

間欠性カオスの統計的性質

京大・理 神山 保 (Tamotsu Kohyama)

京大・理 相沢 洋二 (Yoji Aizawa)

§1 はじめに

間欠性カオスは、定常状態又は周期的状態が、時々バーストにより乱される弱い乱雑さをもった状態であり、ベナール対流の実験¹⁾を始め、多くの力学系で見出される。間欠性カオスの理論的研究は、簡単な一次元写像を用いて Pomeau-Manneville²⁾により最初に行なわれた。その後 Manneville³⁾は同じ写像とを用いて、 $1/f$ -型スペクトルが間欠性カオスの臨界点で現われることを示した。 $1/f$ -型スペクトルは流体乱流でのゆらぎ⁴⁾や直流電流を流してある半導体での電圧のゆらぎ⁵⁾など、様々な現象に見い出されるが、まだ統一的な説明はなされていない。この報告の目的は、 $1/f$ -型スペクトルの発生機構を研究し、間欠性カオスの理論的基礎を与えることである。

§2では、Lorenzモデルに対する数値計算から作られた Lorenz プロットを一次元写像で近似する。間欠性カオスの統計的性

質と明らかにするため記号力学を構成する。§3では記号力学の統計的性質と調べ、付加的ノイズの効果について述べる。Pomeau-Manneville型(以後P-M型と書く)の間欠性カオスには代数的分布(Pareto-Zipf則)が見出され、それはノイズに対して安定性を持つことがわかる。§4では間欠性カオスのパワースペクトルを数値的及び理論的に調べる。P-M型間欠性カオスのパワースペクトルには、低周波部に激しく振動しているが平均としては $1/f$ 型の性質を持つスペクトルが得られる。外部から小さなノイズを加えると、 $1/f$ 的性格はより明確になるという現象が見出される。

§2 A-モデルと記号力学

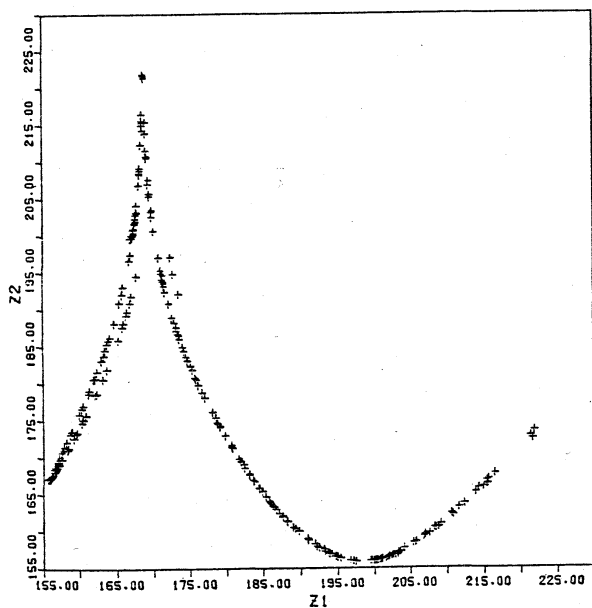


図1 Lorenzプロット

Lorenzモデルはパラメータの値により様々の間欠性カオスを示す。一例として3周期的な間欠性カオスを持つときのLorenzプロット⁶⁾を図1に示す。ここで次の様な一次元写像 T を考える。 A, C は定数で $A < \frac{(1-C)^2}{(A-C)^2}$ を満たすとする。

$$T: \begin{aligned} X_{n+1} &= f_0(X_n) = \frac{1-B}{A} X_n + B \quad (0 \leq X_n \leq A) \\ X_{n+1} &= f_1(X_n) = \frac{1}{(A-C)^2} (X_n - C)^2 \quad (A < X_n \leq 1) \end{aligned}$$

この写像 T は Lorenz モデルと同様な性質を持つ。以後これを Λ -モデルと呼ぶ。 Λ -モデルは更に一般的な形に拡張できる⁶⁾が、ここでは $f_0(x)$ を線形、 $f_1(x)$ を二次関数とし、 $A=0.4, C=0.75$ と固定しておく。パラメータ B を 1 より 0 まで下げていくと、系の状態は大域的カオスから周期軌道へ、周期倍加現象を通じて島カオスへ、更に再び大域的カオスへという状態変化が繰り返し起る。

以下着目するのは、大域的カオスが周期軌道へ変化する転移点近くで現われる Pomeau-Manneville 型間欠性カオスと、局在した島カオスが大域的カオスに発達した直後に現われる間欠的振舞いである。ここでは後者のカオスを "mixing-nonmixing" 型カオスと呼ぶ。

Lorenz モデルでは、二つの不安定固定点の回りへの軌道の飛び移り方により、カオスを特徴づける事ができる。この幾何学的特徴づけに対応して、次の様な記号力学⁷⁾を導き出す事ができる。写像 T の定義域 $[0, 1]$ を 2 つの区間 $[0, A] = I_0, (A, 1] = I_1$ に分け各軌道点 x_n に対して

