

## 三次形式で書かれる非線形波動方程式の解

東大工            梶原 健司 (Kenji Kajiwara)  
松木平 淳太 (Junta Matsukidaira)  
薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)

### 1. はじめに

Korteweg-de Vries(KdV) 方程式や Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式に代表されるソリトン方程式は、逆散乱法や直接法により詳しく解析され、非線形波動現象の理解に大きな役割を果たしてきた。また現在では、佐藤幹夫氏ら京大数理研グループによる  $\tau$  関数の理論 [1] をはじめとして、可積分系の統一的理解を目指す研究も進みつつある。

一方、逆散乱法や直接法の立場から、新しい可積分な方程式を探す試みも盛んに行われている。Kaup は摂動法を用いて、一次元浅水波を記述する方程式として次の方程式を提出し (独立に Broer[2])、逆散乱法を用いて解析することを試みた[3]。

$$\Pi_T = \Phi_{XX} + \delta^2 \left( \frac{1}{3} - \sigma \right) \Phi_{XXXX} - \epsilon (\Phi_X \Pi)_X, \quad (1a)$$

$$\Pi = \Phi_T + \frac{1}{2} \epsilon \Phi_X^2. \quad (1b)$$

ただし、 $\Phi$  は速度ポテンシャル、 $\Pi$  は水面波の波高であり、 $\sigma$  は表面張力を表すパラメータ、 $\epsilon$ 、 $\delta$  は摂動のパラメータである。(1) に対して変数変換

$$\begin{aligned} x &= \alpha X, & t &= \beta T, \\ \Phi_x &= \frac{2\delta}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{3} - \sigma} u, \\ \Pi &= -\frac{2\delta^2}{\epsilon} \left( \frac{1}{3} - \sigma \right) \alpha^2 \left( 2h - u_x - \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

を行えば、

$$h_t = (h_x + 2uh)_x, \quad (3a)$$

$$u_t = (u^2 + 2h - u_x)_x \quad (3b)$$

が得られる。ただし、 $\alpha$ 、 $\beta$ は

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = -\frac{1}{\delta\sqrt{\frac{1}{3}-\sigma}}$$

を満たさなければならない。我々は(3)を Broer-Kaup 方程式と呼ぶ。 $h$  はほぼ水面波の波高、 $u$  は速度場とみなすことができる。

最近我々は、(3)が適当な変数変換の後に三次形式で表され、さらにその解はある種のロンスキアンで表されることを見いだした[4]-[6]。また、これをもとにして、いくつかの三次形式とその解を構成することができ、そこから最近 Ruijenaars によって提出された相対論的戸田方程式[7]など興味深い方程式が導かれることがわかった[8]。本稿では以下、第2節で三次形式とそこから導かれる非線形方程式について述べる。また第3節ではそのなかで Broer-Kaup 方程式を取り上げてその解を議論し、今までに知られているソリトン方程式にはない解の特徴を明らかにする。

## 2. 三次形式

本節では三次形式とそれから導かれる方程式をまとめておく。詳しくは[4]-[6]を参照されたい。三次形式には、独立変数が連続的か離散的かによっていくつかの種類がある。独立変数が全て連続変数の場合、最も簡単な三次形式は次のような  $3 \times 3$  行列式で表される方程式である。

$$\begin{vmatrix} p_0(\tilde{\partial}_x)p_0(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_0(\tilde{\partial}_x)p_1(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_0(\tilde{\partial}_x)p_2(-\tilde{\partial}_y)\tau \\ p_1(\tilde{\partial}_x)p_0(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_1(\tilde{\partial}_x)p_1(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_1(\tilde{\partial}_x)p_2(-\tilde{\partial}_y)\tau \\ p_2(\tilde{\partial}_x)p_0(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_2(\tilde{\partial}_x)p_1(-\tilde{\partial}_y)\tau & p_2(\tilde{\partial}_x)p_2(-\tilde{\partial}_y)\tau \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

ただし、 $p_n$  は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)k^n = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n k^n\right) \quad (5)$$

で定義される多項式であり、さらに、

$$\tilde{\partial}_x = (\partial_{x_1}, \frac{1}{2}\partial_{x_2}, \frac{1}{3}\partial_{x_3}, \dots),$$

$$\tilde{\partial}_y = (\partial_{y_1}, \frac{1}{2}\partial_{y_2}, \frac{1}{3}\partial_{y_3}, \dots)$$

