

前射影多元環の傾理論

伊山 修

多元環の表現論とは、環上の加群圏の構造を調べるものである。70年代に Auslander-Reiten によって、整環上の Cohen-Macaulay 加群に対して、今日 Auslander-Reiten 理論と呼ばれる理論が構成された。(原論文 [A, A2] および、概説 [I, Section 3.1] を参照。) 特に以下の場合が良く調べられている。

- 体上の有限次元多元環上の有限次元加群 [ASS, ARS].
- 完備離散付値環上の整環上の格子 [CR1, CR2].
- 可換 Cohen-Macaulay 環上の Cohen-Macaulay 加群 [Y].

多元環の表現論において重要な例は、幾何的な背景を持つ場合がしばしばある。例えば、直既約 CM 加群が同型を除いて有限個しか存在しない整環を有限表現型と呼ぶが、単純特異点は有限表現型の基本的な例である。

Auslander-Reiten 理論と同様に重要な理論に、傾理論がある。傾対象をもつ代数的三角圏は、その自己準同型環上の導来圏として実現される。代数多様体の導来圏が傾対象を持つ場合には、その自己準同型環が興味深い性質を持つ場合がしばしばある。

例えば射影空間 $\mathbb{P}^n$ の傾対象 $T = \mathcal{O} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n)$ の自己準同型環は Beilinson 多元環と呼ばれるが、中でも $n = 1$ の場合は Kronecker 多元環と呼ばれ、tame 表現型多元環の基本的な例として古くから知られている。最近では表現次元の研究において、Beilinson 多元環が有用なサンプルを提供した。

別の例では、商特異点 k^n/G の特異点解消 $X \rightarrow k^n/G$ に対して、 X とねじれ群環 $k[x_1, \dots, x_n] * G$ が導来圏同値となる場合があり、McKay 対応と呼ばれる。特に $n = 2$ の場合、ねじれ群環 $k[x_1, x_2] * G$ は前射影多元環よばれる多元環と森田同値になるが、最近では団傾理論において重要な役割を果たしている。

団傾理論は、近年盛んに研究されているものであり、以下の側面を持つ。

- 団代数の圏論化。
- 傾理論の 2-Calabi-Yau 類似。
- Auslander-Reiten 理論の高次元類似。

本稿では傾理論を前射影多元環の場合に解説し、団傾理論については割愛する。

なお quiver (クイパー、矢筒) は簾、cluster (クラスター) は団、tilting (傾斜) は傾との訳語を用いる。

1. 傾対象

森田理論は、アーベル圏を環上の加群圏として実現する。一方その発展形である傾理論は、三角圏を環上の導来圏として実現する。傾理論では、次の概念が基本的な役割を果たす。

定義 1.1. $\mathcal{T}$ を三角圏とする。対象 $T \in \mathcal{T}$ が以下の条件を満たすときに傾対象と呼ぶ。

- 任意の $i \neq 0$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i]) = 0$ 。
- 直和因子で閉じた $\mathcal{T}$ の三角部分圏で、 T を含むものは $\mathcal{T}$ のみである。

最も基本的な例をあげる。環 R に対して、有限生成射影 R -加群の圏 $\mathrm{proj} R$ 上の有界複体のホモトピー圏

$$\mathrm{K}^b(\mathrm{proj} \Lambda)$$

は、傾対象 Λ を持つ。傾理論の一つの基本定理は、 $\mathcal{T}$ に適当な仮定をつけるとこの逆が成立するというものであり、以下の定式化は Keller によるものである [K, '94]。

定理 1.2. $\mathcal{T}$ が代数的三角圏、 $T \in \mathcal{T}$ が傾対象であれば、三角同値 $\mathcal{T} \simeq \mathrm{K}^b(\mathrm{proj} \mathrm{End}_{\mathcal{T}}(T))$ が存在する。

ただし三角圏 $\mathcal{T}$ が代数的であるとは、あるフロベニウス圏の安定圏と三角同値である事を意味する。詳しくは [H] を参照。

$\mathrm{K}^b(\mathrm{proj} \Lambda)$ の傾対象を Λ の傾複体とよぶ。上の定理の応用として、次の有名な Rickard の定理が得られる。

定理 1.3. [R, '89] 環 Λ, Γ に対して、以下の条件は同値。

- (a) $D(\text{Mod } \Lambda)$ と $D(\text{Mod } \Gamma)$ は三角同値.
- (b) $K^b(\text{proj } \Lambda)$ と $K^b(\text{proj } \Gamma)$ は三角同値.
- (c) Λ の傾複体 T で $\text{End}_{K^b(\text{proj } \Lambda)}(T) \simeq \Gamma$ となるものが存在する.

