

空間図形の理解を助ける授業設計とその評価 － スライド・タブレット・立体モデルの併用 －

長野高専・一般科 濱口 直樹 (Naoki Hamaguchi)

Faculty of General Education,

National Institute of Technology, Nagano College

東邦大学・理学部 高遠 節夫 (Setsuo Takato)

Faculty of Science,

Toho University

1 はじめに

高専や大学初年級の数学教育においては、2変数関数のグラフとなる曲面などの空間図形の理解が必要不可欠である。

これらの図形をを黒板やノートに描くことは困難な場合が多いが、我々が整備を進める教材作成支援ツール K_ET Cindy[2, 3] を用いることにより、プリントなどの配付教材中の図形のみならず、タブレット上で扱う図形や3Dプリンタで作成される曲面のためのデータを生成することができるようになった。さらに、最新版の K_ET Cindy には pdf 形式のスライドを容易に作成できる機能が追加されている。

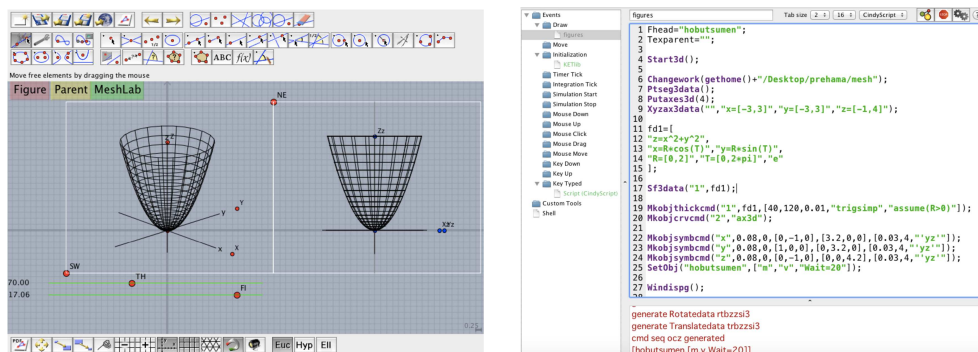


図 1. K_ET Cindy による図形データの作成: Cinderella による描画 (左) とスクリプト画面 (右)

平成 28 年度には東邦大学において、極座標による重積分をテーマとし、プリント、スライド、タブレットおよび立体モデルの 4 種類の教材を併用した授業を実施した。授業後のアンケートでは、我々の予想を超えて、スライド教材に対する学生の評価が高く、また、タブレット教材や立体モデル教材については、それらを手にしながら学んだ内容の理解だけでなく、その後の授業内容の理解にも間接的に良い影響を与えている様子が見られた [1]。

これらの観点から、2変数関数のグラフの導入という空間図形への入り口の段階において、スライドを授業展開の中心に置き、プリントやタブレットおよび立体モデルを併用する授業を設計した。

本稿では、当該授業の概要と授業後のアンケート結果、および今後の課題について述べる。

2 授業設計 – 2次関数のグラフ –

本節では、授業設計の概要について述べる。用いる教材の形式は、プリント、スライド、タブレット、および立体モデルの4種類とする。なお、ここで用いる教材における図形のデータはすべてKEITCindyによって作成される。

対象とする学年等については以下の通りである。

- 学年：高専3学年 33名
- 科目：微分積分Ⅱ（多変数関数の微分積分）
- 内容：2変数関数のグラフ
- 時間：70分

授業の最初に、問題演習のための図2のプリント教材を配付する。

授業内容の説明はすべてスライドを中心に行う。まず、2変数関数のグラフが空間内の曲面で表されることを、図3左のスライドにより説明する。

その基本的な例として1次関数を取り上げ、そのグラフが平面で表されることを図3右のスライドを用いて説明する。またここでは、平面およびその法線ベクトルについての内容が、線形代数における既習事項であることを確認し、プリントでの問題演習によって復習する。