$$x_n \in [0, A] = I_0 \Rightarrow \sigma_n = 0$$

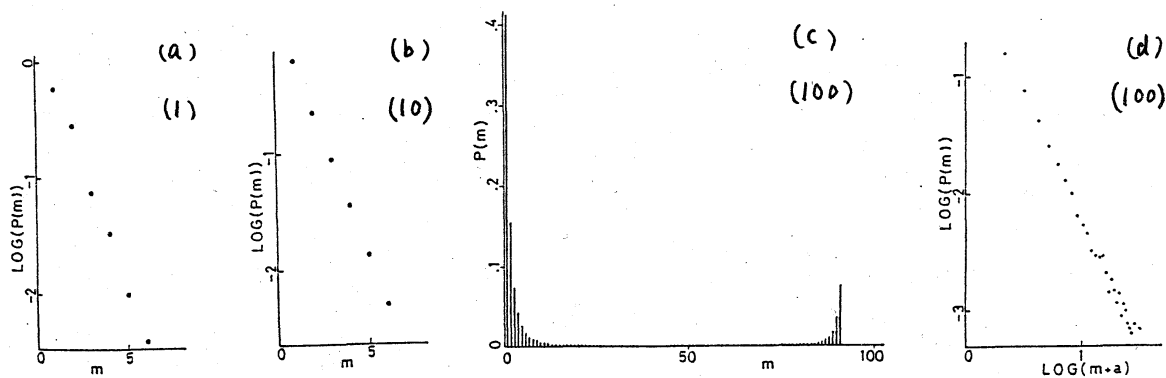
$$x_n \in (A, 1] = I_1 \Rightarrow \sigma_n = 1$$

の規則に従い記号 σ_n をあてる。この記号化により記号列 $\{\sigma_n\}$ は軌道 $\{x_n\}$ を再生する。A-モデルの性質から、0,1 記号の続き方に規則性が見出せる。 $f_0^n(1) < B < f_0^{n+1}(1)$ の条件が満たされている時には、記号 1 が現われてから次に記号 1 がでるまでに記号 0 が現われる回数は最大 n 回である。従って記号列 $\{\sigma_n\}$ は $(1), (10), \dots, (\underbrace{100\dots 0}_n)$ の $n+1$ 個の新しい記号 (単語) から構成された新しい記号列とみなす事ができる。以下の章では、 $n=2$ の場合、つまり許される記号が $(1), (10), (100)$ の場合について統計的性質を調べる。

§3 記号列の統計的性質

Ia) Pomeau-Manneville 型間欠性カオス (数値計算)

A-モデルにおいて $A=0.4$ $C=0.75$ と固定してある時、 $B_c = 0.268330\dots$ で 3 周期解が接線分岐を起す。P-M 型間欠性カオスは $B > B_c$ で起り、記号列 $\{\sigma_n\}$ には許される単語として $(1), (10), (100)$



図・2 P-M 型間欠性カオスにおける帯在時間分布 ($B=0.268331$)

の3種類が現われる。層流状態は記号(100)に対応する。間欠性カオスの領域では、これらの記号が確率的に現われると仮定する。そして記号列 $\{m\}$ は状態 $\{10\cdots 0\}$ への滞在時間分布 $P_\ell(m)$ や遷移確率 P_{ij} ($i, j=0, 1, 2$)で特徴づけられると考える。3つの許される状態(1), (10), (100)はそれぞれ独立で、各状態間の飛び移りは、ある確率法則に従うと仮定する。各状態での滞在時間分布に対する数値計算の結果を図2に示す。状態(1), (10)の滞在時間分布は指数分布と良く一致する。しかし、状態(100)の滞在時間分布は指数分布には従わず、滞在時間の短い部分や、最大滞在時間 $\ell_{\max}$ ($B=0.26831$ のとき $\ell_{\max}=471$) の近くでは、 $P(\ell) \sim \frac{1}{(\ell+a)^\beta}$ ($\beta \sim 2.1$) と良く近似でき、従って代数分布 (Pareto-Zipf 則) が成り立つ事がわかる (図2(d))。

このA-モデルに、外部ノイズ (Gaussian white) を加法的

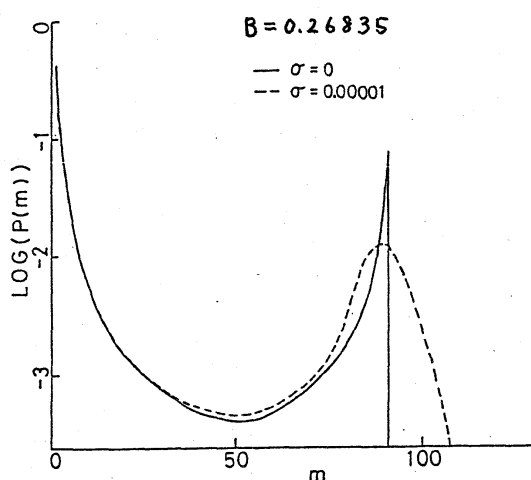


図3 滞在時間分布のノイズ依存性

に加えた場合⁸⁾、記号(100)の滞在時間分布は著しい変化を示す (図3)。最大滞在時間の近くの部分はゆるやかな山に崩れ、指数分布のすそを引く。一方、比較的小さな滞在時間の部分では、ノイズを加え

ていない時の分布とほとんど変わらない。これは代数分布はノイズが加わってもかなり安定で、ほとんど崩れないことを示している。

Ib) Pomeau-Manneville型間欠性カオス (理論的考察)

