

リンクの Gromov 不変量および 3 次元多様体の 双曲的領域のホモトピー不変性について.

早大 理工 相馬 輝彦

我々は [4] においてリンク exterior の Gromov 不変量とリンクとの関係考えた. この論文では [4] の “Note Added in Proof” で述べたことの正確な証明を与える. また既約コンパクト 3-多様体でその境界がトーラスからなるもののトーラス分解における双曲的成分全体 (これを双曲的領域ということにする) はホモトピー不変であることを示す. これは [3, 定理 29.1] から也得られるがここでは Gromov 不変量を使ったより簡単な証明を与える.

§1. 準備

この論文ではすべて PL-カテゴリーの中で議論する. また 3-多様体はつねに向きづけ可能とする.

X を任意の位相空間とし, $C_*(X) = \sum_{k \geq 0} C_k(X)$ を $\mathbb{R}$ -係数の特

異鎖複体とする. $C_*(X)$ の任意の元 c は $c = \sum r_i \phi_i$ の形で定義される. ここで $r_i \in \mathbb{R}$, ϕ_i は特異単体. このとき c のノルム $\|c\|$ を

$$\|c\| = \sum |r_i| \geq 0$$

で定義する.

M をコンパクトな 3-多様体でその境界 ∂M はいくつかのトーラスからなるものとする. このとき M の (Thurston 型の) Gromov 不変量 $\|M\|_0$ を

$$\|M\|_0 = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \|c\|; c \in C_3(M), [c] = [M, \partial M], \|\partial c\| < \varepsilon \}$$

で定義する.

L を S^3 のリンクとする. $E(L) = S^3 - \text{int } N(L)$ を L の リンク exterior という. ここで $N(L)$ は L の S^3 における正則近傍である. L の Gromov 不変量 $\|L\|_0$ を

$$\|L\|_0 = \|E(L)\|_0$$

で定義する. 我々は [4] の中で次の定理を証明した.

定理 1. L_1, L_2 を S^3 の 2 つのリンクとする. このとき次の

(i), (ii), (iii) が成立する.

$$(i) \quad \|L_1 + L_2\|_0 = \|L_1\|_0 + \|L_2\|_0,$$

- (ii) $\|L_1 \# L_2\|_0 = \|L_1\|_0 + \|L_2\|_0,$
- (iii) リットの Gromov 不変量は リット群によって決まる.

定理 3 において定理 1(iii) をリンクの場合に拡張する. これ以後の記号, 定義はすべて [4] に従う.

§2. 双曲的領域のホモトピー不変性

M を既約コンパクト 3-多様体で, ∂M は空でないいくつかのトーラスからなるとする. このとき Thurston の定理 [5, 定理 A] とトーラス定理 [2, 定理 3.5] により, $\text{int} M$ の中に incompressible で互いに素なトーラス $T_1 + \dots + T_n$ が存在して, M を $T_1 + \dots + T_n$ に沿って切り開いたコンパクト 3-多様体 (これを $M_{T_1 + \dots + T_n}$ と表す) の各連結成分 N は Seifert ファイバード空間であるかまたは $\text{int} N$ は双曲的 3-多様体 (負の定曲率 (= -1) をもつ完備, 有限体積の Riemann 多様体) になる. 前者の場合 N をこのトーラス分解の Seifert 成分, 後者の場合 N を 双曲的成分 という. 双曲的成分の素な和集合 (disjoint union) を M の 双曲的領域 といい $\mathcal{H}(M)$ と書く. [2, 定理 3.5] により $\mathcal{H}(M)$ はトーラス分解によらず M のみによって決まることがわかる.

実際、次の定理より $\mathcal{H}(M)$ が M のホモトピー型に依らないことがわかる。

定理 2. M, N を既約コンパクト 3-多様体で、トーラスからなる境界をもつものとする。 M, N がホモトピー同値のとき、 $\mathcal{H}(M)$ と $\mathcal{H}(N)$ は同相になる。このとき特に $\|M\|_0 = \|N\|_0$ が成立する。

証明. $H_1, \dots, H_k$ を N の双曲的成分とする。したがって $\mathcal{H}(N) = H_1 + \dots + H_k$ 。また N のトーラス分解を $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$) となるようにとる。もし $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ のときは H_i と H_j の間にいくつかの $T^2 \times I$ に同相な Seifert 成分を加えたトーラス分解を考えればよい。図 1 参照。

