, K : \text{hermitian} ; T = H + iK \Leftrightarrow i(HK - KH) \geq 0$$

$$(3) T : \text{normal} \Leftrightarrow \exists H, K : \text{hermitian} ; T = H + iK \Leftrightarrow HK = KH.$$

$\varepsilon \in \mathbb{L}$. $T \geq 0$ とは, $V(T) \subset \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R}; a \geq 0\}$ のときをいう.

Bonsall and Duncan [3] により, T が normal 作用素であるならば:

任意の Banach space 上

$$\omega \sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が成立する.

[定義]

Banach space X : uniformly convex $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow \|x + y\| \leq 2(1 - \delta).$

次の2つの定理を示すことが目的である.

定理 1. X は uniformly convex とする. $T = H + iK \in X$ 上の hyponormal 作用素とする. このとき次の (1), (2) が成立する.

$$(1). a \in \sigma(H) \Rightarrow \exists b \in \sigma(K); a + ib \in \sigma(T).$$

$$(2). b' \in \sigma(K) \Rightarrow \exists a' \in \sigma(H); a' + ib' \in \sigma(T).$$

定理 2. X は uniformly convex とする. $T = H + iK \in X$ 上の hyponormal 作用素とするとき

$$\omega \sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が成立する.

証明のための準備として, Bonsall and Duncan [4] の Lemma 20.3 と Corollary 20.10 より 次の lemma を得る.

Lemma 1. $H \in \text{Hermitian}$ とする. $x \in X; \|x\|=1$ とする.

$$Hx=0 \Rightarrow \exists f \in X^*; (x, f) \in \pi \text{ かつ } H^*f=0.$$

Lemma 2. $X \in \text{uniformly convex}$ とする. $T \geq 0$ とし.

$$(x, f) \in \pi \text{ に対して } f(Tx)=0 \Rightarrow Tx=0.$$

この lemma は Mattila [9] により. X が strictly C -convex としても成立する.

次に. 複素数の有界数列の住す空間上の Banach limit Lim として fix して. X の有界列の住す空間 $\tilde{X} \in \text{Lim } \|x_n\|^2=0$ とする数列 $\{x_n\}$ の全体 N により $\tilde{X}/N$ を作り. この completion を X° とする.

norm は.

$$\|\{x_n\} + N\| = (\text{Lim } \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

である. また. $T \in B(X)$ に対して.

$$T^\circ(\{x_n\} + N) = \{Tx_n\} + N$$

とする T° が対応させることにより

$$T \rightarrow T^\circ : B(X) \rightarrow B(X^\circ)$$

は. isometric isomorphism onto a closed subalgebra of $B(X^\circ)$ となり. さらに. de Barra [1] により

$$(*) \quad \sigma(T) = \sigma(T^\circ), \quad \sigma_\pi(T) = \sigma_\pi(T^\circ) = \sigma_p(T) \text{ かつ } \overline{\omega V(T)} = \overline{V(T^\circ)}$$

であることが知られている. さらに次の lemma が成立する.

Lemma 3. (de Barra [2]).

X : uniformly convex $\Leftrightarrow X^\circ$: uniformly convex.

定理 1 の証明.

(1) について. $\sigma(H) = \sigma_\pi(H)$ であるので. extension space X° を考えたと (*) より. $a \in \sigma_p(H^\circ)$ であるので. $K_n(H^\circ - a)$ は X° の non-zero subspace である.

$x^\circ \in K_n(H^\circ - a)$; $\|x^\circ\| = 1$ とすると. Lemma 1 より.

$$\exists f \in X^{\circ*}; \|f\| = f(x^\circ) = 1 \text{ かつ } (H^{\circ*} - a)f = 0.$$

よって. $C = i(HK - KH)$ とおくと. 仮定から $C \geq 0$ かつ (*) より $C^\circ \geq 0$.

$$f(C^\circ x^\circ) = i \hat{x}^\circ (K^{\circ*} (H^{\circ*} - a)f) - i f(K^\circ (H^\circ - a)x) = 0.$$

よって. Lemma 3 より. X° は uniformly convex であるので.

さらに Lemma 2 により

$$C^\circ x^\circ = 0$$

である. 従って. $(H^\circ - a)K^\circ x = 0$ を得る.

以上のことから. $K_n(H^\circ - a)$ は K° で invariant であることが示される.

従って. (*) により

$$\exists b \in \mathbb{R}, \exists y_0^\circ \in K_n(H^\circ - a); K^\circ y_0^\circ = b y_0^\circ$$

が言える. このことから (*) により.

$$b \in \sigma(K) \quad \text{かつ} \quad a+ib \in \sigma(T)$$

となるので (1) が示されたことになる。

(2) についても 同様である。

Q.E.D.

定理2の証明.

$$\omega \sigma(T) \subset \overline{V(T)} \subset V(B(X), T) \quad \text{は、明らかに成立している。}$$

$$\text{今、} \quad \operatorname{Re} \sigma(T) \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{とする。}$$

$$\text{このとき、定理1より、} \quad \sigma(H) \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{である。}$$

$$H \text{ は hermitian であるので } V(B(X), H) \subset \mathbb{R}^+ \quad \text{である。}$$

$$\text{従って、} \quad \operatorname{Re} V(B(X), T) \subset \mathbb{R}^+$$

となっている。

$$\text{また、} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \alpha \neq 0 \quad \text{に対して、} \quad \alpha T + \beta \text{ は hyponormal であり、}$$

$$\text{mapping : } z \rightarrow \alpha z + \beta \quad \text{により} \quad V(T) \rightarrow V(\alpha T + \beta), \quad \overline{V(T)} \rightarrow \overline{V(\alpha T + \beta)}$$

は、それぞれ onto に mapping されるので、上を示した性質と合せると、

$$\omega \sigma(T) = \overline{V(T)} = V(B(X), T)$$

が示されたことになる。

Q.E.D.

References

1. G. de Barra. Some algebras of operators with closed convex numerical range. Proc. R. I. A. 72(1972). 145-154.
2. —. Generalized limits and uniformly convexity. ibd. 74(1974). 73-77.
3. F. F. Bonsall and J. Duncan. Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras. Camb. Univ. Press. 1971.
4. —. Numerical ranges II. Camb. Univ. Press. 1973.
5. M. Chō. Joint spectra of operators on Banach spaces. Glasgow Math. J. 28(1986). 69-72.
6. —. Joint spectra of commuting normal operators on Banach spaces. Glasgow Math. J. 30(1988). 339-345.
7. —. Hyponormal operators on uniformly convex spaces. to appear in Acta Sci. Math. (Szeged).
8. K. Mattila. Normal operators and proper boundary points of the spectra of operators on Banach spaces. Math. Dessertations. 19(1978).
9. —. Complex strict and uniformly convexity and hyponormal operators. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96(1984). 483-493.

Department of Math.

Joetsu Univ. of Education

Joetsu 943. Japan