数値計算で得られた帯在時分布は、次の様に写像 T を構成し直す事により理論的に説明できる。 I_1 の領域を $T^{-1}(1), T^{-2}(1)$ の点により分割する。つまり、 $T^{-1}(1) \cap I_1 = \{x_1, x_2\}$, $T^{-2}(1) \cap I_1 = \{y_1, y_2\}$ (ただし $x_1 < x_2$ $y_1 < y_2$ とする) とおくと、 I_1 は $[A, x_1], (x_1, y_1], (y_1, y_2], (y_2, x_2], (x_2, 1]$ の5個の区間に分れる。ここで次の様に変形した写像 T_* を領域 I_1 で定義する。

$$T_*(x): \begin{cases} T_1(x) = T(x) & x \in [A, x_1] \text{ 又は } x \in (x_2, 1] \\ T_2(x) = T^2(x) & x \in [x_1, y_1] \text{ 又は } x \in (y_2, x_2] \\ T_3(x) = T^3(x) & x \in (y_1, y_2] \end{cases} \quad (3.1)$$

$T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ は記号力学で許される単語 $(1), (10), (100)$ に対応する。図4はP-M型間欠性カオスの場合の $T_*(x)$ を描いたものである。間欠性カオスの領域では、 $T_3(x)$ のグラフが対角線にほとんど接している。又、他の $T_1(x), T_2(x)$ は傾きの絶対値が1

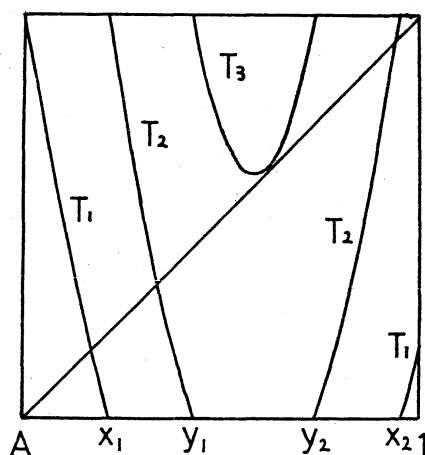


図4 写像 $T_*(x)$

より大きい直線で近似する事ができる。この近似から、例えば状態(10)の滞在時間分布 $P_1(m)$ は α^m に比例する、つまり指数分布になることがわかる。ここで α は、 $T_2(x)$ の傾きから決まる定数である。 $P_0(m)$ の指数分布も同様の近似で求められる。この考察では、各領域への確率の流入は一樣と仮定しているが、その仮定は数値計算の結果(図・2(a)(b))から確かめる事ができる。

他方、記号(100)に対応する $T_3(x)$ は対角線にほとんど接しているので、非常に長い間接点付近に束縛される。 $T_1(x)$ や $T_2(x)$ の領域から $T_3(x)$ の領域へ入ってくる確率の流れが、場所にはほとんど依存しないと仮定すると、状態(100)の滞在時間分布は次の様にして求める事ができる。座標原点を取替えて、不安定固定点近傍の写像を

$$x_{n+1} = a x_n^2 + x_n + \varepsilon \quad (3.2)$$

と書く。 ε は接分岐点からの距離を表わすパラメータである。層流領域では $x_{n+1} \sim x_n$ なので、式(3.2)は微分方程式に置き換えると

$$\frac{dx}{dt} = a x^2 + \varepsilon \quad (3.3)$$

になる。 x_0 から x_1 までにいる滞在時間は

$$l(x_0) = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \left\{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} x_1 \right) - \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} x_0 \right) \right\} \quad (3.4)$$

と求まる。ここで、 $T_3(x)$ の領域の終りの点を x_1 とする。滞在

時間分布 $P_2(l)$ は $P_2(l)dl = P(x_0)dx_0$ の関係式から求める事ができる。ここで $P(x_0)$ は $[x_0, x_0+dx_0]$ の領域に、 $T_1(x)$ や $T_2(x)$ の領域から入ってくる確率の流れであり、 $P(x_0) = P = \text{一定}$ と仮定する。結果は

$$P_2(l) = P \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \left[1 + \tan^2 \left\{ \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} x_1 \right) - \sqrt{a\varepsilon} l \right\} \right] \quad (3.5)$$

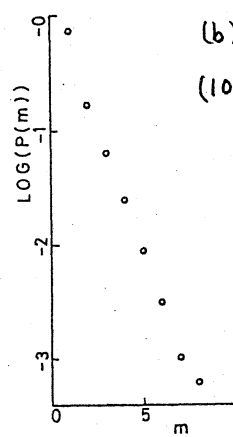
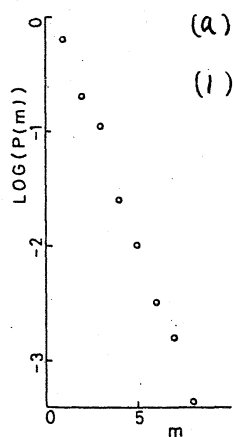
となる。この分布を $\sqrt{a\varepsilon} l < \frac{\pi}{6}$ として、小さい滞在時間について展開すると

$$P_2(l) \sim \frac{P}{a\sqrt{a\varepsilon}} \frac{1}{\left(l + \frac{1}{a x_1} \right)^2} \quad (3.6)$$

となる。この分布は、Pareto-Zipf 則と呼ばれる代数分布を表わしている。 $l = \frac{\pi}{\sqrt{a\varepsilon}}$ の近くで展開しても同様の結果が得られる。これらの結果は数値計算により得られた結果(図・2(c)(d))と良く近似している。

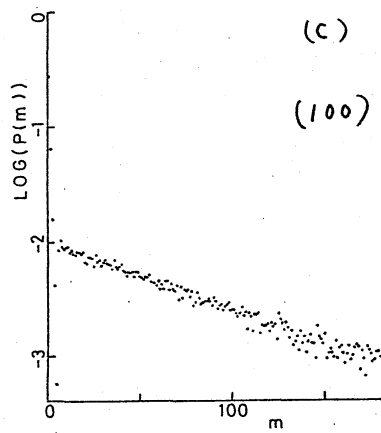
IIa) mixing-nonmixing型のカオス (数値計算)

