

## 超伝導 II

東北大・理 真木 和美

(4月21日受理)

## § 4 Time Dependent Ginzburg Landau 方程式

BOS理論ではオーダー・パラメタは次のように定義された。

$$\Delta^+(\mathbf{r}, t) = |g| \langle \psi_{\uparrow}^+(\mathbf{r}, t) \psi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (4.1)$$

一般にこのパラメタは空間座標と時間に依存しているが、最初に述べたBCS理論は $\Delta = \text{const}$ ととった場合と考えることができる。これは実際空間的・時間的に一様で均質な超伝導体に対応している。次に当然これをもう少し一般化して、パラメタが空間に依存する場合を考えることができる。こうした問題を取り扱う一番簡単なものが前節のGinzburg-Landauの理論である。勿論空間依存性に関する問題は一般にはもっと複雑になるのであるが、 $T_c - T \ll T_c$ という領域に話を限れば、G-L方程式で十分であることは既に述べたようにGorkovによって示された。空間依存性を惹き起す外因としては、近接効果や磁場がある。特に磁場のもとでの振舞いは $\kappa$ の値によって第一種と第二種に分類することができ、 $\kappa > 1/\sqrt{2}$ の時には高磁場のもとではAbrikosovの構造ができる。

更に第三の段階としてオーダーパラメタが時間および空間に依存する場合を考えることができる。これを総称してdynamicalな(動的)問題という。実際これらについてはまだ理論的な問題もあり、又、活発な実験的研究も行われている。この節および次節ではこれらに関連したことをお話しする。オーダーパラメタ $\Delta(\mathbf{r}, t)$ が時間依存性を含んだ場合を記述する方程式をTDGL(時間に依るG-L)方程式と呼ぶことにする。

a) 実験的事実<sup>31)</sup>

主に動的性質が直接に関与した実験は大きく二つに分けることができて

## 1) 熱力学的ゆらぎ効果

## 2) 渦糸運動 (vortex motion)

のいずれかになる。前者は第二種相転移点近傍, つまり  $T \rightarrow T_c$  あるいは  $H \rightarrow H_{c2}$  の時に, オーダーパラメタが virtual に励起されて生じる色々な効果の話であるが, これについては次節で述べる。ここでは渦糸運動に関連する現象のことを詳しくお話しする。まず前節の復習になるけれども渦糸状態というものは,  $\kappa > 1/\sqrt{2}$  のとき常伝導部分と超伝導部分の境界エネルギー  $\sigma_{ns}$  が負になり, 超伝導体の中に磁場が部分的に侵入することによってできる。この場合常伝導部分と超伝導部分との分割が細かい程 Gibbs の自由エネルギーでは得をする。分割された常伝導部分の最小の大きさは磁束量子化の条件により制限される。すなわち常伝導部分の島 (island) にとらえられる磁束の最小限は  $\phi_0 = hc/2e$  で, これ以上常伝導部分を小さな部分に分割できない。実現する状態がこういう条件の下でできるだけ常伝導部分と超伝導部分との境界領域を広くするような配置をとるとすると, 磁場を量子渦糸の形で超伝導部分の中にもち込むことになる。(このとき境界領域の巾は  $\xi(T)$  よりも一般には大きいとする。) このようにしてできた配置が Abrikosov 構造である。この状態で円筒状の超伝導体に磁場を軸に平行にかけて磁化を測ると第6図のような結果が得られる。即ちオーダーパラメタ  $\Delta$  は  $H = \sqrt{2}\kappa H_c \equiv H_{c2}$  において零になり, 磁場の減少とともに連続的に増大する。  $H \lesssim H_{c2}$  では  $|\Delta|^2 \propto (H_{c2} - H)$  となり, 磁化は次式で与えられる。

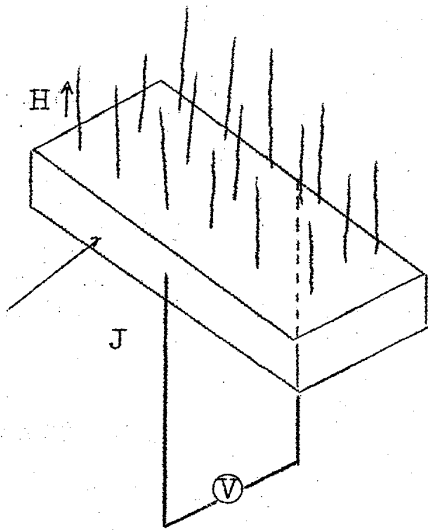
$$-4\pi M = \frac{H_{c2} - H}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A} = \frac{H_{c2} - B}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1}, \quad \beta_A = 1.16 \quad (4.2)$$

自由エネルギーの正常状態のものからの差は

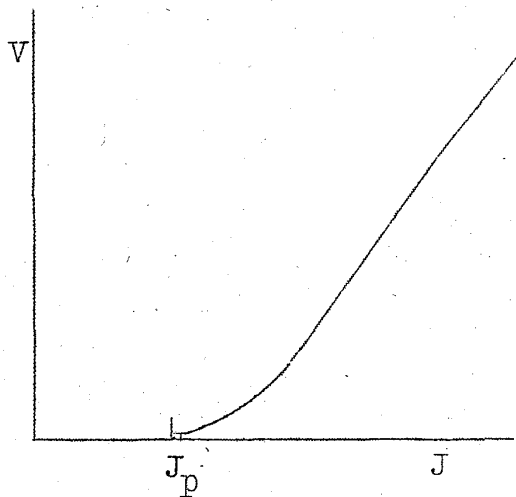
$$\Delta G = -\frac{1}{8\pi} \frac{(H_{c2} - B)^2}{\{(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1\}^2} \quad (4.3)$$

となる。Bは磁束密度である。

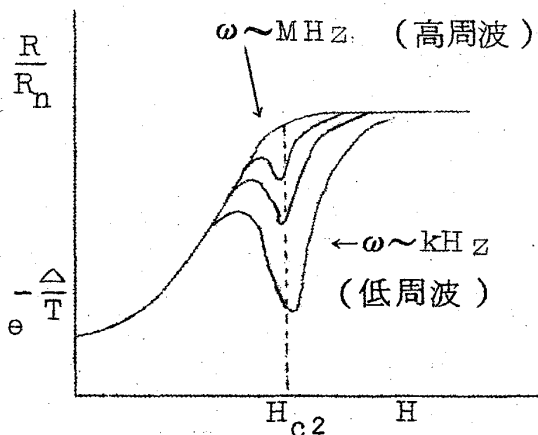
渦糸運動の関与した最初の重要な実験は, 渦流 (flux flow) 抵抗の実験である。<sup>32)</sup> 14図のような配置でVを測ると  $V \neq 0$  がでてくる。普通の超伝導