である。方程式 (4) は次のような二方向ロンスキアンで表される解を持つ。

$$\tau = \begin{vmatrix} f & \partial_{x_1} f & \partial_{x_1}^2 f & \dots & \partial_{x_1}^{N-1} f \\ \partial_{y_1} f & \partial_{x_1} \partial_{y_1} f & \partial_{x_1}^2 \partial_{y_1} f & \dots & \partial_{x_1}^{N-1} \partial_{y_1} f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1}^{N-1} f & \partial_{x_1} \partial_{y_1}^{N-1} f & \partial_{x_1}^2 \partial_{y_1}^{N-1} f & \dots & \partial_{x_1}^{N-1} \partial_{y_1}^{N-1} f \end{vmatrix}. \quad (6)$$

ただし、 $f$  は次の分散関係を満足する。

$$\partial_{x_j} f = \partial_{x_1}^j f, \quad \partial_{y_j} f = \partial_{y_1}^j f, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

実際、(6) が (4) の解になっていることは、ある  $3N \times 3N$  行列式をラプラス展開することによって示すことができる[4]。(4) に対して従属変数変換

$$w = \frac{p_1(-\tilde{\partial}_y) \tau}{\tau}, \quad r = \frac{p_2(-\tilde{\partial}_y) \tau}{\tau} \quad (8)$$

を施せば、次の  $2+2$  次元の方程式系が得られる。

$$w_{y_2} = w_{y_1 y_1} - 2w w_{y_1} + 2r_{y_1}, \quad (9a)$$

$$(r_{x_2} + r_{x_1 x_1}) w_{x_1} = r_{x_1} (w_{x_2} + w_{x_1 x_1}). \quad (9b)$$

(4) に対して、 $\tau$  が  $t_i = x_i + y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  のみに依存するという制限を課せば、次のような三次形式を得る。

$$\begin{vmatrix} p_0(\tilde{\partial}_t) p_0(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_0(\tilde{\partial}_t) p_1(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_0(\tilde{\partial}_t) p_2(-\tilde{\partial}_t) \tau \\ p_1(\tilde{\partial}_t) p_0(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_1(\tilde{\partial}_t) p_1(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_1(\tilde{\partial}_t) p_2(-\tilde{\partial}_t) \tau \\ p_2(\tilde{\partial}_t) p_0(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_2(\tilde{\partial}_t) p_1(-\tilde{\partial}_t) \tau & p_2(\tilde{\partial}_t) p_2(-\tilde{\partial}_t) \tau \end{vmatrix} = 0, \quad (10a)$$

または、

$$\begin{vmatrix} \tau & \partial_x \tau & (\partial_x^2 - \partial_t) \tau \\ \partial_x \tau & \partial_x^2 \tau & \partial_x (\partial_x^2 - \partial_t) \tau \\ (\partial_x^2 + \partial_t) \tau & \partial_x (\partial_x^2 + \partial_t) \tau & (\partial_x^2 + \partial_t) (\partial_x^2 - \partial_t) \tau \end{vmatrix} = 0. \quad (10b)$$

ただし、 $t_1 = x$ 、 $t_2 = t$  とおいた。(10) の解は、

$$\tau = \begin{vmatrix} f & \partial_x f & \partial_x^2 f & \dots & \partial_x^{N-1} f \\ \partial_x f & \partial_x^2 f & \partial_x^3 f & \dots & \partial_x^N f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_x^{N-1} f & \partial_x^N f & \partial_x^{N+1} f & \dots & \partial_x^{2N-2} f \end{vmatrix}, \quad (11a)$$

$$\partial_t f = \partial_x^2 f \quad (11b)$$

で与えられる。さらに (10) に対して従属変数変換

$$h = \partial_x^2 \log \tau, \quad uh = -\frac{1}{2} \partial_x (\partial_x^2 - \partial_t) \log \tau \quad (12)$$

を行えば、Broer-Kaup 方程式 (3) が得られる。

また、離散的な独立変数を導入し、 $\tau$  として二方向カソラチ行列式

$$\tau_{m,n} = \begin{vmatrix} f_{m,n} & f_{m,n+1} & \cdots & f_{m,n+N-1} \\ f_{m+1,n} & f_{m+1,n+1} & \cdots & f_{m+1,n+N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m+N-1,n} & f_{m+N-1,n+1} & \cdots & f_{m+N-1,n+N-1} \end{vmatrix} \quad (13)$$