$A=0.4$ $C=0.75$ に固定したA-モデルでは、3周期島カオ



(b) スが大域的カオスに発達する臨界点は $B_c = 0.2344320\dots$ であり $B < B_c$ でmixing-nonmixing型の

図・5 mixing-nonmixing型カオスにおける滞在時間分布 ($B=0.2344$)



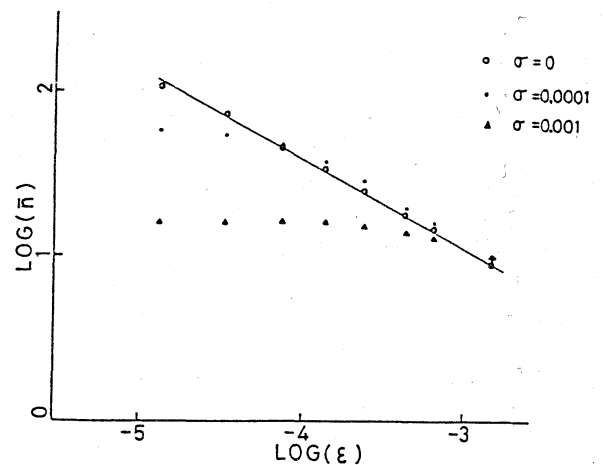
図・5

(c) カオスが起こる。状態(1),(10),(100)
(100) での帯在時間分布の数値計算結果
を図・5に示す。状態(1),(10)の帯
在時間分布は、P-M型間欠性カオ
スの時と同様に指数分布であり、
しかも状態(100)の帯在時間分布
も平均帯在時間 $\bar{n}$ の非常に長い指

数分布になっている。これはP-M型の転移とは異なっている
点である。この平均帯在時間
 $\bar{n}$ のパラメータ $\varepsilon = B_c - B$ 依
存性を図・6に示す。

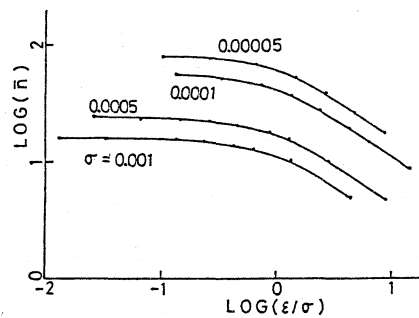
$$\bar{n} \propto (B_c - B)^{-1/\gamma}$$

にあてはまり、 $\gamma \approx 1.9$ であ
る。

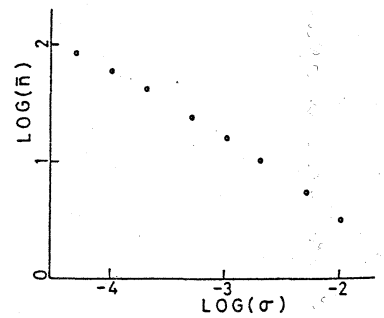


(a)

系にノイズ (Gaussian white
分散 σ) を加え
ると、状態(100)



(b)



(c)

図・6

平均帯在時間 $\bar{n}$ の
 ε, σ 依存性

の帯在時間分布は、ノイズが加わっていなり時と同様に指数分布になっているが、平均帯在時間 $\bar{n}$ はノイズ強度 σ を増加させると減少する。ノイズ強度 σ とパラメータ $\varepsilon = B_c - B$ の変化に対する $\bar{n}$ のグラフを図5に示す。ノイズ強度 σ が強いと ε にあまり依存せず平均帯在時間 $\bar{n}$ は一定しているが、ノイズ強度 σ が ε に比べ小さい時は、 $\bar{n}$ は $(B_c - B)^{-1/2}$ にほぼ等しくなっている。図5(b)(c)から、 $\bar{n}(\varepsilon, \sigma)$ は $f(\sigma) \cdot g(\frac{\varepsilon}{\sigma})$ と分解する事ができ、 $\sigma \ll 1$ のとき $f(\sigma) \cong \sigma^{-1/2}$ 、 $\frac{\varepsilon}{\sigma} \ll 1$ のとき $g(\frac{\varepsilon}{\sigma}) \cong \text{const}$ 、 $\frac{\varepsilon}{\sigma} \gg 1$ のとき $g(\frac{\varepsilon}{\sigma}) \cong (\frac{\varepsilon}{\sigma})^{-1/2}$ である事がわかる。

IIb) mixing-nonmixing型のカオス (理論的考察)

mixing-nonmixing型カオスの場合にも、Ib)と同様の方法

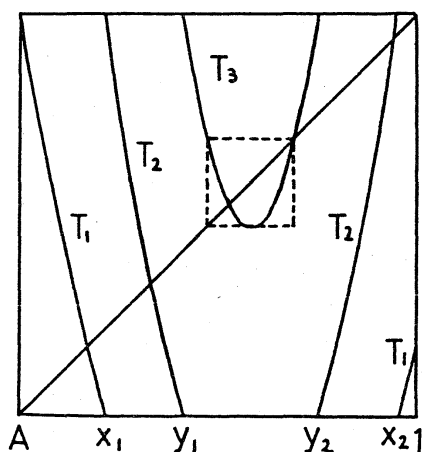


図7 写像 $T_*(x)$

で写像 T を構成し直し新しい写像 T_* を作ると図7のようになる。状態(1), (10)に対応する $T_1(x)$, $T_2(x)$ はP-M型間欠性カオスの時とほとんど同形なので、状態(1), (10)の帯在時間分布が指数分布になることを§3-Ib)と同じ近似を使って示す事ができる。状態(100)に対応す