第 1 4 図



第 1 5 図



第 1 6 図

体では  $V = 0$  である。  $V$  の振舞いは 15 図のようである。最初に  $V \neq 0$  となる電流, depinning current (ピンはづれ電流)  $J_p$  は試料によって異なるが,  $J \gg J_p$  での  $\Delta V$  と  $\Delta J$  の線型性はよく再現され, 金属自身の特性を反映していると考えられ, その勾配が渦流抵抗と呼ばれている。この現象の定性的な説明は次のようである。各渦糸は

$$\vec{F} = \hat{\phi}_0 \times \vec{J}$$

という Lorentz 力を受けるが, 電流が弱い間は渦糸はディスロケーションや不純物にとらえていて動かず, 電流は渦糸を避けて流れる結果  $V = 0$  である。電流が大きくなると Lorentz 力が強くなり, 渦糸は動きだして電気抵抗が生ずる。

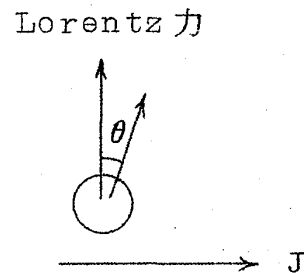
上記は直流の場合であったが, マイクロ波の表面での吸収でも同じようなことを見ることができる。表面抵抗の振舞いは 16 図のようである。  $\omega \sim \text{MHz}$  の高周波数の場合には吸収ははっきりした振舞いを示す。<sup>34)</sup>

熱流  $j^h$  によって渦糸運動を見ることができる。これは熱電効果とよばれている。普通の超伝導体では電流を流しても電場は表われない。したがって熱電効果も表われない。しかし渦糸状態では渦糸の運動によって電場が超伝導体内に発生するために種々の熱電効果が表われる。特に渦糸状態で

真木和美

は Ettingshausen 効果の係数  $\alpha$  は正常状態のそれの  $10^4$  倍も大きくなる。<sup>35)~39)</sup>  
この効果は今磁場の方向を  $z$  軸方向にとると、例えば  $x$  軸方向に電流を流した時に  $y$  方向の温度差を測定することによって観察できる。これの逆効果として Nernst 効果がある。これは熱流を流すとその直角方向に電圧が誘起される現象である。

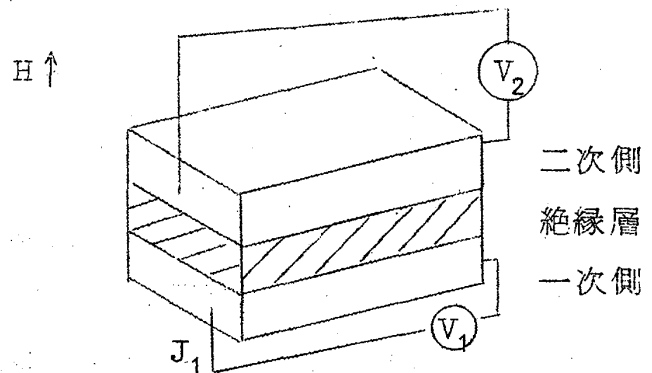
上の現象は渦糸状態では次のように説明される。Lorentz 力を受けた渦糸がどの方向に動くかがまず問題である。液体 He においてと同様にマグナス力を受けて電流の方向に散逸を受けず流れていくか、あるいは Lorentz 力の方向に流れるか。実際には Lorentz 力の方向と少し角度  $\theta$  だけ傾いた方向に流れることが知られている (第17図)。この角度  $\theta$  は後述の Hall 効果を与える。渦糸が幾分かのエントロピーをもっているとする、渦糸の運動によって電流と垂直な方向に温度差が生じることから Ettingshausen 効果は理解できる。



第 17 図

渦糸運動をより明確に示したのは Giaever<sup>40)</sup> の直流変圧器作用の実験である。

第 18 図のような配置で二つの超伝導体に渦糸を通し、一次側に電流  $J_1$  を流すと二次側に電圧  $V_2$  が誘導される。実験結果は第 19 図のようである。

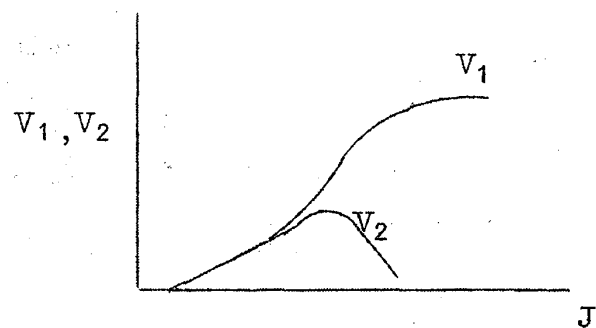


第 18 図

更に現在では渦糸運動の映画もできており、渦糸運動は確立されている。<sup>41,~43)</sup>これを TDGL 方程式でどのように扱えるかを次に話す。

#### b) TDGL 方程式

これを導く用意は今までの話でできている。まず BCS ハミルトニアンをもっと一般的に考える。ハミルトニアンの一部を平均場で



第 19 図

置きかえて次のように変形する。

$$H = \sum_{p\sigma} \epsilon_p a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma} - \underbrace{\sum_{qp} (\Delta_q^+(t) a_{p\downarrow} a_{p+q\uparrow} + \Delta_q(t) a_{p\uparrow}^+ a_{-p+q\downarrow}^+)}_{H'} + \dots \quad (4.4)$$

$$\Delta_q^+ = |g| \langle \Psi_q^+ \rangle, \quad \Psi_q^+ = \sum_p a_{p\uparrow}^+ a_{-p+q\downarrow}$$

上の式で $\Delta$ の運動量依存性と時間依存性を残してある。 $G-L$ 方程式を導く時と同じように $H$ の第二項が小さい時、これを摂動として取扱うと $\Delta_q^+(t)$ の運動を追っかけることができる。よく知られた式を用いて計算していくと

$$\begin{aligned} \Delta_q^+(t) &= |g| \langle \Psi_q(t) \rangle \\ &= |g| \langle e^{-i \int_{-\infty}^t H' dt} \Psi_q^+(t) e^{i \int_{-\infty}^t H' dt} \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

となり、最後の平均は正常状態での平均である。

$$\begin{aligned} \Delta_q^+(t) &= |g| \langle \Psi_q^+(t) - i \int_{-\infty}^t [H'(t'), \Psi_q^+(t)] dt' \\ &\quad + \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t [H', [H', \Psi_q^+]] dt_1 dt_2 + \dots \rangle_0 \end{aligned}$$

正常状態では $\langle \Psi_q^+ \rangle_0 = 0$ ,  $\langle \Psi_q^{+2} \rangle_0 = 0$ なので

$$\Delta_q^+(t) = -i|g| \int_{-\infty}^t \langle [\Psi_q(t'), \Psi_q^+(t)] \rangle_0 \Delta_q^+(t') dt' + O(\Delta^3) \quad (4.6)$$