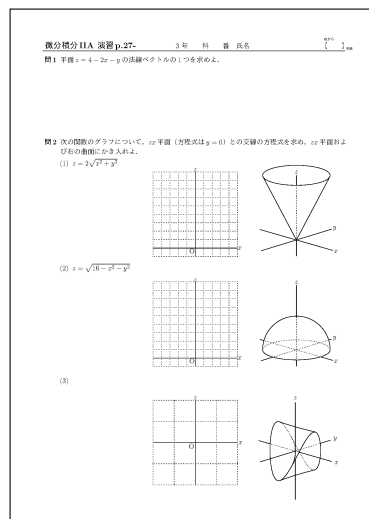


図2. 問題演習のためのプリント教材

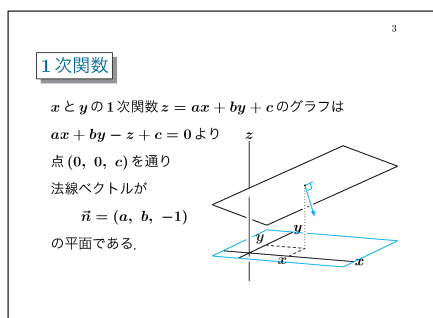
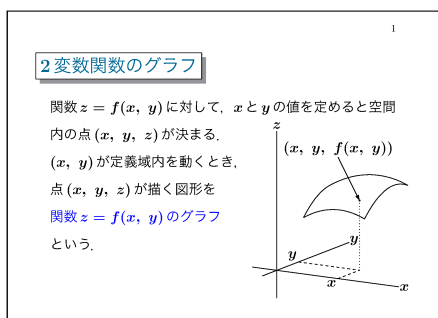


図3. スライド教材：グラフの説明用（左）と1次関数のグラフ（右）

次に、基本的な曲面として、 z 軸のまわりの回転面を扱う。スライドでは、回転放物面を例として説明を行う。回転放物面は、 zx 平面上の放物線を z 軸のまわりに回転して得られると説明される。本授業におけるスライドでは、この説明の通りに曲面が得られる様子を表現している。図 4 は、そのスライドのうちの 9 枚である。実際には 25 枚の pdf ファイルが“パラパラ漫画”のように曲面を作り上げる。