る $T_3(x)$ は他とは異なり、パラメータ a が 4 より小 (大きい) ときのロジスティック・マップ

$$x_{n+1} = f(x_n) = a x_n (1 - x_n)$$

で近似できる。 $a < 4$ のとき軌道は箱 $x \in [0, 1]$ に閉じ込められる。 $a = 4(1 + \varepsilon)$ とおき $\varepsilon > 0$ の場合、1 回写像で軌道が箱から逃げ出す領域は $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{\varepsilon}) < x_n < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\varepsilon})$ (J_1 と書く) である。この箱 $x \in [0, 1]$ 内への確率の流れが一様であると仮定すると、この箱内に n 回だけ帯在する確率分布は、 $J_n = f^{-n+1}(J_1)$ の領域の広さに比例する。 $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$ の補集合は、Cantor 集合を構成している。箱の中に入っている写像 T_x の部分を直線で近似すると、帯在時間分布 $P_2(m)$ を

$$P_2(m) \propto J_m \propto (1 - \sqrt{\varepsilon})^m \simeq e^{-m/\sqrt{\varepsilon}}$$

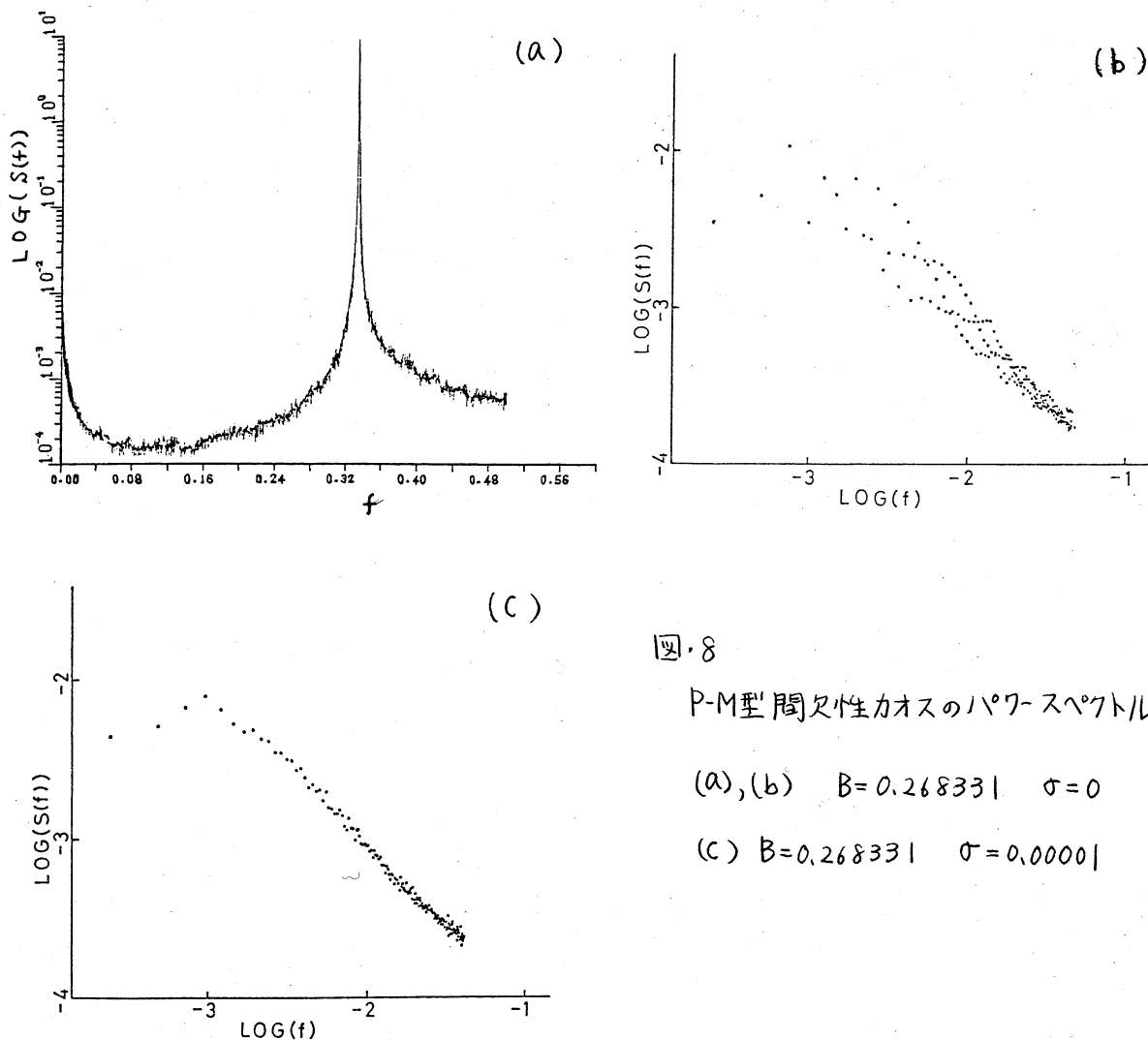
と評価でき、平均帯在時間 $\bar{\pi}$ が $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ の指数分布になることが理解できる。