従ってオーダーパラメタの時間依存性を求めるには遅延積 (retarded product)  $\langle [\Psi_q(t'), \Psi_q^+(t)] \rangle_0 \times \theta(t-t')$  を計算すればよい。ところがこの式は前々節の  $T$ -matrix の計算とほとんど同じようにできる。実際この式は前々節の  $\Pi$  の表式を使うと次式のように書ける。

$$[1 - |g| \pi(q, \omega)] \Delta_q^+ = 0 \quad (4.7)$$

$$\pi(q, \omega) = N(0) \left\{ \ell n \frac{2r\theta}{\pi T} - \frac{\pi}{8T} [-i\omega + Dq^2] \right\} \quad (4.8)$$

真木和美

D は新しく導入した定数で,  $q$  は空間微分で書き直せるし,  $\omega$  は時間微分で書き直せる。これを入れて上式を書き直すと

$$\frac{2}{\partial t} \Delta(t) = D (\nabla - ie\mathbf{A})^2 \Delta(t) - \epsilon_0 \Delta(t) + R |\Delta(t)|^2 \Delta(t) \quad (4, 9)$$

非線型の項も入れると最後の項がつく。この式は

$$\omega / T_c \ll 1, \quad D q^2 / T_c \ll 1$$

の条件のもとで成立する。また  $\Delta$  の小さい領域でなければならない。定数は

$$\epsilon_0 = (8 / \pi) (T_c - T)$$

$$D = \begin{cases} \frac{7 \zeta(3) v^2}{6 \pi^3 T_c} \sim v \xi_0 & \text{pure limit} \\ \frac{v \ell}{3} & \text{dirty limit} \end{cases} \quad (4, 10)$$

D は dirty limit では金属中の電子の拡散定数である。一方電流の式は, 正常部分からの寄与と G-L 理論の電流の和

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + C \frac{1}{i} (\nabla_1 - \nabla_2 - 4ie\mathbf{A}) \Delta(1) \Delta^+(2) \Big|_{1=2=(\mathbf{r}, t)} \quad (4, 11)$$

$$C = N(0) \frac{\pi e}{4T} D \left( = \frac{\pi i N}{8mT} \text{ dirty limit} \right)$$

となるはずであるが, これも今の一般論からも導ける。それは

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left\langle e^{-i \int^t H' dt'} \mathbf{j} e^{i \int^t H' dt'} \right\rangle_0 \quad (4, 12)$$

から出発する。また熱流は次式のようなのである。

$$\mathbf{j}^h = \frac{\pi \tau N}{16mT} (q_1 - q_2) (\omega_2 - \omega_1) \Delta(1) \Delta^+(2) \Big|_{1=2=(\mathbf{r}, t)} \quad (4, 13)$$

C) Schmid の解<sup>41)</sup>

電場と磁場の両方がある時の TDGL 方程式の解をみる。今話を  $H = H_{c2}$  の近くに限るので, 非線型の項は無視する。又  $\hat{H} // 0x$ ,  $\mathbf{E} // 0x$  とし,  $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$ ,  $\phi = -Ex$  なるゲージを使う。  $\phi$  が入るので

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\phi = \frac{\partial}{\partial t} - 2ieE$$

としなければならない。z 方向は無視すると方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2ieEx\right) \Delta = D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial}{\partial y} - 2ieHx\right]^2 \right\} \Delta - \epsilon_0 \Delta \quad (4.14)$$

となる。Schmid が指摘したのであるが、これは

$$\phi = e^{ik(y+ut)} f(x), \quad u = \frac{E}{H} \quad (4.15)$$

という形の解をもつ。これを上式に代入すると次式を得る。

$$D \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left[ k - 2eHx + \frac{iu}{2D} \right]^2 \right\} f - \epsilon_0 f + 0 u^2 f = 0 \quad (4.16)$$

$u^2$  の項は今電圧は小さいとして電場について一次の効果だけを考えるので無視する。この解は

$$f = e^{-eH \left( x - \frac{k}{2eH} - \frac{iu}{4eDH} \right)^2} \quad (4.17)$$

である。Abrikosov 構造の話の時と同様にこの解の一次結合をつくると

$$\Delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ink(y+ut)} e^{-eH \left( x - \frac{nk}{2eH} - \frac{iu}{4eDH} \right)^2} \equiv \sum c_n f_n \quad (4.18)$$

Abrikosov の解と比べて違うのは  $u$  のついた因子だけである。初めの因子のため  $\Delta$  は

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta = u \frac{\partial}{\partial y} \Delta$$

を満たしている。これは  $\Delta$  が  $y$  方向に  $u$  の速さで動くことを表わしている。一般のゲージではこのままの式は満たされないが、

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Delta|^2 = u \frac{\partial}{\partial y} |\Delta|^2 \quad (4.19)$$

がいつも成立することは証明できる。従って  $|\Delta|^2$  が電圧と直角方向に動くということがいえる。次に電流を見ると

$$\begin{aligned}
j_x &= \sigma E + c \sum_{n,m} c_n c_m^* \left\{ \frac{-1}{i} (2eH) \left[ \left( x - \frac{nk}{2eH} - \frac{iu}{4eDH} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( x - \frac{mk}{2eH} + \frac{iu}{4eDH} \right) \right] \right\} f_n f_m^* \\
&= \sigma E + c \sum_{n,m} c_n c_m^* \left\{ ik(n-m) + \frac{u}{D} \right\} f_n f_m^* \\
&= \sigma E + c \left\{ \frac{\partial}{\partial y} |\Delta|^2 + \frac{u}{D} |\Delta|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$j_y = -c \frac{\partial}{\partial x} |\Delta|^2$$

$j_x$  の第二項と  $j_y$  は  $\text{rot}(0, 0, |\Delta|^2)$  からきていて空間平均すると零になる。これらの項による磁化は

$$M(\mathbf{r}, t) = -c |\Delta(\mathbf{r}, t)|^2 \tag{4.21}$$

と書け、これは磁化の電流である。また先程の式は

$$\frac{\partial}{\partial t} M(\mathbf{r}, t) = u \frac{\partial}{\partial y} M(\mathbf{r}, t)$$

とかけて磁化が動いていることを表わし、すなわち渦糸が動いているということがわかる。またこれはもっと一般には

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$

と書き表わせ、 $\mathbf{u}$  を渦糸の速度とした時の電磁誘導の関係が満たされていることがわかる。 $j_x$  の残りの項から平均の後に

$$j = \sigma E + \frac{|M|}{DH} E \tag{4.22}$$

が得られる。<sup>41, 43)</sup> 従って

$$\rho_\mu = \frac{1}{\sigma + \frac{|M|}{DH}}, \quad \text{あるいは} \quad \frac{\rho_{f1}}{\rho_n} = \frac{\sigma_n}{\sigma + \frac{|M|}{DH}} \tag{4.23}$$