ただし $D(\text{Mod } \Lambda)$ は Λ -加群の圏 $\text{Mod } \Lambda$ の導来圏を表す.

傾対象を用いて三角圏の構造を分析する事ができる. 実は, 傾対象は組み合わせ的観点からはあまり良いものではない事が, 変異と呼ばれる操作を考えることにより分かる. 改良としては以下の二つの方向がある.

- 傾対象を一般化した準傾対象を扱う. [AI] 参照.
- 傾対象の特別なクラスである傾加群を扱う.

本稿では傾加群を扱う. これは簾の表現の鏡映関手を公理化したものであり, 以下で定義される.

定義 1.4. [BB, '80] 環 Λ 上の加群 T が以下の条件が満たすときに傾加群とよぶ.

- (i) 完全列 $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow T \rightarrow 0$ ($P_0, P_1 \in \text{proj } \Lambda$) が存在する.
- (ii) $\text{Ext}_\Lambda^1(T, T) = 0$.
- (iii) 完全列 $0 \rightarrow \Lambda \rightarrow T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow 0$ ($T_0, T_1 \in \text{add } T$) が存在する.

ここで $\text{add } T$ は, T の有限直和 $T \oplus \cdots \oplus T$ の直和因子全体を表す. 傾加群とは, 射影次元が 1 以下の加群で, 導来圏で傾複体と同型となるものに他ならない事が分かる.

2. 傾変異

Λ -加群 T が基本的であるとは, 直既約加群への直和分解 $T \simeq T_1 \oplus \cdots \oplus T_m$ で, T_1 から T_m が互いに非同型となるものが存在する事を意味する.

基本的傾 Λ -加群の同型類のなす集合を

$$\text{tilt } \Lambda$$

と表す. Riedtmann-Schofield [RS, '91] 以降, Happel-Unger をはじめ多くの研究者によって $\text{tilt } \Lambda$ の持つ組み合わせ的構造が調べられてきた. 中でも重要な要素として

- 半順序
- 変異

の二つがあげられる. 半順序の定義は極めて簡単である.

定義 2.1. $T, U \in \text{tilt } \Lambda$ に対し $\text{Ext}_\Lambda^1(T, U) = 0$ である時に $T \geq U$ と定める.

定義からは明らかではないが, 以下が成立する.

命題 2.2. [RS, '91] $(\text{tilt } \Lambda, \geq)$ は半順序集合をなす.

$\geq$ を傾複体 T, U からそれぞれ生じる導来圏の t -構造の間の包含関係と捉える事が, 大雑把な証明のアイデアである.

一方の変異を定義するには若干の準備が必要である.

一般に Λ -加群 U, V が与えられたとき, 射 $f: U' \rightarrow V$ で以下の条件を満たすものが存在する.

- $U' \in \text{add } U$,
- $\text{Hom}_\Lambda(U, U') \xrightarrow{f} \text{Hom}_\Lambda(U, V)$ は全射.

この時, f を V の右 U -近似とよぶ.

V の右 U -近似の中には, 次の条件を満たすものがただ一つ存在し, それを最小右 U -近似とよぶ.

- $g \in \text{End}_\Lambda(U')$ が $f = fg$ を満たせば, g は同型である.

双対的に (最小) 左 U -近似も定義する.

定義 2.3. $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_n$ を基本的傾 Λ -加群とする. $k = 1, \dots, n$ を固定し $U = \bigoplus_{i \neq k} T_i$ とおく. 最小右 U -近似 $f: U' \rightarrow T_k$ および最小左 U -近似 $f: T_k \rightarrow U''$ をとる.