ただし、

$$\partial_x f_{m,n} = f_{m,n+1}, \quad \partial_y f_{m,n} = f_{m+1,n} \quad (14)$$

を考えれば、 $\tau_{m,n}$  は次のような三次形式を満足することを示すことができる [5]。

$$\begin{vmatrix} \partial_y \tau_{m,n-1} & \tau_{m,n-1} & \tau_{m+1,n-1} \\ \partial_y \tau_{m,n} & \tau_{m,n} & \tau_{m+1,n} \\ \partial_x \partial_y \tau_{m,n} & \partial_x \tau_{m,n} & \partial_x \tau_{m+1,n} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

(15) に対して従属変数変換

$$\phi_{m,n} = \log \frac{\tau_{m,n}}{\tau_{m+1,n}}, \quad \psi_{m,n} = \log \frac{\tau_{m,n}}{\tau_{m,n-1}} \quad (16)$$

を施せば、次のような 2 + 2 次元の微分差分方程式系が得られる。

$$\partial_x \partial_y \phi_{m,n} = \frac{\partial_x \phi_{m,n} \partial_y \psi_{m,n}}{e^{\phi_{m,n} - \phi_{m,n-1}} - 1} - \frac{\partial_x \phi_{m+1,n} \partial_y \psi_{m+1,n}}{e^{\phi_{m+1,n} - \phi_{m+1,n-1}} - 1}, \quad (17a)$$

$$\partial_x \partial_y \psi_{m,n} = \frac{\partial_x \phi_{m,n} \partial_y \psi_{m,n}}{e^{\psi_{m,n} - \psi_{m+1,n}} - 1} - \frac{\partial_x \phi_{m,n-1} \partial_y \psi_{m,n-1}}{e^{\psi_{m,n-1} - \psi_{m+1,n-1}} - 1}, \quad (17b)$$

$$\phi_{m,n-1} - \phi_{m,n} = \psi_{m+1} - \psi_{m,n}. \quad (17c)$$

さらに、三次形式 (15) に対して、 $\tau_{m,n}$  が  $t = x + y$ 、 $k = m + n$  のみに依存するという制限を課せば、

$$\begin{vmatrix} \partial_t \tau_{k-1} & \tau_{k-1} & \tau_k \\ \partial_t \tau_k & \tau_k & \tau_{k+1} \\ \partial_t^2 \tau_k & \partial_t \tau_k & \partial_t \tau_{k+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

という三次形式が得られる。これから従属変数変換

$$\varphi_k = k \log(-g^2) + \log \frac{\tau_k}{\tau_{k+1}} \quad (19)$$

を施せば、相対論的戸田方程式

$$\partial_t^2 \varphi_k = (\partial_t \varphi_k) \left\{ (\partial_t \varphi_{k-1}) \frac{g^2 e^{\varphi_{k-1} - \varphi_k}}{1 + g^2 e^{\varphi_{k-1} - \varphi_k}} - (\partial_t \varphi_{k+1}) \frac{g^2 e^{\varphi_k - \varphi_{k+1}}}{1 + g^2 e^{\varphi_k - \varphi_{k+1}}} \right\} \quad (20)$$

を得る。従って、(17) はその  $2+2$  次元への拡張と見なすことができよう。

### 3. Broer-Kaup 方程式の解

本節では Broer-Kaup 方程式 (3) に対象を絞って、その解について議論する。Broer-Kaup 方程式の解は、三次形式 (10) の持つ対称性や解のロンスキアン構造を反映して、今まで知られているソリトン方程式の解にない性質を持つ。

まず 1-ソリトン解を得るためには、ロンスキアン解 (11a) において行列式の大きさ  $N=1$  ととり、

$$\tau = f = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} \quad (21)$$

とすればよい。ここで、 $\eta_i$ 、 $i=1, 2$  は分散関係 (11b) を満足するように

$$\eta_i = p_i x + p_i^2 t, \quad p_i : \text{任意パラメータ} \quad (22)$$

と選ぶ。これから  $u$ 、 $h$  は次のように得られる。

$$\begin{aligned} h &= \partial_x^2 \log \tau \\ &= \frac{(p_2 - p_1)^2}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{(p_2 - p_1)}{2} (x + (p_1 + p_2)t), \\ u &= -\frac{1}{2h} \partial_x (\partial_x^2 - \partial_t) \log \tau \end{aligned} \quad (23a)$$

$$= \frac{p_1 e^{\eta_1} + p_2 e^{\eta_2}}{e^{\eta_1} + e^{\eta_2}}. \quad (23b)$$