ただしここでは  $\sigma$  と  $\sigma_n$  とが同じものかどうかという問題がある。<sup>44~47)</sup> まず渦糸運動の与える補正をあたってみる。 $M$  の表式を使うと

$$\frac{|M|}{\sigma_D H} = \frac{1}{4\pi\sigma_D} \frac{1 - \frac{H}{H_{c2}}}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1} \quad (4.24)$$

dirty limit では  $1/\sigma_D \propto \kappa^2$  になり,  $\rho_{f1}/\rho_n$  対  $H/H_{c2}$  のグラフは  $O(1)$  の勾配の曲線を与える。しかし pure limit では

$$1/\sigma_D \propto \xi_0 / L \sim 10^{-1} \sim 10^{-2}$$

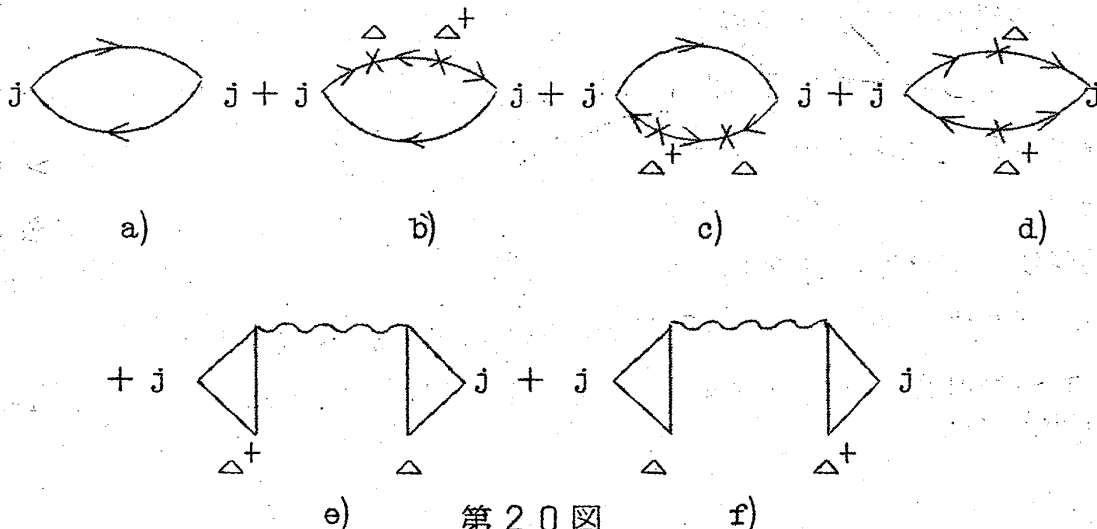
になる。一方実験は pure, dirty にかかわらず

$$\rho_{f1}/\rho_n \propto H/H_{c2}$$

となり, pure の場合の計算値より  $H$  依存性は  $10 \sim 100$  倍程大きい。従って少なくとも pure limit では上で考えた機構以外のものからの寄与があるはずである。また dirty limit でも上記と同程度の寄与があるかもしれない。

#### d) 渦糸状態での輸送係数

実はこの問題はかなり複雑である。線型応答理論を用いてのダイアグラムでもって計算することができる。<sup>44~47)</sup> ここではあまりくわしく述べないで大雑把に話して, どのような所から違いがでてきているかを見よう。抵抗は電流・電流の相関  $\langle [j, j] \rangle$  から得られる。これが久保公式である。電流・電流の相関は第20図のダイアグラムからの寄与の和で表わすことができる。



第20図

初めのダイアグラム a) から  $\sigma_n$  がでて最後の二項 e), f) から渦糸運動に伴う電流が得られる。従って上の計算では残りの項 (すなわち b) c) d) ) を考えていない。恐らく pure limit では、これら (i.e. b) c) d) ) が重要になるのであろう。また dirty limit でもきいていないという保証はない。実際 b), c), d) からの寄与は計算できて dirty limit <sup>45, 46)</sup> では  $\sigma$  は

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_n \left\{ 1 + \frac{|\Delta|^2}{2(2\pi T)^2} \left[ \frac{1}{\rho} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right) + \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right) \right] \right\} \\ &\equiv \sigma_n \left\{ 1 + \frac{|\Delta|^2}{2(2\pi T)^2} \left[ \frac{\pi^2}{2\rho} \right] \right\} \\ &= \sigma_n + \frac{|M|}{DH} \quad (4.25)\end{aligned}$$

$\rho = D e H_{c2} / 2\pi T$ ;  $\psi^{(1)}$ ,  $\psi^{(2)}$  はダイガンマ, トリガンマ関数である。これは先程の flux flow の項と同じ位の寄与を与える。pure limit には発散の問題があり,  $\sigma$  は  $\Delta$  について特異な関数になっていて展開できないという可能性がある。

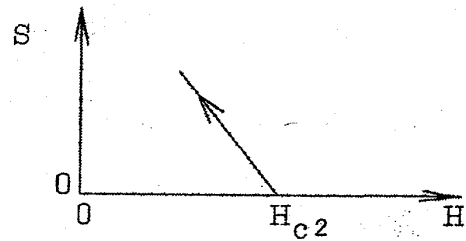
ここで b), c), d) からの寄与および e), f) からの寄与の振舞いが時間反転を破る相互作用に関して非常に異っていることに注意しよう。超伝導状態では互に時間反転により結ばれる二つの状態の電子が対をつくっている。<sup>48)</sup> 超伝導体はこの二つの状態のエネルギーに正負の逆符号の変化をもたらす相互作用, つまり時間反転を破る相互作用, の摂動に敏感である。このような相互作用の起因として磁性不純物と磁場がある。非磁性不純物は  $T_c$  を変えないが, 磁性不純物は  $T_c$  を急速に小さくし, 2, 3% で  $T_c$  を零にする。これに関与する超伝導をこわすパラメタを  $\delta$  とかく。 $\sigma$  は  $\delta$  に敏感であるが, もし  $\delta > \epsilon_0 = 8(T_c - T)/\pi$  であれば,  $\sigma = \sigma_n$  となる。即ちこの場合には渦糸状態での電気伝導度の増分は渦糸運動による項のみでかける。最後に今述べた寄与と渦糸運動に関与する項とは物理的起源が全く異なることを注意しておく。

同じような計算テクニックを使って熱流が計算でき, (4.13) 式が導かれる。<sup>43), 46)</sup>

これに Schmid の解を入れると

$$\begin{aligned} j_y^h &= -2ME \\ &= 2|M|2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

と予想通り渦糸運動の方向に磁化に比例した熱流が流れる。実験を解析する時には普通これを渦糸あたりのエントロピー  $S$  で表わして次のように書く。



第21図

$$j_y^h = TS \frac{H_{c2}}{\phi_0} \frac{E}{H_{c2}} \quad (4.27)$$

$H_{c2}/\phi_0$  は渦糸の数,  $E/H_{c2}$  は移動速度である。  $S$  は (4.26) 及び (4.27) より

$$S = \frac{\pi}{eT} |M| = \frac{H_{c2} - H_0}{4eT[(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1]} \quad (4.28)$$