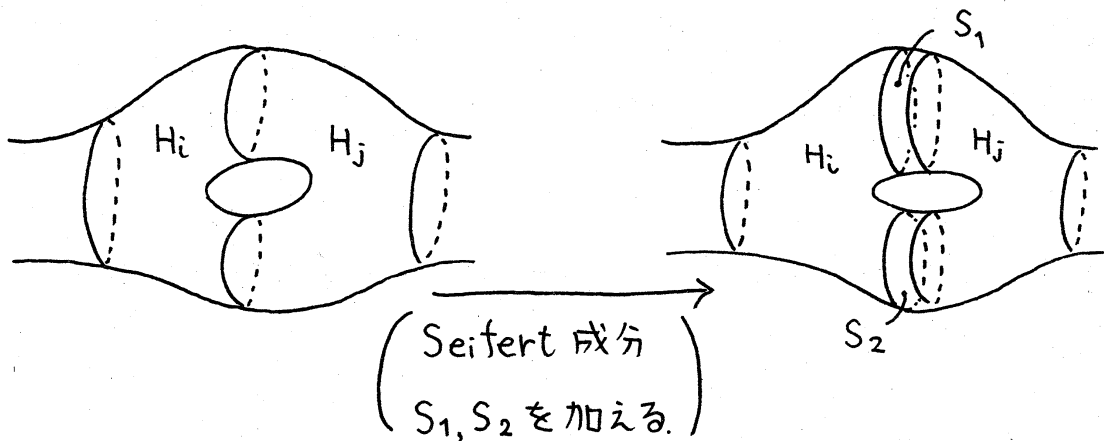


図 1.

同様にして $H_i \cap \partial N = \emptyset$ ($i=1, \dots, k$) と仮定できる.

$f: M \rightarrow N$ をホモトピー同値写像とする. このとき $f^{-1}(T_1 + \dots + T_n)$ は互いに素ないくつかの incompressible トーラスおよびアニュラスからなると仮定してよい ([1, 補題 6.5] 参照). ここで $T_1 + \dots + T_n$ は N のトーラス分解を定義している incompressible トーラス. $f^{-1}(H_i) = H'_i$ とおく. $f_*: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ は全射だから, H'_i キムである.

主張 1. $f(\partial H'_i) = \partial H_i$ と仮定できる.

証明. T を $\partial H'_i$ の 1 つの連結成分とすると, $f(T) \subset H_i$ となる. H_i は本質的トーラスは含まないので $f(T)$ は ∂H_i のある連結成分にホモトピックになる. $f(T)$ をそのホモトピーに沿って ∂H_i の中に押し込む. $H_i \cap H_j = \emptyset$ ($i \neq j$) としたから, ホモトピーは $f^{-1}(H_j)$ ($j \neq i$) を動かさずに実現できる. $\square$

主張 2. H'_i は $T^2 \times I$ に同相な連結成分をもたないと仮定できる.

証明. H'_i のある連結成分 C が $T^2 \times I$ に同相であるとする. このとき主張 1 より $f(\partial C) \subset \partial H_i$. C の図 2 のような分解を

考える.

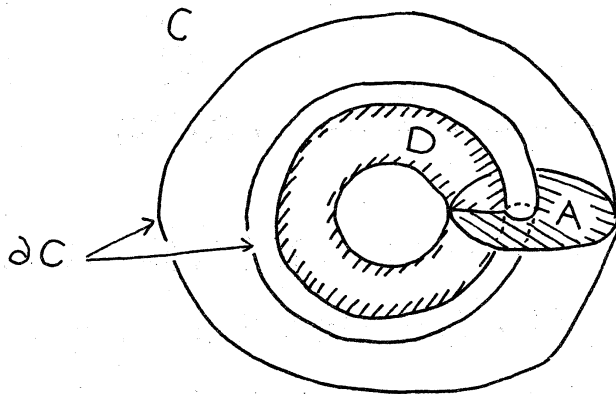


図 2.

H_i は本質的なアニュラスを含まないから, f をホモトピーで動かして $f(A \cup \partial C) \subset \partial H_i$ となるようにできる. このとき $f(\partial D) \subset \partial H_i$ となる. ∂H_i は H_i で incompressible であり, $\pi_2(H_i) = 0$ だから, f をホモトピーで動かして $f(D \cup A \cup \partial C) \subset \partial H_i$ となるようにできる. $C_{A+D} \simeq B^3$, $f(\partial(C_{A+D})) \subset \partial H_i$, $\pi_3(H_i) = 0$ であるから, f をホモトピーで動かして $f(C) \subset \partial H_i$ とできる. 最後に $f(C)$ を H_i の外側の Seifert 成分の中へと押し出すことによって, $f^{-1}(H_i) = H'_i - C$ とできる. $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$) であるから, これらのホモトピーは $f^{-1}(H_j)$ ($i \neq j$) を動かさずに定義できる. $\square$

定理 2 の証明の続き. C を H_i の 1 つの連結成分とするとき次の可換な図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(C) & \xrightarrow{(f/C)_*} & \pi_1(H_i) \\
 i_* \downarrow & & j_* \downarrow \\
 \pi_1(M) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(N)
 \end{array}$$