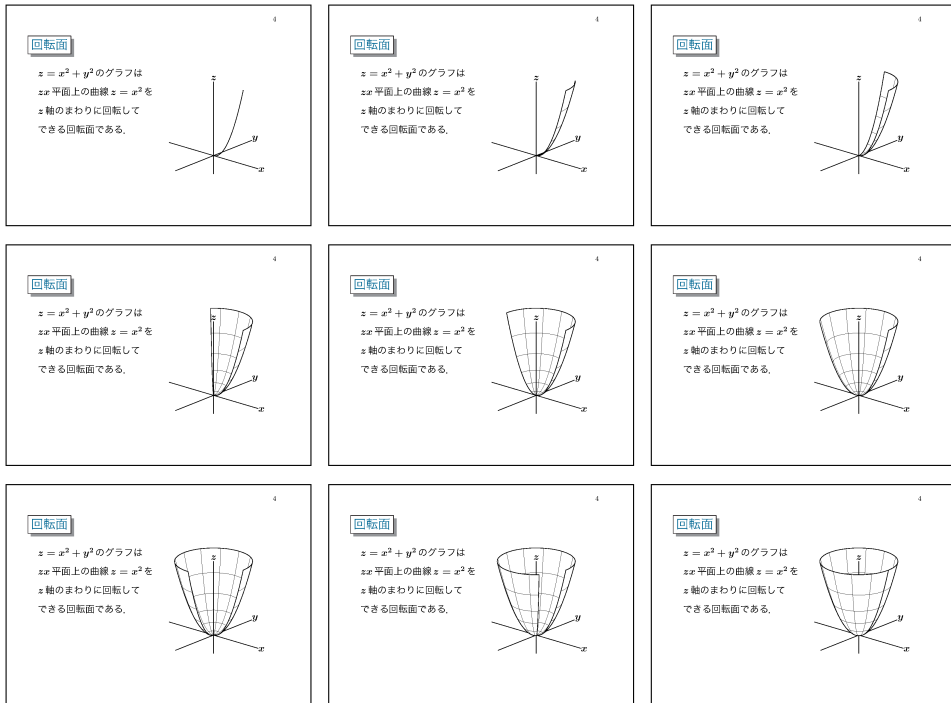


図 4. スライド教材：回転放物面

続いて、グラフが回転面となる関数の性質を図 5 のスライドによって行う。

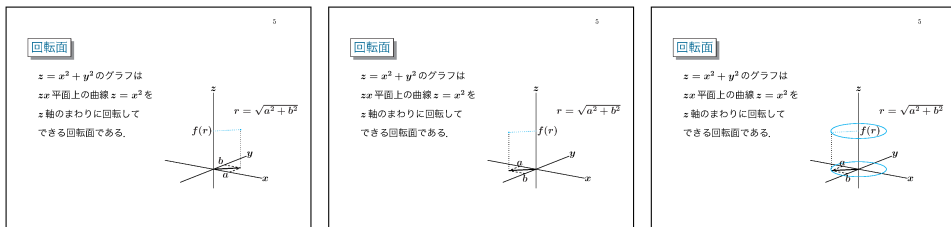


図 5. スライド教材：回転面の解説

ここで、その他の回転面の例を説明するために、タブレットを配付する。タブレットは 5 人程度のグループに 1 台の割合で貸与し、図 6 の教材を手で動かしながら、様々な角度から見せる。

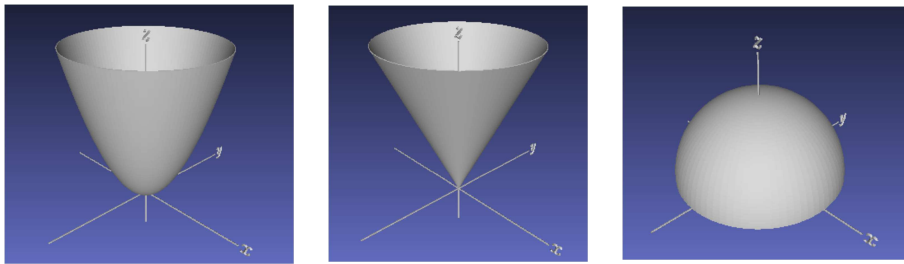


図6. タブレット教材：いろいろな回転面

あわせて、図7の立体モデルを回覧して手にとらせながら説明を行う。この立体モデルは、回転放物面 $z = x^2 + y^2$ と鞍型 $z = x^2 - y^2$ をあわせて作成したものである。一般に、立体モデルには数学的な情報を盛り込むことが困難であることが多いが、2つの曲面の交線が放物線 $z = x^2, y = 0$ であることの説明には便利な教材である。ここでは、同じ立体モデルを3個使用した。

ここで、グループ内でのディスカッションを許可しながら、プリントの問題演習を行う。タブレット教材で準備した回転面は、スライドの例で使用した回転放物面と演習問題としても準備した曲面である。学生はタブレット教材を演習問題のヒントとして利用できる。



図7. 立体モデル教材

7

関数の極限

点 (x, y) が点 (a, b) と異なる点をとりながら点 (a, b) に近づくとき、その近づき方によらず関数 $f(x, y)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば、 α を (x, y) が (a, b) に近づくときの $f(x, y)$ の極限值という。

8

関数の極限

極限值 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ について考える。

x 軸に沿って近づくとき、 $y = 0$ より

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

y 軸に沿って近づくとき、 $x = 0$ より

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

したがって、極限値は存在しない。

図8. スライド教材：関数の極限

回転面に関する演習問題の終了後に、図8左のスライドにより、関数の極限について説明を行う。さらにここでは、原点において極限値を持たない関数の例として、関数

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

を取り上げ、図8右のスライドにより解説する。スライドの中の曲面の図は、式の説明が終わってから提示する。ここで、最初に配付されたプリント教材の最後の曲面がこの関数のグラフであることを説明し、その式を記入させる。ただし、この曲面はこの時点、

すなわち，プリントやスライドに載せるだけでは，その形状を理解するのは困難である．ここでも，図9左のタブレット教材，同右の立体モデル教材を用いて，実際の形状を確認させながら，原点において極限値を持たない関数のグラフの例として理解させる．