となる (第21図)。熱流の場合にも他のダイアグラムの寄与が問題になるがそれらは寄与しないことが証明できて、この場合は渦糸運動の寄与を考えただけで十分である。

上の  $S$  の計算は  $T_c$  近傍で行なったものであるが、一般の温度での計算をやってみると少し問題があることがわかる。一般の温度について dirty limit では  $S$  は同様に計算できて<sup>43, 46)</sup>

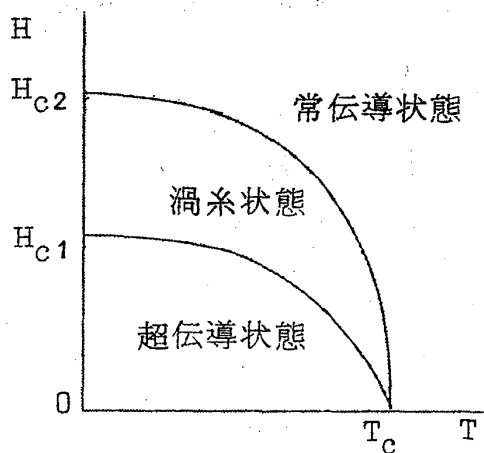
$$S = \frac{(H_{c2} - H_0) L(T)}{4eT[(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1]} \quad (4.29)$$

$$L(T) = 2 + \rho \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right)} \quad (4.30)$$

で与えられ,  $\rho = De H_{c2}(T)/2\pi T$  は

$$-\ln \frac{T}{T_{c2}} = \psi\left(\frac{1}{2} + \rho\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4.31)$$

からきめられる。今磁場  $H$  と温度  $T$  で相図をかくと第22図のようになる。



第 2 2 図

温度を固定して磁場を変え，相転移点近傍 ( $H \leq H_{C2}$ ) での抵抗や Ettingshausen 効果等の磁場に対する変化率をしらべ，更にこの変化率の温度依存性を見ることが出来る。上の計算ではこの温度依存性は  $\rho$  を通して現われる。今， $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$  のときには  $\rho \rightarrow \infty$  となり， $L(T) \rightarrow 1$ ， $S \rightarrow \infty$  の結果が得られる。これは絶対零度ではエントロピーは零になるという熱力学則と矛盾する。

この困難は次のような考えで除き得る。<sup>49)</sup> 熱量の変化は

$$\delta Q = \mu \delta N + \delta \epsilon + H \delta M$$

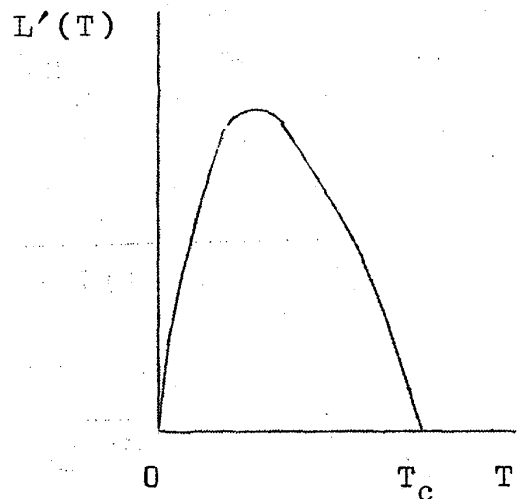
である。 $\mu \delta N$  は電子数の変化に伴うもの  $\delta \epsilon$  はエネルギーの変化， $H \delta M$  は磁場の中で磁化が変化したための効果であるが，一つの解釈としては今の計算では前二項だけが取り入れられ，第三項が無視されていると考えられる。これも取り入れると

$$L'(T) = 1 + \rho \frac{\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right)}{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \rho\right)} \quad (4.32)$$

となり，第 2 3 図のように  $T \rightarrow 0^\circ\text{K}$  のとき  $L'(T) \rightarrow 0$  となり，上の困難は除かれる。

Ettingshausen 効果に話を限ればこれでよいのであるが，しかしこの逆過程

である Nernst 効果を考えると，未だ問題が残っているようである。<sup>45)</sup> 同様にこの過程について計算を行うと，Onsager の相反定理から期待できるように，厳密に同じ  $L'(T)$  を導くことができる。しかし上記の差し引く過程に物理的な意味がつけにくい。



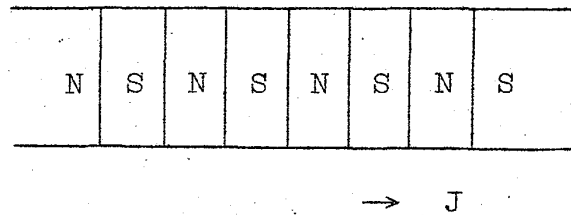
第 2 3 図

ただ実験は上の  $L'(T)$  でよく記述することができる。

渦糸運動の問題として更に Hall 効果と Peltier 効果の問題がある。前者は最近までよくわからなかったが、海老沢君達が<sup>50,51)</sup> 定式化して上と同様な物理像で計算すれば説明できることがわかった。

これまで第二種超伝導体の渦糸状態を中心にお話ししたが、渦糸の侵入した状態としては他に中間状態というものがある。これは電流のある状態では、第 24 図のように層状にそろっているが、

電流のない時には正常な (N) 部分と超伝導性の (S) 部分は複雑に入りまじっている。電流を流すと渦糸が力を受け、その通り道が開かれるように層が並ぶと考えられる。この時の抵抗などは、以前は正常部分にだけよると考えられたが、



第 24 図

現在の実験では渦糸運動が本質的のようである。抵抗からだけでは明確ではないが、このときも Ettingshausen 効果が大きく、また直流変圧器作用があるからである。後者の実験では一次側としては第二種超伝導体を使い、二次側に第一種超伝導体を用いる。

渦糸運動を扱うのに第二種超伝導体では  $\Delta \ll T_{c0}$  なる領域があっという量を  $\Delta$  で展開して記述できた。しかし中間状態では正常部分は完全に正常で超伝導部分の  $\Delta$  は大きい。このような中間状態を扱う適当な定形化はまだできていない。ただ一般的に次のようなことはいえる。渦糸が超伝導体の中に侵入している場合、渦糸が色々な摂動に対して応答し、これが色々な性質に反映する。これらの問題は TDGL 方程式のような見方で記述できるであろう。

TDGL 方程式で話の完成していない所がある。pure limit では物理量を  $\Delta$  で展開することができないらしく、有効な TDGL 方程式は未だ得られていない。

#### § 4 の参考文献

- 31) 1967 年以前の review としては Y.B.Kim and M.J.Stephen, Superconductivity vol.2. ed. by R.D.Parks, Marcel

真木和美

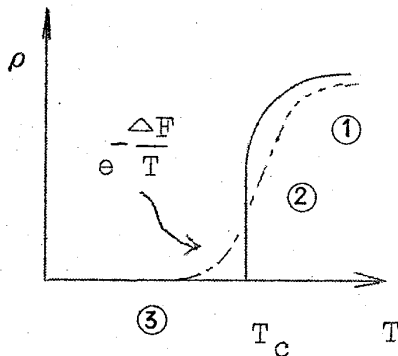
Dekker (N.Y. 1969).