ここで $i: C \rightarrow M$, $j: H_i \rightarrow N$ は包含写像. i_* , j_* は単射, f_* は同型であるから, $(f/C)_*$ は単射である. したがって Waldhausen [6, 定理 6.1] より, $f/H_i: H_i' \rightarrow H_i$ は n_i 重被覆写像 ($n_i \geq 1$) $p_i: H_i' \rightarrow H_i$ にホモトピックになる. したがって H_i' は M のいくつかの双曲的成分の和集合となる. すなわち $H_1' + \cdots + H_k' \subset \mathcal{H}(M)$. Gromov 不変量の定義より, $\|H_i'\|_0 = n_i \|H_i\|_0$ となる. このとき次の不等式が成り立つ ([4, 補題 2] 参照).

$$\begin{aligned}
 \|N\|_0 &= \|H_1\|_0 + \cdots + \|H_k\|_0 \stackrel{(*)}{\leq} n_1 \|H_1\|_0 + \cdots + n_k \|H_k\|_0 \\
 &= \|H_1'\|_0 + \cdots + \|H_k'\|_0 \stackrel{(**)}{\leq} \|M\|_0.
 \end{aligned}$$

また同様にして, $\|M\|_0 \leq \|N\|_0$ も示される. したがって $\|M\|_0 = \|N\|_0$ となり, 不等式 (*), (**) は等式になる. (*) の等式成立より, $n_1 = \cdots = n_k = 1$. したがって各 p_i は同相写像になる. (**) の等式成立より, $\mathcal{H}(M) = H_1' + \cdots + H_k'$ (双曲的成分の Gromov 不変量が正であることに注意せよ). したがって $p_1 + \cdots + p_k: \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(N)$ は同相写像になる. $\square$

§3. リンクの Gromov 不変量のリンク群による不変性

L を S^3 のリンクとするとき, $\pi L = \pi_1(E(L))$ とおく.

定理 3. L_1, L_2 を S^3 のリンクとする. $\pi L_1 \cong \pi L_2$ のとき
 $\|L_1\|_0 = \|L_2\|_0$ となる.

証明. L_1, L_2 の splitting :

$$L_1 = L_{11} + \cdots + L_{1\ell},$$

$$L_2 = L_{21} + \cdots + L_{2\ell}$$

を考える. ここで各 L_{ij} は non-splittable. このとき

$$\pi L_1 \cong \pi L_{11} * \cdots * \pi L_{1\ell},$$

$$\pi L_2 \cong \pi L_{21} * \cdots * \pi L_{2\ell}$$

となる. $E(L_{ij})$ は既約でありかつ $\partial E(L_{ij})$ はトーラスからなることより, πL_{ij} は非自明な自由積に分解しない ([1, 定理 7.1] 参照). したがって Kurosh の部分群定理 ([7, 定理 2.3.14] 参照) より, $\ell = \ell$ となり (splitting の順序を取り直した後で) $\pi L_{1i} \cong \pi L_{2i}$ が成立する. したがって $E(L_{1i})$ と $E(L_{2i})$ はホモトピー同値になるので, 定理 2 より

$$\|L_{1i}\|_0 = \|E(L_{1i})\|_0 = \|E(L_{2i})\|_0 = \|L_{2i}\|_0$$

となる. したがって定理 1 (i) より

$$\begin{aligned}
\|L_1\|_0 &= \|L_{11}\|_0 + \cdots + \|L_{1k}\|_0 \\
&= \|L_{21}\|_0 + \cdots + \|L_{2\ell}\|_0 \\
&= \|L_2\|_0.
\end{aligned}$$

これで定理3の証明が完成した。□

L を S^3 のリンクとする。 $E(L)$ がグラフ多様体のとき、 L を グラフリンク という。

系. (i) L を S^3 のリンクとするとき、 $\|L\|_0 = 0$ であるための必要十分条件は L がグラフリンクになることである。

(ii) 2つのリンク L_1, L_2 が $\pi L_1 \cong \pi L_2$ を満たすとする。このとき L_1 がグラフリンクであれば L_2 もグラフリンクになる。

証明は [4, 系1] および定理3より明らか。

参考文献

- [1] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86, Princeton Univ. Press. 1976.
- [2] W. Jaco and P. Shalen, A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds,

- Proc. Symp. in Pure Math. 32 (1978), 71-84.
- [3] K. Johanson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, Lecture Notes in Math. 761, Springer-Verlag 1979.
- [4] T. Soma, The Gromov invariant of links, Invent. Math. (to appear).
- [5] W. Thurston, Hyperbolic structures on 3-manifolds (preprint).
- [6] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [7] H. Zieschang, E. Vogt and H. Coldewey, Surfaces and planar discontinuous groups, Lecture Notes in Math. 835, Springer-Verlag 1980.