

Full projections and automorphisms of stable algebras of unital C^* -algebras

琉球大学 理学部 小高一則 (Kazunori Kodaka)

0. はじめに

A を unital C^* -環とし K を countably infinite dimensional Hilbert space 上の compact operators 全体がつくる C^* -環とする。 $Aut(A \otimes K)$ の元にはどのようなものがあるかということを考えると、 $\alpha \in Aut(A)$ として、 $\alpha \otimes id$ がある。また、 w を $A \otimes K$ の multiplier 環 $M(A \otimes K)$ の unitary として、 $Ad(w)$ を、任意の $x \in A \otimes K$ に対して、 $Ad(w) = wxw^*$ と定義したときの $Ad(w)$ (これを、 $A \otimes K$ の generalized inner automorphism という) が考えられる。上のもの以外にどのような automorphism があるか。というと、実際には、上のようなものの合成写像以外にはないような C^* -環もあれば、上のようなものの以外の automorphism がある C^* -環もある。

例 1. $\theta \in [0, 1]$ を無理数とし A_θ を θ に対応する無理数回転 C^* -環とする。

(1) θ が 2 次の無理数でないときは、任意の $\beta \in Aut(A_\theta \otimes K)$ は、 $\beta = Ad(w) \circ \alpha \otimes id$ という形に書ける。ここで、 $\alpha \in Aut(A_\theta)$, $w \in M(A_\theta \otimes K)$ は unitary である。

(2) θ が 2 次の無理数のとき、 $Ad(w) \circ \alpha \otimes id$ の形には、ならないような $\beta \in Aut(A_\theta \otimes K)$ が存在する。

例 2. n を 2 以上の自然数とし、 O_n を n に対応する Cuntz 環とする。

(1) $n = 2, 3$ のとき、任意の $\beta \in Aut(O_n \otimes K)$ は、 $\beta = Ad(w) \circ \alpha \otimes id$ という形にかけられる。ここで、 $\alpha \in Aut(O_n)$, $w \in M(O_n \otimes K)$ は unitary である。

(2) n が素数でないとき、 $Ad(w) \circ \alpha \otimes id$ の形には、ならないような $\beta \in Aut(O_n \otimes K)$ が存在する。

このようなことが起こる理由を知りたいため、以下のことを行う。

A の automorphism の同値類の集合と、ある条件を満足する $A \otimes K$ の projection

の同値類の集合とを考え、その間に bijection があることを示す。

1. 同値関係

$Int(A)$ を A の inner automorphisms の全体の集合、 $Int(A \otimes K)$ を $A \otimes K$ の generalized inner automorphisms の全体の集合。更に、 $Out(A) = Aut(A)/Int(A)$, $Out(A \otimes K) = Aut(A \otimes K)/Int(A \otimes K)$ とおく。

Lemma 1.1. $Out(A)$ から $Out(A \otimes K)$ への写像 Ψ を $\Psi([\alpha]) = [\alpha \otimes id]$ と定めると、 Ψ は injective である。ここで、 $[\alpha]$ は、automorphism α の属す類である。

上の Lemma 1.1 により $Out(A)$ を $Out(A \otimes K)$ の部分群と見なすことができる。 $Out(A \otimes K)$ の中に同値関係を、 $[\beta_1], [\beta_2] \in Out(A \otimes K)$ に対して、

$$[\beta_1] \sim [\beta_2] \iff \exists \alpha \in Aut(A) \text{ s.t. } [\beta_1] = [\beta_2][\alpha \otimes id]$$

と定義する。同値類を $[[\beta]]$ で表わし、また、 $P = Out(A \otimes K)/\sim$ とする。

$K_0(A)$ と $K_0(A \otimes K)$ とを同一視し、 $Aut(K_0(A))$ と $Aut(K_0(A \otimes K))$ とを同じものと思う。 $Aut(A)$ から $Aut(K_0(A))$ への写像 T_A を、任意の $\alpha \in Aut(A)$ に対して、 $T_A(\alpha) = \alpha_*$ と定義する。同様に、 $T_{A \otimes K}$ も定義する。 $range T_A$, $range T_{A \otimes K}$ を T_A , $T_{A \otimes K}$ の像とすると、上のことより $range T_A$ は $range T_{A \otimes K}$ の部分群になる。