これは水面における振幅  $\frac{(p_1 - p_2)^2}{4}$ 、速度  $-(p_1 + p_2)$  の 1-ソリトンを与えている。

次に、2-ソリトン解を得るためには、 $N=2$  とし、

$$f = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} \quad (24)$$

とすればよい。一般に、 $N$ -ソリトン解を得るには、行列式の大きさを  $N$  とし、 $f$  は指数関数の  $2N$  項の和と選べばよい。このとき、 $u$  はキंक型の解を与えていることに注意しておく。

次に、三次形式特有の解の性質について議論する。第一に、次のような特徴を挙げておく。

解の特徴 1) 水面波  $h$  の 1-ソリトン解は、形を決めても速度は任意である。

この性質は今まで知られている空間一次元のソリトン方程式には無いものである。例えば、代表的な空間一次元のソリトン方程式である KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (25)$$

の 1-ソリトン解は

$$u = \frac{p_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{p_1}{2} (x - p_1^2 t) \quad (26)$$

で与えられる。形は  $p_1$  によって決まり、速度は  $p_1^2$  である。つまり、形を決めると同時に速度も一意に決定されてしまう。

この特徴は、三次形式 (10) の持つ次のような対称性に起因している。

(1) ガリレイ変換に関する対称性

$$x \rightarrow x' = x + \beta t, \quad t \rightarrow t' = t$$

としても三次形式 (10) は不変。ただし、 $\beta$  は任意定数である。

(2) 時間反転に対する対称性

$$t \rightarrow t' = -t$$

としても三次形式 (10) は不変である。

これらの対称性から分散関係 (11b) を

$$\partial_t f = \pm (\partial_x^2 + \beta \partial_x) f \quad (27)$$

と拡張できる。従って、ソリトン解において、

$$\eta_i = p_i x \pm (p_i^2 + \beta p_i) t \quad (28)$$

と取れることになる。この効果は 1-ソリトン解において顕著に現われる。実際、 $\eta_i$  を (28) のように選んだとき、 $h$  と  $u$  は次のように与えられる (ただし符号は+にとった)。

$$h = \frac{(p_1 - p_2)^2}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{p_1 - p_2}{2} (x + (p_1 + p_2 + \beta) t), \quad (29a)$$

$$u = \frac{(p_1 + \frac{1}{2}\beta)e^{\eta_1} + (p_2 + \frac{1}{2}\beta)e^{\eta_2}}{e^{\eta_1} + e^{\eta_2}}. \quad (29b)$$

水面波  $h$  に注目すると、1-ソリトンの形は  $p_1 - p_2$  で決まっているのに対し、速度は  $-(p_1 + p_2 + \beta)$  で与えられる。つまり、形が同じであっても速度は任意でありうるのである (図 1 a)。もちろん、そのときの  $u$  は異なっている。 $\beta = 0$  のとき、つまり (23b) と比較すると、漸近的に  $\frac{\beta}{2}$  だけ「嵩上げ」されていることが分かる (図 1 b)。