- 32) Y.B.Kim, C.F.Hempstead and A.R.Strnad, Rev. Mod. Phys. 36 43 (1964).
- 33) Y.B.Kim, C.F.Hempstead and A.R.Strnad, Phys. Rev. 139 A1163 (1965).
- 34) J.le Gilchrist and P.Monceau, Phyl. Mag. 18 237(1968).
- 35) F.A.Otter, Jr. and P.R.Solomon, Phys. Rev. Letters 16 681 (1966).
- 36) P.R.Solomon and F.A.Otter, Jr., Phys. Rev. 164 608 (1967).
- 37) J.Lowell, J.S.Muyos and J.Sousa, Phys. Letters 24A 376 (1967).
- 38) R.P.Huebener, Phys. Letters 24A 651 (1967), 25A 588 (1967).
- 39) Y.Muto, K.Noto and K.Mori, the proceeding of LT12.
- 40) I.Giaever, Phys. Rev. Letters 15 825 (1966).
- 41) A.Schmid, Phys. Kondens. Materie 5 306 (1966).
- 42) E.Abrahams and T.Tsuneto, Phys. Rev. 135 416 (1966).
- 43) C.Caroli and K.Maki, Phys. Rev. 164 591 (1967).
- 44) C.Caroli and K.Maki, Phys. Rev. 159 306 (1967).
- 45) R.S.Thompson, Phys. Rev. B1 327 (1970).
- 46) H.Takayama and H.Ebisawa, Prog. Theor. Phys. 44 1450 (1970).
- 47) A.Houghton and K.Maki, phys.Rev. to be Published.
- 48) 例えば, K.Maki, Saperconductivity vol. 2. ed. by R.D.Parks, Marcel Dekker (N.Y. 1969).
- 49) K.Maki, Jour. Low Temp. Phys. 1 45 (1969).
- 50) H.Fukuyama and H.Ebisawa, to be published.
- 51) H.Ebisawa, in preparation.

## § 5 Thermodynamical Fluctuation

これは比較的新しい問題で、実験にかかるようになったのは、つい数年前のことである。二次相転移は、一般に秩序をもった状態を特徴づけるオーダーパラメタ  $\eta$  の変化で記述される。温度の関数として  $\langle \eta \rangle$  は転移点  $T_c$  以上ではゼロであるが  $T_c$  に近づくと  $\eta$  のゆらぎ  $\langle \eta^2 \rangle$  が急激に大きくなり、それに伴って臨界現象がおこる。磁性体の帯磁率  $\chi$  がキュリー点  $T_c$  近傍で異常に大きくなる現象はその代表的な例である。超伝導状態 (S 状態) にある金属は完全伝導体であると同時に完全反磁性体と見なされることを前に述べたが、そのことに対応して温度が  $T_c$  に近づくとつれ、伝導度  $\sigma$  や反磁性帯磁率  $\chi_d$  が常伝導状態 (N 状態) の値から急激に大きくなることが期待できる。

超伝導体における熱的ゆらぎの効果の理論計算は、BCS 理論の出現後間もなく<sup>52)</sup> なくなされた。Thouless<sup>52)</sup> (1959) は比熱が  $C/C_n = A/\sqrt{T-T_c}$  の形で発散することを示した。(ここで  $C_n$  は (N-状態の値) ただし係数  $A$  は  $T_c$  とフェルミエネルギー  $\epsilon_F$  の比として  $A \sim (T_c/\epsilon_F)^2 \sim 10^{-8}$  の程度で非常に小さい。このことはゆらぎの効果が顕著に見える温度域  $T-T_c$  が非常に狭いことを意味している。(第 2 図)。このようなことから超伝導体でのゆらぎ効果を測定することは悲観視されていた。この停滞を打破したのが Glover<sup>53)</sup>



第 25 図

の実験 (1967) である。彼は  $B_i$  で非常にうすい膜 ( $100 \sim 1000 \text{ \AA}$ ) を蒸着で作し、その抵抗の温度変化を測った。すると第 25 図の実線のようなふるまいが見られ、精密に ( $10^{-3} \text{ K}$  くらいのスケール) 調べると

$$\rho = \rho_n - \frac{a}{\eta}, \quad \eta = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (5.1)$$

に従うことを見出した。殆んど同じ頃、上の実験と独立に Aslamazov と Larkin<sup>3)</sup> がこのような薄膜の伝導度を計算し

$$\sigma = \sigma_n + \frac{e^2}{16d} \frac{1}{\eta} \quad (d = \text{膜厚}) \quad (5.2)$$

を導いた。これは Glover の実験と二桁の精度で一致した。

以後多くの仕事が現われた。<sup>53)</sup> 電気伝導度の実験では Pb のようにこれと殆んど一致するものもある一方, pure な Al のように必ずしも一致しないものも見出された。<sup>55~57)</sup> 更に非線型の電場依存性が議論されて,<sup>58~61)</sup> 電場が大きくなると電流が線型には増えないことがわかったが, 理論と実験とはかなりよく合っている。<sup>56), 62)</sup> 比熱は実験的にはむづかしいが, 代りに簡単に測れる  $\chi_d$  が調べられた。理論と実験の一致は H,  $T - T_c$  が小さい限りは良い。(後述)。その他に, Hall 効果,<sup>63)</sup> Ettingshausen 効果<sup>64)</sup> は理論計算だけがある。核スピン緩和時間の異常もおもしろい。

#### a) 静的な性質

自由エネルギーを微分して得られるような量, 比熱および  $\chi_d$  を考える。計算の方法は微視的な取扱い, Ginzburg-Landau 汎関数による方法などいろいろあるが, まずその二つの方法の同等性を証明しよう。

微視的に grand ポテンシャルを計算するには Feynman の関係より

$$\Omega_{fl} = - \int d|g| T \sum_{q, \omega} \langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle = - \int d|g| \frac{1}{g} \langle \mathcal{H}' \rangle \quad (5.3)$$

を求めればよい。ところが  $\langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle$  は相互作用のハミルトニアン  $\mathcal{H}'$  を使って

$$\langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle = \frac{\langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle_0}{1 - |g| \langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle_0} \quad (5.4)$$

とあらわせる。(4) は既に § 2 で計算された

$$\langle \Psi_q^+, \Psi_q \rangle_0 = \pi(q, \omega) \quad ((5.5))$$

を使えば

$$\begin{aligned} \Omega_{fl} &= T \sum_{q, \omega} \ln (1 - |g| \pi(q, \omega)) \\ &\cong T \sum_{q, \omega} \ln [C(|\omega_\nu| + Dq^2 + \epsilon_0)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

と計算できる。ただし

$$\epsilon_0 = 8(T - T_c) / \pi$$

である。定数  $\ell n C$  の  $q$ ,  $\omega$  和は発散するが物理量は  $\Omega$  を微分したもので書けるので問題はない。

一方 § 3 で出した GL 汎関数

$$F(\Psi) = \int \left[ \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2m^*} (\nabla \Psi)^2 \right] dr \quad (5.7)$$