§4 間欠性カオスのパワースペクトル

a) 数値計算の結果

Pomeau-Manneville 型間欠性カオスのパワースペクトルを数値計算した。時系列は 4096 の長さのものをとり、Fast-Fourier-Transformation によりパワースペクトルを計算し

200 個のサンプルについて平均した。図・8 は $B=0.268331$ の



図・8

P-M型間欠性カオスのパワースペクトル

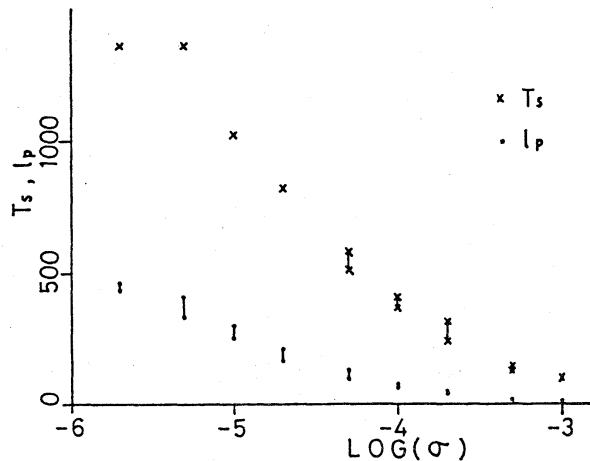
(a), (b) $B=0.268331$ $\sigma=0$

(c) $B=0.268331$ $\sigma=0.00001$

ときの計算結果である。振動数 $f = \frac{1}{3}$ の所に3周期性を反映した鋭いピークがあり、低周波数部にも小さなピークが生じている。又、各ピークの周りでさらに小さな振動が見られる。図8(b)には、パワースペクトルの低周波数部を両対数軸でプロットしてある。細かなスペクトルの振動が見られ、こ

の振動の周期は約 $1073 \approx 3 \times l_{\max}$ である。ピーク間を結ぶと $f^{-\nu}$ ($\nu=1.2$) にはほぼ乗っており、細かな振動を平均化した時のスペクトルは $f^{-1.1}$ に合わせることができる。しかし、非常に小さな振動数領域では、 f^{ν} 型スペクトルは飽和する。その飽和振動数は $f_s \approx \frac{3}{2^{12}} \approx \frac{1}{3 \times l_{\max}}$ である。 $f = \frac{1}{3}$ の回りのパワースペクトルの形は、細かな振動を共にってはいるが、ローレンツ型に近い。振動を平均化したスペクトルでは、 $|f - \frac{1}{3}| > \frac{1}{650} \approx \frac{2}{3 \times l_{\max}}$ で $|f - \frac{1}{3}|^{-2.0}$ に近くなっている。 $|f - \frac{1}{3}| < \frac{1}{650}$ では白色雑音のスペクトル $S(f) = \text{一定}$ に近くなっている。

小さなノイズ (Gaussian white, 分散 σ) を系に加えた時、パワースペクトル $S(f)$ に見られた細かな振動は抑えられて比較的なめらかなスペクトル $S(f)$ が得られる (図・8(c))。ノイズ強度 $\sigma = 0.00001$ の時、低振動数部で $f > 1/1073$ の領域では、スペクトルは $S(f) \propto f^{-1.1}$ に一致する。この



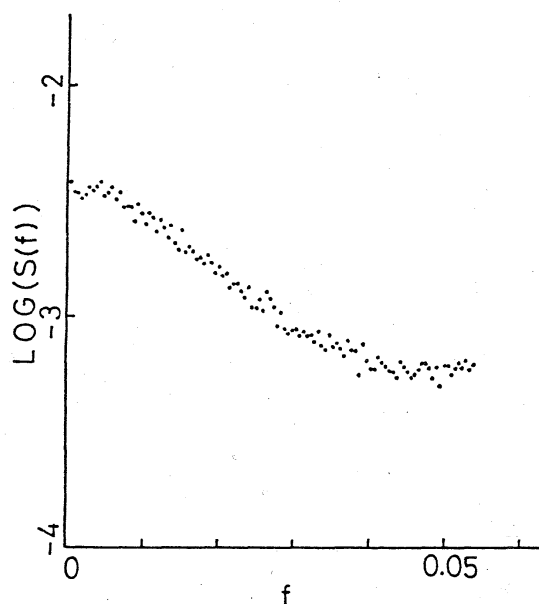
$f^{-\nu}$ 型スペクトルが飽和するのは $f_s \approx 1/1073$ である。
 $f^{-\nu}$ 型スペクトルの飽和振動

図・9

飽和周期 T_s と帯状時間分布の第2のピーク位置 l_p のノイズ依存性

数 $f_s = \frac{1}{2\pi T_s}$ をノイズ強度 σ に対して描いたのが図・9である。図9には、状態(100)に対する帯在時間分布 $P_2(m)$ の2番目のピークの位置 $l_p (\simeq l_{\max})$ がノイズ強度 σ に対してどのように変化するかも示してある。 σ が小さい所では $T_s/l_p \simeq 3$ である。これは、今考えている間欠性カオスは3周期軌道が不安定化して生じたものだからである。 σ が増加すると、 T_s/l_p は次第に増加する。

mixing-nonmixing型カオスのパワースペクトルには、 $f = \frac{1}{3}$ 近くの鋭いピークの他に低振動数部にも小さなピークが見られる。P-M型間欠性カオスの場合と異なり、低振動数部は f^{-2} 型ではなく、