Proposition 1.2. $Out(A)$ が $Out(A \otimes K)$ の正規部分群ならば、 $range T_A$ は $range T_{A \otimes K}$ の正規部分群になる。 A が、cancellation をもつか、あるいは、 A が purely infinite simple unital C^* -algebra ならば、逆も成り立つ。

次に、 $A \otimes K$ の full projection p で $p(A \otimes K)p \cong A$ となるものの全体を FP で表わす。ここで、projection p が full であるとは、 $(A \otimes K)p(A \otimes K)$ が $A \otimes K$ で dense ということである。 FP の中に同値関係を $p, q \in FP$ に対

して、

$$p \sim q \iff \exists z \in A \otimes K \text{ s.t. } z^*z = p, \quad zz^* = q$$

で定義する。(p) で p の類を表わすものとする。

2. $FP/\sim$ から $\mathbf{P}$ への map

$p \in FP$ とすると、 $p(A \otimes K)p \cong A$. χ_p を A から $p(A \otimes K)p$ の上への isomorphism とする。このとき、Brown の結果より、 p に対して、

$$\exists z \in M(A \otimes K \otimes K) \text{ s.t. } p \otimes 1 = z^*z, \quad 1 \otimes 1 \otimes 1 = zz^*$$

ψ を $K \otimes K$ から K の上への isomorphism で K_0 で identity とする。 $\beta(p, \chi_p)$ を

$$\beta(p, \chi_p) = id \otimes \psi \circ Ad(z) \circ \chi_p \otimes id$$

とおくと、 $\beta(p, \chi_p) \in Aut(A \otimes K)$ となる。

Lemma 2.1. (1) $[\beta(p, \chi_p)] \in Out(A \otimes K)$ は、 ψ, z の取り方によらない。

(2) $[[\beta(p, \chi_p)]] \in \mathbf{P}$ は、 χ_p の取り方によらない。

上の Lemma 2.1 より $[[\beta(p, \chi_p)]]$ は、 χ_p の取り方によらないので、 $\beta(p, \chi_p)$ を β_p で表わす。 $FP/\sim$ から $\mathbf{P}$ への写像 $\mathcal{F}$ を、任意の $p \in FP$ に対して、 $\mathcal{F}((p)) = [[\beta_p]]$ と定義する。

Lemma 2.2. $\mathcal{F}$ は、*well-defined* である。

3. $\mathbf{P}$ から $FP/\sim$ への map

$\{e_{ij}\}$ を K の matrix units とする。 $1 \otimes e_{00} \in FP$ だから、任意の $\beta \in Aut(A \otimes K)$ に対して、 $\beta(1 \otimes e_{00}) \in FP$ である。 $\mathbf{P}$ から $FP/\sim$ への写像 $\mathcal{J}$ を、任意の $\beta \in Aut(A \otimes K)$ に対して、 $\mathcal{J}([[\beta]]) = (\beta(1 \otimes e_{00}))$ とおく。このとき、 $\mathcal{J}$ は、*well-defined* である。

Lemma 3.1. $\mathcal{J}$ は、*injective* である。

この Lemma は、次の Lemma によりすぐわかる。

Lemma 3.2. $\beta \in \text{Aut}(A \otimes \mathbf{K})$ とし、 $(\beta(1 \otimes e_{00})) = (1 \otimes e_{00})$ とする。このとき、

$$\exists \alpha \in \text{Aut}(A), \quad \exists w \in M(A \otimes \mathbf{K}) \quad a \text{ unitary} \quad s.t. \quad \beta = \text{Ad}(w) \circ \alpha \otimes id$$

Lemma 3.1 の証明. $\beta_1, \beta_2 \in \text{Aut}(A \otimes \mathbf{K})$, $\mathcal{J}([\beta_1]) = \mathcal{J}([\beta_2])$ であるとする
と、 $(\beta_1(1 \otimes e_{00})) = (\beta_2(1 \otimes e_{00}))$. 従って、 $((\beta_2^{-1} \circ \beta_1)(1 \otimes e_{00})) = (1 \otimes e_{00})$.
よって、Lemma 3.2 より、