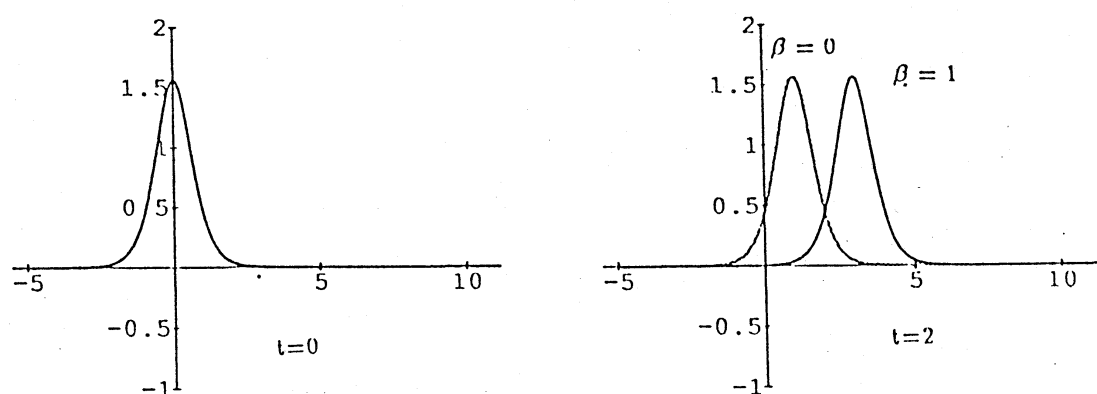


図1 a 形が同じで速度の違う二つの1-ソリトン解

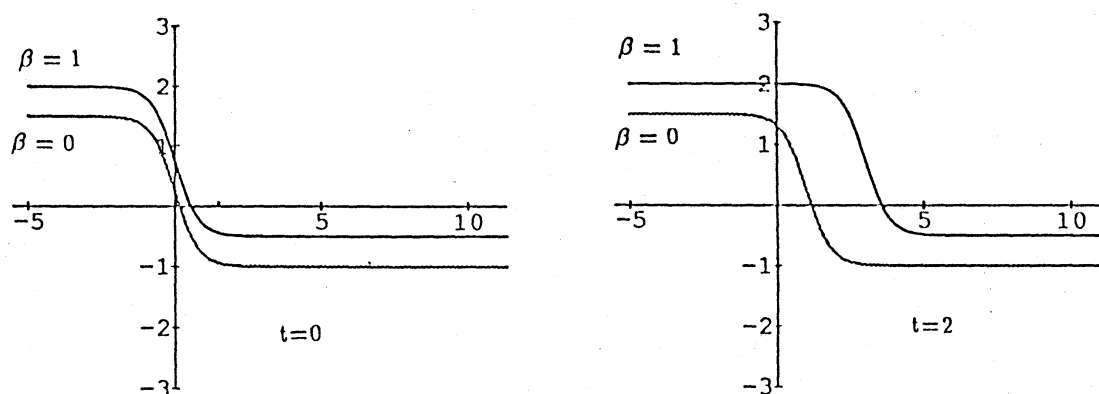


図1 b 上に対応する速度場  $u$   
 濃い線は薄い線より  $\frac{\ell}{2} = 0.5$  だけ嵩上げされている。

なお、 $N$ -ソリトン解を考えたときの任意定数  $\beta$  の自由度は、 $h$  において、全てのソリトンの速度を同時に  $\beta$  だけ変える自由度に対応することを注意しておく。

二番目の特徴として、共鳴解の存在を挙げよう。

解の特徴 2)  $N$  個のソリトンが相互作用した後、 $M$  個のソリトンになるような共鳴解が存在する。ただし、 $N$  と  $M$  は任意の整数である。

共鳴解は KP 方程式などの空間二次元のソリトン方程式についてはよく知られているが、空間一次元のソリトン方程式についてはほとんど知られていない。例として KdV 方程式 (25) を再び取り上げる。(25) は従属変数変換

$$u = 2\partial_x^2 \log \tau \quad (30)$$

によって二次形式

$$(D_x D_t + D_x^4) \tau \cdot \tau = 0 \quad (31)$$

に変換される。これから 2-ソリトン解は摂動法によって

$$\tau = 1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + \frac{(p_1 - p_2)^2}{(p_1 + p_2)^2} e^{\xi_1 + \xi_2} \quad (32)$$

のように得られる。ただし、

$$\xi_i = p_i x - p_i^3 t, \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

である。第4項(相互作用項)を0にするようにパラメータを選べば共鳴解が得られるが、この場合、 $p_1 = p_2$ としなければならない。すると、(32)は

$$\tau = 1 + 2e^{\xi_1}$$

となり、1-ソリトン解に帰着する。つまり、KdV方程式には共鳴解は存在しない。

Broer-Kaup方程式の場合、2-ソリトン解を与える $\tau$ は

$$\begin{aligned} \tau = & a_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + a_{13}e^{\eta_1+\eta_3} + a_{14}e^{\eta_1+\eta_4} \\ & + a_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + a_{24}e^{\eta_2+\eta_4} + a_{34}e^{\eta_3+\eta_4} \end{aligned} \quad (34)$$