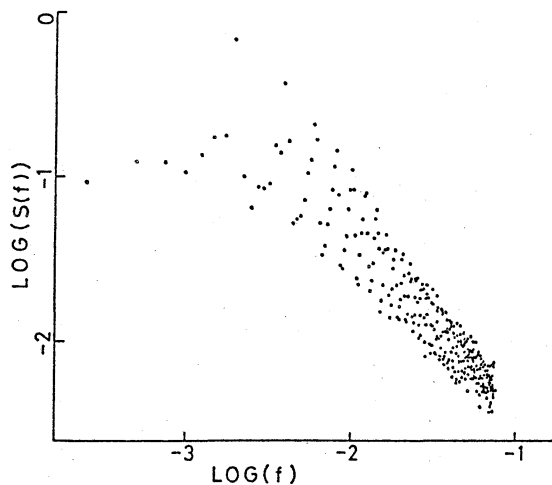
図・10

mixing-nonmixing型カオスのパワースペクトル

$e^{-\alpha f}$ 型になっている様である。このスペクトルもある飽和振動数より小さい部分では白色雑音のスペクトルになっている。

b) $1/f$ スペクトルについての理論的考察

Pomeau-Manneville 型間欠性カオスにおけるパワースペクトルの $1/f$ 的性質を理解するために、次の様な簡単なモデルを考える。間欠性カオスは層流状態とバーストから成り立っている事が見える。§3 で数値計算を行な、た系では状態 (100) が層流状態に当り、状態 (1), (10) はバーストに対応している。ここでは更に簡単化して、層流状態は値 0 を持ち、バーストは値 1 を持つとし、系はこの 2 状態だけから成立しているとする。そして、層流状態の滞在時間分布は $P(l)$ であり、バーストは連続して二度以上現われなりと仮定する。一般にバーストの滞在時間分布は指数分布なので、それを



図・11 層流状態=0, バースト=1
としたときの間欠性カオスのパワースペクトル

考慮に入れたモデルを作る事もできるが、本質は変わらないと考えられる。又、状態 (100) の値を 0、状態 (1), (10) の値を 1 として数値計算したパワースペクトル (図・11) の特徴は、元の系のスペクトル (図・8(b)) と同じなので、 $1/f$ 的

スペクトルは系の粗視化の方法にはよるなり事がわかる。従ってここで用いた近似は、 $1/f$ 型スペクトルの本質的な性質

には影響しない。

バーストが N 個 ($N \gg 1$) 含まれている時系列の集合を考える。時系列の全長は平均

$$N_* = N + N \sum_{\ell} \ell P(\ell) \quad (4.1)$$

で与えられる。平均のバースト数は

$$\langle N \rangle = N / N_* \quad (4.2)$$

である。時間差 $k+1$ の相関関数 $C_0(k+1)$ に対する寄与は、2つの過程から成り立っている。一つは、バーストの後、 k 回層流状態が続く場合であり、もう一つは、最後の層流状態の滞在時間が i ($i < k$) であり、 $k-i$ の時刻にバーストが起っている場合である。従って相関関数 $C_0(k+1)$ は

$$C_0(k+1) = N P(k) + \sum_{i=1}^{k-1} C_0(k-i) P(i) \quad (4.3)$$

と書く事ができる。境界条件は $C_0(1) = 0$, $C_0(2) = N P(1)$ である。 $C(k) = \frac{1}{N_*} C_0(k)$ と規格化すると、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとることにより、規格化された相関関数 $C(k)$ は次の式を満たす事がわかる。

$$C(k+1) = \langle N \rangle P(k) + \sum_{i=1}^{k-1} C(k-i) P(i) \quad (4.4)$$

パワースペクトル $S(\omega)$ は Fourier 変換

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (C(|k|) - \langle N \rangle^2) e^{i\omega k} \quad (4.5)$$

で定義される。式(4.4)を式(4.5)に代入すると

$$S(\omega) = \langle N \rangle \operatorname{Re} \{ (1 + e^{i\omega} P(\omega)) / (1 - e^{i\omega} P(\omega)) \} \quad (4.6)$$

と求められる。ここに、 $P(\omega)$ は帯在時間分布 $P(l)$ の Fourier 変換

$$P(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) e^{i\omega k} \quad (4.7)$$

で与えられる。帯在時間分布が

帯在時間分布 $P(l)$ が

$$P(l) = \frac{1}{\zeta(\beta)} l^{-\beta} \quad (2 < \beta < 3) \quad (4.8)$$

の様な代数分布の確率過程の場合、パワースペクトル $S(\omega)$ は

$$S(\omega) = \frac{2 C_1 \langle N \rangle}{C_2^2 - 1} \cdot \omega^{\beta-3} \quad (4.9)$$

となる。ここで

$$P(\omega) \cong 1 - C_1 \omega^{\beta-1} + i C_2 \omega \quad (\omega \ll 1 \text{ のとき}) \quad (4.10)$$

であり、 $C_1 = \frac{1}{\zeta(\beta)} \int_0^{\infty} \frac{1-y\omega}{y^{\beta}} dy$, $C_2 = \zeta(\beta-1)/\zeta(\beta)$ である。

又、式 (4.8) で $\beta = 2$ に対応する場合は次の結果が得られる。

$$P(\omega) \cong 1 - C_1 \omega - \frac{i}{\zeta(2)} \omega \ln \omega \quad (4.11)$$

$$S(\omega) \cong 2 C_1 \langle N \rangle \zeta(2)^2 / \{\omega (\ln \omega)^2\} \quad (4.12)$$