- (a) f が全射のときに $\mu_k^-(T) := (\text{Ker } f) \oplus U$ とおき, T の右変異とよぶ.
- (b) f が単射で $\text{Cok } f$ の射影次元が 1 以下のときに $\mu_k^+(T) := (\text{Cok } f) \oplus U$ とおき, T の右変異とよぶ.
- (c) 右変異と左変異を合わせて変異とよぶ.

(b) の「射影次元 1 以下」の条件に右と左で若干の非対称が見られるが、次節で扱う前射影多元環などの良い多元環の場合には、自動的に満たされる事を注意しておく。

さて変異の重要性は次の結果にある。

命題 2.4. [RS, '91]

- (a) T の変異も基本的傾 Λ -加群である。
- (b) $\mu_k^-(T) > T$ および $T > \mu_k^+(T)$ が成立する。

さらに変異と半順序の間には、次の定理で与えられる関係がある。

定理 2.5. [HU, '05] $T, T' \in \text{tilt } \Lambda$ に対して以下の条件は同値。

- (a) $T > T'$ かつ、 $T > T'' > T'$ となる $T'' \in \text{tilt } \Lambda$ は存在しない。
- (b) T' は T の左変異。
- (c) T は T' の右変異。
- (d) $T > T'$ かつ、 T と T' の直和因子は一つを除いて一致する。

簡単な例を一つ与えておく。

例 2.6. $\Lambda = \begin{bmatrix} k & k & \cdots & k \\ 0 & k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$ を体 k 上の n 次の三角行列環とする。 A_n 型簇の道多元環とみなす事もできる。

$\text{tilt } \Lambda$ には、以下で与えられる簡単な記述がある。まず、 $0, 1, \dots, n+1, n+2$ を時計回りに頂点とする凸 $(n+3)$ 角形を考える。頂点 i と j を結ぶ対角線を (i, j) で表す。

対角線の集合 S が非交叉分割であるとは、以下の条件が満たされる事である。

- S に含まれるどの 2 本の対角線も、端点以外で交叉しない。
- S に含まれる対角線によって、正 $(n+3)$ 角形が三角形に分割されている。

このとき全単射

$$\{S \mid S \text{ は非交叉分割で, } (0, n+1) \notin S\} \rightarrow \text{tilt } \Lambda$$

が、対応

$$S \mapsto \bigoplus_{(i,j) \in S} {}^t[0 \cdots 0 \overset{i}{k} \cdots \overset{j-1}{k} 0 \cdots 0]$$

により与えられる。

3. 前射影多元環上の傾加群

この節は [IR, BIRS] に従う。 $Q = (Q_0, Q_1)$ を簇とする。 Q_0 で頂点の集合、 Q_1 で矢印の集合を表す。以下では Q がループ（始点と終点の一致する矢印）を持たないと仮定する。

定義 3.1. 新しい簇 $\overline{Q}$ を、 Q の各矢印 $a : i \rightarrow j$ に対して逆向きの矢印 $a^* : j \rightarrow i$ を加える事によって定める。 $\overline{Q}$ の道多元環 $k\overline{Q}$ の元

$$m := \sum_{a \in Q_1} (aa^* - a^*a)$$

によって生成されるイデアルによる剰余多元環

$$\Pi_Q := k\overline{Q}/\langle m \rangle$$

を前射影多元環と呼ぶ。これは自然に次数つき多元環の構造を持ち、その完備化を $\widehat{\Pi}_Q$ で表す。

命題 3.2. π が有限次元である必要十分条件は、 Q がディンキン図形である事。

$\Lambda = \widehat{\Pi}_Q$ を完備前射影多元環とする. この時, 単位元の冪等元分解

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$$

が生じる. 各 $i \in Q_0$ に対して Λ のイデアル I_i を

$$I_i := \langle 1 - e_i \rangle$$

により定める.

命題 3.3. (a) $\mu_k^+(\Lambda) = I_k$.

(b) I_k は傾 Λ -加群.

補題 3.4. 任意の Q の頂点の列 $i_1, \dots, i_\ell$ に対して, イデアルの積 $I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ は傾 Λ -加群.

頂点 i と j の間の Q の矢印の本数を m_{ij} で表す. この時, イデアル I_i の間に次の関係式が存在する事が, 簡単な計算によって確かめられる.