である。ただし、

$$a_{ij} = (p_i - p_j)^2 \quad (35)$$

である。ここで、例えば第6項を0にするために $p_3 = p_4$ ととってもKdV方程式の場合のように自明な解には帰着しない。実際、この $\tau$ から $h$ 、 $u$ の漸近挙動を調べてみると、2つのソリトンが相互作用して融合し、1つのソリトンとなる(または $\eta_i$ のとり方によってはその逆)共鳴解を与えていることが分かる。一般に、 $N$ -ソリトン解には( $\beta$ を除いて) $2N$ 個のパラメータがあるが、その内の $2M$ 個を等しくおくことによって $N$ 個のソリトンが融合して $M$ 個のソリトンとなる(または $M$ 個のソリトンが分裂して $N$ 個のソリトンとなる)ような共鳴解が得られる。この特徴は三次形式の解の持つロンスキアン構造に起因している。図2は3つのソリトンが融合して2つのソリトンになる共鳴解の振舞を示している。

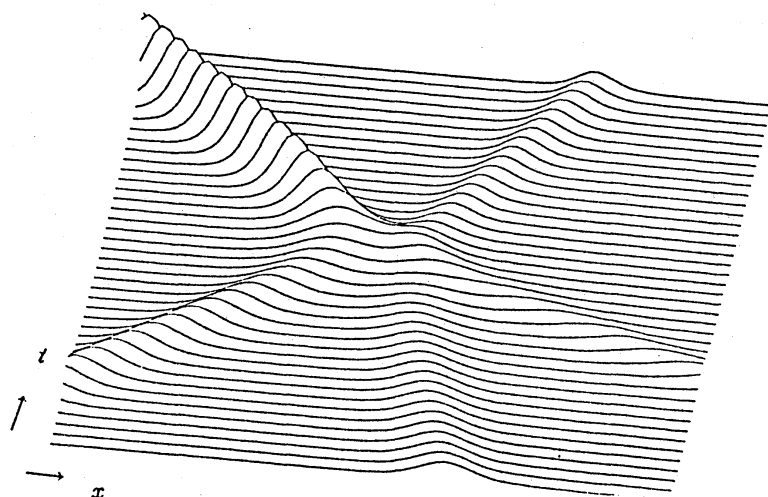


図2

最後にこれらの性質から導き出されるある興味深い解について触れておく。次のような二種類の $\tau$ を考える。

$$\tau_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_i = p_i x + (p_i^2 + \beta p_i) t, \quad (36a)$$

$$\tau_2 = e^{\eta'_1} + e^{\eta'_2} + e^{\eta'_3}, \quad \eta'_i = p'_i x + (p'^2_i + \beta' p'_i) t. \quad (36b)$$

パラメータを適当に選ぶことにより、これら二種類の $\tau$ から得られる水面波の波高 $h$ は次のような挙動を示す。すなわち、初期の波形はほとんど同じであるにもかかわらず、時間がたつと前者から得られる水面波はそのまま伝播し、後者から得られる水面波は二つに分裂する(図3 a)。

その理由を簡単に述べておく。前者からは形が $p_2 - p_1$ で特徴づけられ、速度が $-(p_1 + p_2 + \beta)$ であるソリトンが得られる。また、後者からは、漸近挙動を評価することによって、形が $p'_3 - p'_1$ 、速度が $-(p'_1 + p'_3 + \beta')$ で特徴づけられるソリトンが、形が $p'_3 - p'_2$ 、速度が $-(p'_2 + p'_3 + \beta')$ で特徴づけられるソリトンと形が $p'_2 - p'_1$ 、速度が $-(p'_1 + p'_2 + \beta')$ であるような二つのソリトンに分裂するような現象を表す解が得られることがわかる。(ただし、 $p'_1 < p'_2 < p'_3$ とした。)従って、 $p_2 - p_1 = p'_3 - p'_1$ であるようにすれば初期の形はほとんど同じになり、それに応じて適当に $\beta, \beta'$ を選べば速度も揃えることができる。もちろん、両者に対応する速度場 $u$ は異なっていることを注意しておく。(図3 b)