P-M型閥欠性カオスのパワースペクトルは、層流状態 (100) の帯在時間分布 $P_2(l)$ を (式 (3.5) で与えられている)、次の様に近似する事により求められる。

$$P(l) \cong C / \sin^2(bl) \quad (4.13)$$

ここで、 $0 < l < \pi/b$ であり $b = \sqrt{a\epsilon}$, $C = 1 / \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2(bl)}$ とす

る。帯在時間分布 (4.13) の Fourier 変換は

$$P(\omega) = C \sum_{l=1}^{\pi/b} \frac{e^{i\omega l}}{\sin^2(bl)}$$

$$\begin{aligned}
&= C \sum_{\ell=1}^{\pi/2b} \frac{e^{i\omega\ell}}{\sin^2(b\ell)} + C \sum_{\ell=1}^{\pi/2b} \frac{e^{i\omega(\frac{\pi}{b}-\ell)}}{\sin^2(b\ell)} \\
&= 1 + C \sum_{\ell=1}^{\pi/2b} \frac{e^{i\omega\ell} - 1}{\sin^2(b\ell)} + C e^{i\omega\frac{\pi}{b}} \sum_{\ell=1}^{\frac{\pi}{2b}} \frac{e^{-i\omega\ell} - 1}{\sin^2(b\ell)} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$2b < \omega \ll 1$ の場合には、式(4.14)は次の様に近似できる。

$$\begin{aligned}
P(\omega) &\simeq 1 + \frac{C}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega x} - 1}{x^2} dx + \frac{C e^{i\omega\frac{\pi}{b}}}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega x} - 1}{x^2} dx \\
&\simeq 1 + d_1 \omega (1 + i\omega \frac{\pi}{b}) + d_2 \omega \ln \omega \cdot \sin \frac{\pi \omega}{b} \\
&\quad + i\omega \{ d_2 \ln \omega \cdot (1 - i\omega \frac{\pi}{b}) + d_1 \sin \frac{\pi \omega}{b} \} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

ここで $d_1 = \frac{C}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega x - 1}{x^2} dx$, $d_2 = C/b^2$ である。式(4.15)を式(4.6)に代入すると、パワースペクトル $S(\omega)$ は

$$S(\omega) = \frac{2\langle N \rangle}{\omega} \cdot \{ d_1 (1 + i\omega \frac{\pi}{b}) + d_2 \ln \omega \cdot \sin \frac{\pi \omega}{b} \} / G(\omega) \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= 1 - 2d_1^2 (1 + i\omega \frac{\pi}{b}) - 2d_2 \ln \omega (d_2 \ln \omega + 1) (1 - i\omega \frac{\pi}{b}) \\
&\quad - 2d_1 (2d_2 \ln \omega + 1) \sin \frac{\pi \omega}{b}
\end{aligned}$$

と求められる。式(4.16)で表わされるパワースペクトルは、二つの因子の積になっている。つまり、 $1/\omega$ 型スペクトルの項と、周期 π/b の振動項である。これは、スペクトルの低周波数部が層流状態の最大滞在時間 $\ell_{\max}$ を周期とした振動を持ち、振動を平均化したスペクトルは $1/\omega$ にほぼ比例することとを意味している。又、 $1/f$ 型スペクトルの飽和振動数が、 $1/\ell_{\max}$ 程度であることも理解できる。これらの性質は §4a) で得られた数値計算の結果と一致している。

系に小さな外部ノイズを加えても、層流状態の帯在時間分布 $P(l)$ の代数分布は影響を受けないため、パワースペクトルの $1/f$ 的性質はあまり変化しない。しかし、帯在時間分布の $l_{\max}$ 近くのピークは壊されるために、パワースペクトルには細かな振動は見られなくなると考えられる。

§5 まとめ

A-モデルを用いて間欠性カオスの統計的性質について調べてきた。周期軌道が不安定化して起った間欠性カオスにおいても、パワースペクトルの低周波数部には $1/f$ 的性格が見られる事がわかった。これは、層流状態の帯在時間分布 $P(l)$ に代数分布が現われるためである。系に小さなノイズを加えても、この代数分布は安定に存在するため、パワースペクトルの $1/f$ 的性格もあまり変化しない事がわかった。間欠性カオスを、層流状態とバーストを表わすいくつかの状態間の遷移過程として記述する更新過程¹⁾とみなして解析した。

文献

- 1) J.P. Gollub, S.V. Benson, J. Fluid Mech. 100 (1980), 449

- 2) P. Manneville, Y. Pomeau, Phys. Lett. 75A (1979), 1
Y. Pomeau, P. Manneville, Commun. Math. Phys. 74 (1980), 189
- 3) P. Manneville, J. Phys., 41 (1980), 1235
- 4) K.N. Helland, C.W. Van Atta, J. Fluid Mech. 85 (1978), 573
- 5) P. Dutta, P.M. Horn, Rev. Mod. Phys. 53 (1981), 497
- 6) Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys., 70 (1983), No. 5 in press
- 7) V.M. Alekseev, M.V. Yakobson, Phys. Rep. 75 (1981), 287
- 8) J.E. Hirsch, B.A. Huberman, D.J. Scalapino, Phy. Rev. 25A
(1982), 519
- 9) W. Feller, An Introduction to Probability Theory
and Its Applications, Vol II (John-Wiley & Sons,
Inc., 1966)