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \text{Aut}(A) \quad \exists w \in M(A \otimes \mathbf{K}) \quad a \text{ unitary} \\ s.t. \quad \beta_2^{-1} \circ \beta_1 = \text{Ad}(w) \circ \alpha \otimes id \end{aligned}$$

よって、 $[\beta_1] = [\beta_2]$. (証終)

Lemma 3.3. 任意の $p \in FP$ に対して、 $(\mathcal{J} \circ \mathcal{F})(p) = (p)$ である。

この Lemma は、次の Lemma によりすぐわかる。

Lemma 3.4. 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して、 $\exists v \in \mathbf{K}$ a partial isometry

$$\begin{aligned} s.t. \quad v^*v &= \sum_{j=-n}^n e_{jj}, \quad vv^* = \sum_{j=-n}^n \psi(e_{jj} \otimes e_{00}) \\ ve_{ij}v^* &= \psi(e_{ij} \otimes e_{00}) \quad i, j = -n, \dots, 0, \dots, n \end{aligned}$$

Lemma 3.3 の証明. $\mathcal{F}$ の定義より $(\mathcal{J} \circ \mathcal{F})(p) = \mathcal{J}([\beta_p])$. また、

$$\beta_p = id \otimes \psi \circ \text{Ad}(z) \circ \chi_p \otimes id$$

だから、

$$\begin{aligned}\beta_p(1 \otimes e_{00}) &= (id \otimes \psi \circ Ad(z) \circ \chi_p \otimes id)(1 \otimes e_{00}) \\ &= (id \otimes \psi \circ Ad(z))(p \otimes e_{00}) \\ &= (id \otimes \psi)(z(p \otimes e_{00})z^*)\end{aligned}$$

$id \otimes \psi$ を $M(A \otimes K \otimes K)$ から $M(A \otimes K)$ の上への isomorphism に拡張しておく、

$$\beta_p(1 \otimes e_{00}) = (id \otimes \psi)(z)(id \otimes \psi)(p \otimes e_{00})(id \otimes \psi)(z)^*$$

$\cup_{n=1}^{\infty} M_n(A)$ は、 K で dense だから

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad p \in M_{2n+1}(A)$$

と思ってよい。 $p = \sum_{i,j=-n}^n a_{ij} \otimes e_{ij}$ とおくと、

$$(id \otimes \psi)(p \otimes e_{00}) = \sum_{i,j=-n}^n a_{ij} \otimes \psi(e_{ij} \otimes e_{00})$$

Lemma 3.4 より $\exists v \in K$ a partial isometry

$$\begin{aligned}s.t. \quad v^*v &= \sum_{j=-n}^n e_{jj}, \quad vv^* = \sum_{j=-n}^n \psi(e_{jj} \otimes e_{00}) \\ ve_{ij}v^* &= \psi(e_{ij} \otimes e_{00}) \quad i, j = -n, \dots, 0, \dots, n\end{aligned}$$

このとき

$$(1 \otimes v)p(1 \otimes v)^* = \sum_{i,j=-n}^n a_{ij} \otimes \psi(e_{ij} \otimes e_{00}) = (id \otimes \psi)(p \otimes e_{00})$$

よって

$$\beta_p(1 \otimes e_{00}) = (id \otimes \psi)(z)(1 \otimes v)p(1 \otimes v)^*(id \otimes \psi)(z)^*$$

更に、

$$[p(1 \otimes v)^*(id \otimes \psi)(z)^*][p(1 \otimes v)^*(id \otimes \psi)(z)^*]^* = p$$

ゆえに $(\beta_p(1 \otimes e_{00})) = (p)$. (証終)

Lemma 3.1 と Lemma 3.3 より、

Theorem 3.5. $\mathcal{J} : P \rightarrow FP/\sim$ は *bijection* で $\mathcal{F}$ は $\mathcal{J}$ の逆写像である。