(いま  $T > T_c$  だから非線型項はおとした) を対角化して書くと、磁場のないとき

$$F(\Psi) = \sum_q \left( \alpha + \frac{q^2}{2m^*} \right) \Psi_q^\dagger \Psi_q \quad (5.8)$$

となる。汎関数の方法では物理量  $A$  の期待値は

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \int \delta \Psi A e^{-\beta F(\Psi)} \quad (5.9)$$

$$Z = \int \delta \Psi e^{-\beta F(\Psi)} \quad (5.10)$$

である。汎関数積分は今の場合  $\Psi_q = u_q + i v_q$  とおくと簡単にできて

$$\begin{aligned} Z &= \prod_q \int du_q dv_q e^{-\beta \left( \alpha + \frac{q^2}{2m^*} \right) (u_q^2 + v_q^2)} \\ &= \prod_q \frac{\pi}{\beta \left( \alpha + \frac{q^2}{2m^*} \right)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

を与える。  $Z = e^{-\beta \Omega_{fl}}$  によって grand ポテンシャルに書きなおすと式 (6) と同じものであることがわかる。動的性質についても同じような同等性があれば便利だが、今のところそうになっていないようである。

$\Omega_{fl}$  からまず比熱がだせる。

$$S = - \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad C = T \frac{\partial S}{\partial T}$$

真木和美

を使い,  $T_0$  で異常性をもつ項 ( $\ell_n$  中の  $\epsilon_0$  を微分したもの) から

$$C_{fl} \cong \left(\frac{8T}{\pi}\right)^2 \sum_q \frac{1}{(Dq^2 + \epsilon_0)^2} \quad (5.12)$$

が導かれる。三次元の場合, 単位体積当り

$$C_{fl}^{(3)} = \frac{8T^2}{\pi^3 D \sqrt{D \epsilon_0}}$$

である。pure な物について,  $D \sim \xi_0 v$  ( $\xi_0 \sim T/v$ ) を使い,  $N$  状態の値  $\sim (T/\epsilon_F) N$  で割ると

$$C_{fl}^{(3)}/C_n \sim (T/\epsilon_F)^2 / \eta^{1/2} \quad (5.13)$$

となって Thouless<sup>52)</sup> の結果を再現する, dirty な物に対しては  $D = \ell v/3$  を用いて

$$C_{fl}^{(3)}/C_n \sim (T/\epsilon_F)^2 (\xi_0/\ell)^{3/2} / \eta^{1/2} \quad (5.14)$$

$\ell \ll \xi_0$  ではこれは大きくなるが  $T/\epsilon_F$  が小さいため, この効果もそれほど重要ではない。二次元ではもっと有利で pure, dirty 各々の場合に

$$C_{fl}^{(2)}/C_n \sim (T/\epsilon_F) (p_0 d)^{-1} / \eta \quad (p) \quad (5.15)$$

$$C_{fl}^{(2)}/C_n \sim (T/\epsilon_F) (\xi_0/\ell) (p_0 d)^{-1} / \eta \quad (d) \quad (5.16)$$

がえられる。

ここで注目するのは発散の次数が  $\eta^{-1}$  で大きいことである。更に数係数も三次元の場合のひとつの  $\xi_0$  を  $d$  で置きかえた形であって薄膜が小さくなるとともに大きくなり,  $d \sim 10^2 \text{ \AA}$  くらいで  $10^{-6}$  (pure) から  $10^{-4}$  (dirty) 程になる。しかし比熱は, 体積の小さい薄膜では測れないことはないが, まずむつかしい。重要なことは次元を低くすることにより, ゆらぎの効果を大きくできることである。そもそもゆらぎの効果が三次元の場合小さいことは, 直観的に次のように理解される。小さい因子は  $(T/\epsilon_F)^3 \sim 1/(p_0 \xi_0)^3$  であるが, これはフェルミ球全体の電子に対する, ゆらぎに關与している僅かの電子

$(1/\epsilon_0)^3$  の比である。(Heの超流動性, 磁性の場合  $\xi_0 \sim p_0^{-1}$  であって, ゆらぎの効果が大きいことと非常に対照的である。) 低次元では  $1/\epsilon_0$  の代りにもっと大きい  $1/d$  が置き代る。

次に超伝導の磁氣的性質のまえぶれとして N 状態でも大きくなると期待される  $\chi_d$  を考える。計算は, はじめ H. Schmidt,<sup>65)</sup> A. Schmid,<sup>59)</sup> K. Yamaji<sup>66)</sup> によって独立におこなわれた。Kubo 公式から求めるやり方もあるが, ここでは簡単に  $\Omega_{f1}$  から出発する方法をとる。磁場をかけたときは  $\Omega_{f1}$  の中で  $q^2$  は磁場中の電子の時のように量子化されて

$$Dq^2 = 2eHD(2n+1) + Dq_z^2 \quad (H \parallel z) \quad (5.17)$$

となる。更に x, y 方向の縮退のため, それに対する phase volume が要る。状態数の計算からそれは  $eH/\pi$  と求まり

$$\Omega_{f1} = VT \frac{eH}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q_z} \ln \left[ 4eHD(n + \frac{1}{2}) + Dq_z^2 + \epsilon_0 \right], \quad (5.18)$$

となる。(ただし, 温度依存性の最も大きい  $\omega_\nu = 0$  の項のみに限った。) ここで  $q_z$  和を先におこなう。 $\xi^{-2} = \epsilon_0/D$  を導入して,  $q_z$  積分を部分積分で行ない, 発散を cut off  $[-L, L]$  の導入により止めると

$$\sum_{q_z} \cong \frac{1}{\pi} \left[ L \ln(L^2 + c) \right] - (2L - T_c \sqrt{4eH(n + \frac{1}{2}) + \xi^{-2}})$$

を得る。H によらない部分を省いて

$$\Omega_{f1}(H) = \frac{VT eH}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{4eH(n + \frac{1}{2}) + \xi^{-2}} \quad (5.19)$$

となるから

$$M = -\frac{\partial \Omega}{\partial H} = -\frac{VT e}{\pi} \sum_n \left[ \sqrt{4eH(n + \frac{1}{2}) + \xi^{-2}} + \frac{1}{2} \frac{4eH(n + \frac{1}{2})}{\sqrt{4eH(n + \frac{1}{2}) + \xi^{-2}}} \right] \quad (5.20)$$