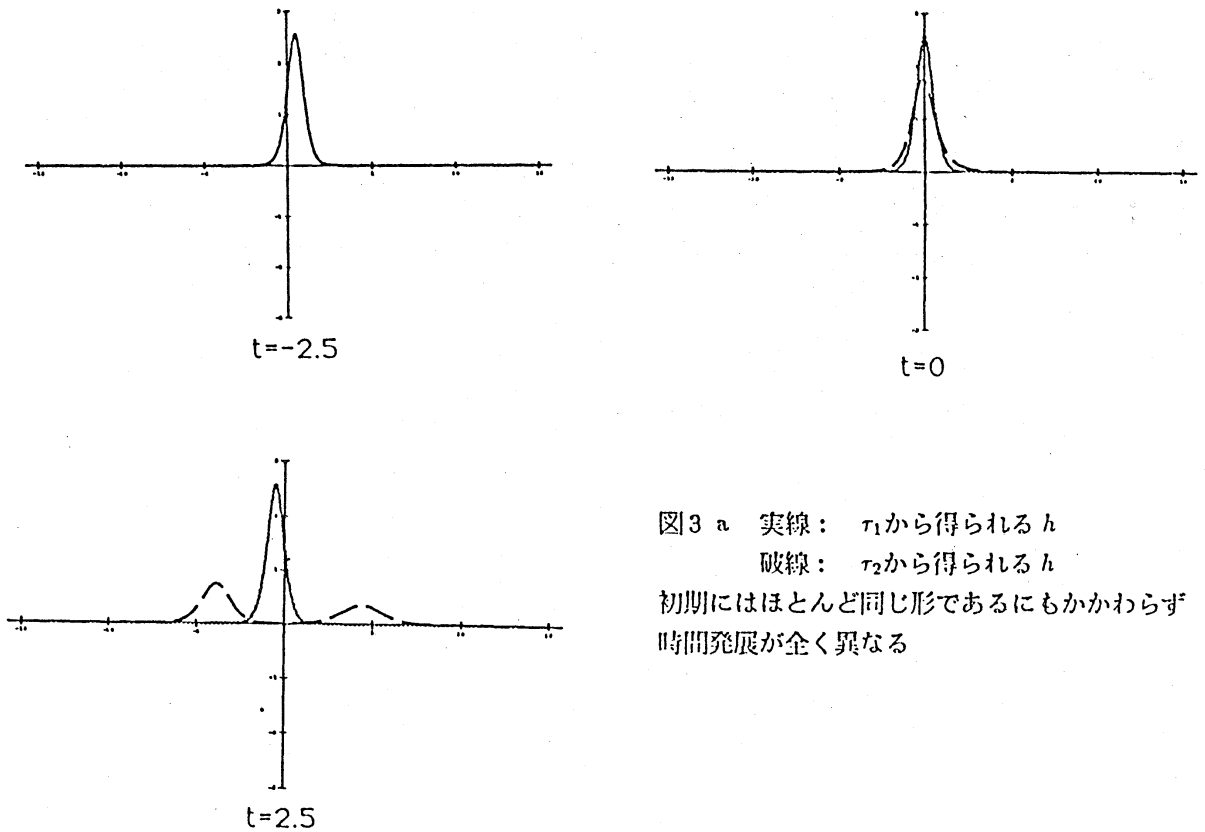


図3 a 実線:  $\tau_1$ から得られる $h$   
 破線:  $\tau_2$ から得られる $h$   
 初期にはほとんど同じ形であるにもかかわらず  
 時間発展が全く異なる