補題 3.5. $i, j \in Q_0$ に対して以下が成立する.

- $I_i^2 = I_i$.
- $m_{ij} = 0$ ならば $I_i I_j = I_j I_i$.
- $m_{ij} = 1$ ならば $I_i I_j I_i = I_j I_i I_j$.

これらの関係式から, 前射影多元環とコクセター群の関係が明らかになる. ただし, Q のコクセター群 W とは, 生成元 s_i ($i \in Q_0$) と関係式

- $s_i^2 = 1$.
- $m_{ij} = 0$ ならば $s_i s_j = s_j s_i$.
- $m_{ij} = 1$ ならば $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$.

により与えられる群である.

イデアル I_i ($i \in Q_0$) の積として表されるイデアル全体を $\langle I_i \rangle_{i \in Q_0}$ で表す.

定理 3.6. [IR, BIRS]

- (a) 全単射 $W \rightarrow \langle I_i \rangle_{i \in Q_0}$, $w \mapsto I_w$ が存在する. それは $w \in W$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ に対し, $I_w := I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ とおいて得られる.
- (b) $W \rightarrow \text{tilt } \Lambda$, $w \mapsto I_w$ は単射であり, さらに Q が拡大ディンキン筋ならば全単射である.

最後に $\text{tilt } \Lambda$ の半順序が, コクセター群の半順序として自然に与えられる事を示す.

定義 3.7. $w, w' \in W$ に対して

- (i) $w' = ww''$ に対して $\ell(w') = \ell(w) + \ell(w'')$ が成立するとき $w \leq_R w'$ と表す.
- (ii) $w' = w'''w$ に対して $\ell(w') = \ell(w''') + \ell(w)$ が成立するとき $w \leq_L w'$ と表す.

$\leq_R$ により与えられる W の半順序を右順序, $\leq_L$ により与えられる W の半順序を左順序と呼ぶ.

このとき以下が成立する.

命題 3.8. (1) I_w の変異は I_{ws_i} ($i \in Q_0$) で与えられる.

- $\ell(w) < \ell(ws_i)$ ならば I_{ws_i} は I_w の左変異.
 - $\ell(w) > \ell(ws_i)$ ならば I_{ws_i} は I_w の右変異.
- (2)
- $<_R$ は $\text{tilt } \Lambda$ の半順序を制限したもの.
 - $<_L$ は $\text{tilt } \Lambda^{\text{op}}$ の半順序を制限したもの.

REFERENCES

- [AI] T. Aihara, O. Iyama *Silting mutation in triangulated categories*, in preparation.
- [ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [A] M. Auslander, *Functors and morphisms determined by objects*, Representation theory of algebras (Proc. Conf., Temple Univ., Philadelphia, Pa., 1976), pp. 1–244. Lecture Notes in Pure Appl. Math., Vol. 37, Dekker, New York, 1978.

- [A2] M. Auslander, *Isolated singularities and existence of almost split sequences*, Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984), 194–242, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin, 1986.
- [A3] M. Auslander, *Rational singularities and almost split sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), no. 2, 511–531.
- [ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [BB] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979), pp. 103–169, Lecture Notes in Math., 832, Springer, Berlin-New York, 1980.
- [BIRS] Buan A., Iyama O., Reiten I., Scott J. *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035–1079.
- [CR1] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory. I. With Applications to Finite Groups and Orders*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1981. C. W. Curtis and I. Reiner,
- [CR2] C. W. Curtis and I. Reiner, *Methods of Representation Theory. II. With Applications to Finite Groups and Orders*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.
- [H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [HU] D. Happel, L. Unger, *On a partial order of tilting modules*, Algebr. Represent. Theory 8 (2005), no. 2, 147–156.
- [I] O. Iyama, *Auslander-Reiten theory revisited*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 349–397, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [IR] O. Iyama, I. Reiten, *Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras*, Amer. J. Math. 130 (2008), no. 4, 1087–1149.
- [K] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 1, 63–102.
- [R] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no. 3, 436–456.
- [RS] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 1, 70–78.
- [Y] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

O. IYAMA: GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, CHIKUSA-KU, NAGOYA, 464-8602 JAPAN
E-mail address: iyama@math.nagoya-u.ac.jp