上の Theorem 3.5 より

Corollary 3.6. 次の 2つの条件は同値。

- (1) $\exists \beta \in \text{Aut}(A \otimes K)$ s.t. $[\beta] \notin \text{Out}(A \otimes K)$,
- (2) $\exists p \in A \otimes K$ a full projection s.t.

$$p(A \otimes K)p \cong A, \quad (p) \neq (1 \otimes e_{00})$$

Corollary 3.7. A が *cancellation* をもつか、あるいは *purely infinite simple unital C^* -algebra* とする。このとき、つぎの 2つの条件は同値。

- (1) $\exists \beta \in \text{Aut}(A \otimes K)$ s.t. $\beta_* \neq \alpha_*$ on $K_0(A) \forall \alpha \in \text{Aut}(A)$,
- (2) $\exists p \in A \otimes K$ a full projection s.t.

$$p(A \otimes K)p \cong A, \quad [p] = [1 \otimes e_{00}] \text{ in } K_0(A \otimes K)$$

4. 応用

(1) θ を 2 次の無理数とし、 A_θ を無理数回転 C^* -環とする。 A_θ は、*cancellation* をもち $\text{range } T_{A_\theta} = \{1\}$ なので、 $FP/\sim$ は group になる。 $p(A_\theta \otimes K)p \cong A_\theta$ となる full projection p をさがす。 τ を A_θ の trace とし、 $M_n(A_\theta)$ に正規化せずに拡張しておく。 $\tau(p) = a + b\theta$ とすると、Rieffel の結果により、互いに素な整数 a, b で $\frac{c + d\theta}{a + b\theta} = \theta$ かつ $a + b\theta > 0$ となる a, b の組を探せばよいということになる。これを行うと、 $FP/\sim \cong \mathbb{Z}$ であることがわかる。従って、 $\text{Out}(A \otimes K)/\text{Out}(A) \cong \mathbb{Z}$.

(2) θ を無理数とする。

$$uv = e^{2\pi\theta}vu, \quad wv = vw, \quad uw = vwu$$

という関係式を満たす unitaries u, v, w により生成される universal C^* -algebra を H_θ とする。 H_θ は、class 2 の Heisenberg C^* -algebra と呼ばれている。Packer の結果により H_θ には

$$p(H_\theta \otimes K)p \cong H_\theta, \quad [p] \neq [1 \otimes e_{00}] \quad \text{in } K_0(H_\theta \otimes K)$$

となる projection $p \in H_\theta \otimes K$ が存在することがわかる。また、 H_θ は cancellation をもつこともわかるので、

$$\exists \beta \in \text{Aut}(H_\theta \otimes K) \quad \text{s.t.} \quad \beta_* \neq \alpha_* \quad \text{on } K_0(H_\theta) \quad \forall \alpha \in \text{Aut}(H_\theta)$$

参考文献

- [1] B. Blackadar, *K-theory for operator theory*, M. S. R. I. Publications, Springer-Verlag, 1986.
- [2] L. G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^* -algebras*, Pacific J. Math., **71** (1977), 335-348.
- [3] L. G. Brown, P. Green and M. A. Rieffel, *Stable isomorphism and strong Morita equivalence of C^* -algebras*, Pacific J. Math., **71** (1977), 349-363.
- [4] R. C. Busby, *Double centralizers and extensions of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **132** (1968), 79-99.
- [5] J. A. Mingo, *K-theory and multipliers of stable C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **299** (1987), 397-411.
- [6] J. Packer, *C^* -algebras generated by projective representations of the discrete Heisenberg group*, J. Operator Theory, **18** (1987), 41-66.
- [7] J. Packer, *Strong Morita equivalence for Heisenberg C^* -algebras and the positive cones of their K_0 -groups*, Canad. J. Math., **40** (1988), 833-864.
- [8] M. A. Rieffel, *C^* -algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math., **93** (1981), 415-429.
- [9] M. A. Rieffel, *The cancellation theorem for projective modules over irrational rotation C^* -algebras*, Proc. London Math., **47** (1983), 285-302.