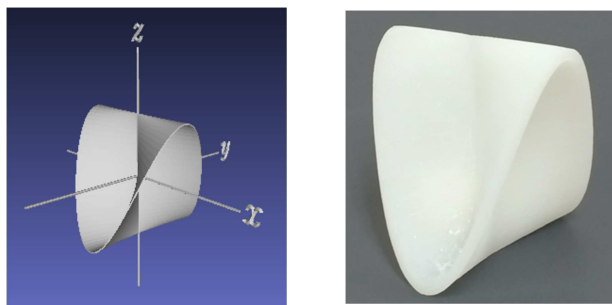


図9. タブレット教材（左）と立体モデル教材（右）

3 アンケート結果

前節の設計に従って授業を行った後，アンケート調査を実施した．本節では，その結果について述べる．

(設問1) 2変数関数に関する次の(1)～(3)の授業内容について，用いた教材のわかりやすさを次の4段階で回答

◎：とてもわかりやすい ○：わかりやすい △：ふつう ×：わかりにくい

なお，表中の数値は回答した学生数である．

(1) 2変数関数のグラフが空間内の曲面になること

	◎	○	△	×
プリント	3	14	14	2
スライド	8	16	7	2
タブレット	21	11	1	0
立体モデル	16	13	4	0

(2) $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ で表される関数のグラフが z 軸のまわりの回転面になること

	◎	○	△	×
プリント	3	14	14	2
スライド	11	13	7	2
タブレット	22	10	1	0
立体モデル	17	12	4	0

(3) 原点における極限值が存在しない関数のグラフの例

	◎	○	△	×
プリント	2	6	9	16
スライド	6	13	5	9
タブレット	19	13	1	0
立体モデル	21	7	5	0

(設問 2) わかりやすいと思う教材の組み合わせを回答

- 4つ全てを使用 (6名)
- スライド・タブレット・立体モデル (6名)
- スライド・タブレット (5名)
- プリント・スライド・タブレット (4名)
- プリント・スライド・立体モデル (3名)
- プリント・タブレット・立体モデル (3名)
- タブレット・立体モデル (2名)
- スライド・立体モデル (1名)
- スライドだけでよい (1名)
- タブレットがある方がよい (1名)
- 立体モデルがある方がよい (1名)

(設問 3) 授業に対する学生のコメント

- タブレットがわかりやすい (5名)
- タブレットや立体モデルで理解できた (5名)
- グラフを実際に回転させて面白かった (2名)
- スライドでグラフを動かす解説が良かった (2名)
- 黒板よりスライドが良い (2名)
- とても先進的な授業
- 新しい概念を学ぶときは感覚が大切なので、グラフを体感できた今日の授業はよかった
- いろいろな教材があって、自分から理解しようという姿勢になれた
- 直観的な理解に適していて、理論的な証明等はやりにくいと思う
- タブレットと立体モデルはどちらかがあれば理解できると思う
- 復習するために、スライドやタブレットのデータが欲しい
- ノートをとるのが大変で話が聞けなかった
- 黒板での授業より図形が頭に描きやすく、問題もそれを発展させて解けた

4 まとめと今後の課題

高専3年生を対象として、プリント、スライド、タブレット、立体モデルの各教材を併用して設計した授業を実施した。2変数関数の導入の段階において、グラフを空間図形として捉えることは容易ではないが、基本的な曲面をこの段階でしっかりイメージできるようにすることは、その後の偏微分、重積分を学ぶ上でも効果的であると考えられる。

今回のテーマについては、立体モデル教材やタブレット教材のわかりやすさに関する学生の評価は高いものであったが、学生のコメントを見ても、空間図形についての理解力は多様であることがうかがえる。とくに図形が複雑になる場合には、様々なスタイルの教材を併用することが学生の理解の助けとなるであろう。

今回の授業では、タブレット教材における3Dビューワーとして、フリーソフトであるMeshlab [4] を使用した。自分で操作しながら、様々な角度から見ることの教育効果は大きい。授業でのスマートフォン使用の検討や、復習用教材のデータ配付などは今後整備すべき課題である。

5 謝辞

本研究は、京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である。本研究はJSPS 科研費 15K00944 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Hamaguchi, N., Takato, S., Producing Teaching Materials for Spatial Figures with KeTCindy and the Educational Benefits of Combining Materials, ICCSA 2017, Part IV, LNCS 10407, pp. 262–272 (2017)
- [2] Kaneko M., Yamashita S., Kitahara K., Maeda Y., Nakamura Y., Kortenkamp U, Takato S.: KETCindy— Collaboration of Cinderella and KETpic. Reports on CADGME 2014 Conference Working Group, The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22(4), 179–185 (2015)
- [3] <http://www.ketpic.com>
- [4] <http://meshlab.sourceforge.net>