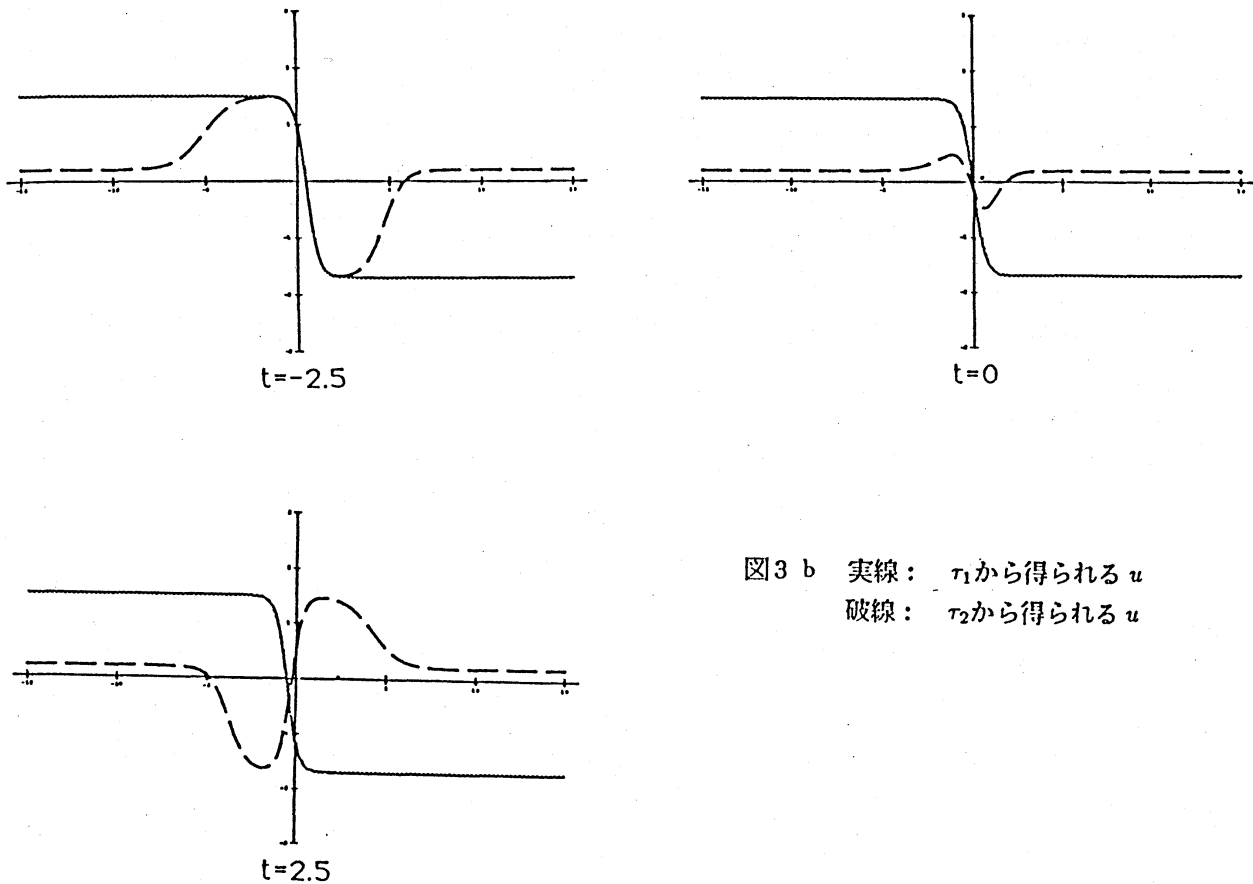


図3 b 実線:  $\tau_1$ から得られる  $u$   
破線:  $\tau_2$ から得られる  $u$

以上、Broer-Kaup 方程式が三次形式で表されることを用いて、その解について議論した。その結果、ソリトンの速度の任意性、共鳴解の存在など通常の空間一次元のソリトン方程式の解には見られない性質を持つことがわかった。なお、相対論的戸田方程式の解も同様な性質を持っており[9]、両者ともに初期値問題を厳密に解いてみることは興味深い問題であろう。最後に、様々な有益な議論をしていただいた広島大学工学部の太田泰広氏と Turku 大の J.Hietarinta 氏に感謝したい。

#### 参考文献

- [1] E.Date, M.Kashiwara, M.Jimbo and T.Miwa, in *Non-linear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory*, ed. by M.Jimbo and T.Miwa (World Scientific, Singapore, 1983) 39.

- [2] L.J.F.Broer, Appl. Sci. Res. 31(1975), 377.
- [3] D.J.Kaup, Prog. Theor. Phys. 54(1975), 396.
- [4] J.Matsukidaira, J.Satsuma and W.Strampp, Phys. Lett. A 147 (1990), 467.
- [5] J.Matsukidaira and J.Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. 59 (1990), 3413.
- [6] J.Matsukidaira and J.Satsuma, Phys. Lett. A 154 (1991), 366.
- [7] S.N.M.Ruijenaars, Commun. Math. Phys. 133 (1990), 217.
- [8] J.Hietarinta and J.Satsuma, to appear in Phys. Lett. A.
- [9] J.Hietarinta, K.Kajiwara, J.Matsukidaira and J.Satsuma, preprint.