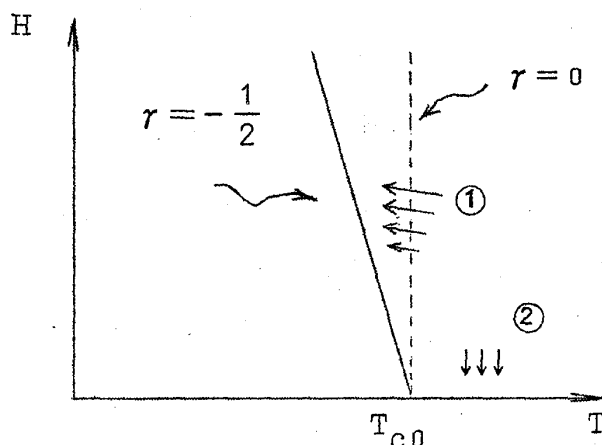
を得る。Prange<sup>67)</sup>は、この  $n$  和を計算して (体積  $V$  を導入して)

$$-\frac{M}{\sqrt{H}} = VT(4e)^{3/2} f(r) \quad (5.21)$$

$$r = (4eH\xi^{-2})^{-1} \quad (5.22)$$

のように規格化した形で書いた。ここでは簡単のため二つの極限を考えてみよう。

- ① 上の universal な関数は  $T < T_{c0}$  の時には  $H \rightarrow H_{c2}$  (i.e.  $r \rightarrow -\frac{1}{2}$ ) で発散する (第26図の①), この発散項は簡単に (5.20) の第二項の  $n=0$  の項から得られ



第26図

$$\begin{aligned} M &\cong -\frac{VT}{\pi} \frac{(e^2 H)}{\sqrt{2eH + \xi^{-2}}} \\ &= -\frac{VT(4e)^{3/2} \sqrt{H}}{\pi} \times \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2} + r}}, \end{aligned}$$

$$\left[ f(r) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + r}} \right], \quad H \gtrsim H_{c2}$$

のようになる。即ち  $H \rightarrow H_{c2}$  で  $M$  は  $\frac{1}{2}$  の巾で発散する。

- ② 次に  $H \rightarrow 0$  の極限を考えよう。この時には (5.20) の  $n$  和はオイラーマックローリンの展開を用いて計算できて

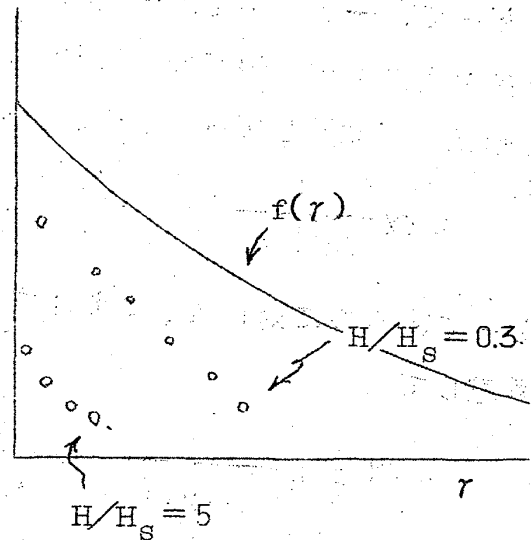
$$\begin{aligned} M &\cong -\frac{VTe(4eH)^{1/2}}{\pi} \left\{ \int_0^L dx \left[ \frac{3}{2} \sqrt{x + \frac{1}{2} + r} - \frac{r}{2} \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + r}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + r} - \frac{r}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + r}} \right] - \frac{1}{12} \left[ \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + r}} + \frac{r}{4} \frac{1}{(\frac{1}{2} + r)^{3/2}} \right] + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\cong -\frac{VT(4\theta)^{3/2}\sqrt{H}}{\pi} \left( \frac{1}{24} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+r}} + O r^{-3/2} \right)$$

$$\left[ f(r) = \frac{1}{24} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+r}} \right], \quad H \rightarrow 0$$

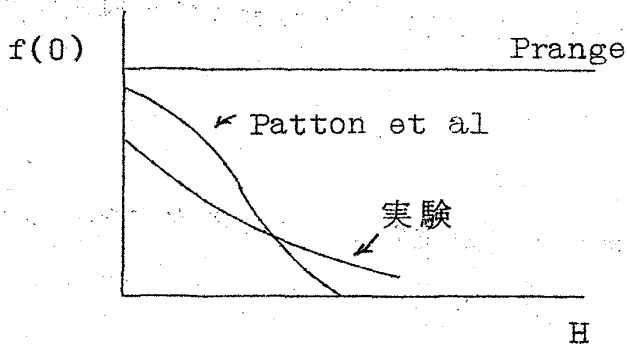
が得られる。

一般の場合も含めて定性的なふるまいを第27図に示す。実験が二、三のグループでなされているが、最近の Gollub, Beaseley, Tinkham<sup>68)</sup> (SQUIDが使われた) によるものの解析の結果を第27図の点線で示す。上が  $H/H_S = 0.3$ ，下が  $H/H_S = 5$  のように磁場依存性は  $r$  を通じてのほかに或る  $H_S$  に対する比によって異なる結果がでている。理論計算との不一致は他の方法でも見ることができる。 $r=0$  にとってお



第27図

き磁場と  $f$  との関係を見ると Prange の計算は実験と定性的にも合わない。



第28図

その後、Patton 達<sup>69)</sup> の計算が出て、Prange のやり方で  $n$  和の  $n$  の大きいものも効く形であるのは誤りで本当は他の原因で抑えられているとして人為的な cut off をとり入れた。図に示すように定性的には合っているようだが細かく見るとちがいが残る。ひとつには最初  $\omega_p = 0$  とお

てしまったのが悪いのではないだろう。ただ  $\omega_n$  和は発散するので、きちっとした取扱いが必要である。<sup>70)</sup>

二次元のときには  $1/(r + \frac{1}{2})$  のように発散は強くなる筈であるが、体積の小さい系では実験は困難で、まだはかられていない。

### b) 動的性質

ゆらぎの議論には非常に根本的な問題が関連している。いつも  $T_c$  が次元によらず存在して相転移がおこっていると仮定しているが、二次元や一次元については疑問が出されてきている。古い話では Landau<sup>71)</sup> や Peierles の一般論があって、一次元系では一箇所で秩序をこわすと秩序の記憶が失われて、むしろエントロピーが得になって秩序はおこらないだろうとされている。同じ問題を超伝導で議論してみる。 $T_c$  より上ではゆらぎの伝播関数は

$$\mathcal{D} \propto \frac{1}{Dq^2 + \epsilon_0} \quad (5.23)$$

となっているのに対し  $T_c$  より下では Ginzburg-Landau 方程式の非線型項を考慮して

$$\mathcal{D} \propto \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{Dq^2 + 2|\epsilon_0|} + \frac{1}{Dq^2} \right] \quad (5.24)$$

と求まる。(これは  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_q$  で定義されるゆらぎ  $\Psi_q$  が GL 汎関数の非線型項では、 $\Psi_q \Psi_q$  及び  $\Psi_q^+ \Psi_q^+$  のように結合するのを対角化して得られる) この第一項は  $\Psi$  の大きさのゆらぎに関係し、第二項は  $\Psi$  に垂直な、つまり位相のゆらぎに関係して、位相の変化に対するエネルギー縮退を反映して励起エネルギー (正しくは damping) が 0 である。ここでゆらぎの大きさを規定する量

$$\langle |\delta\Psi|^2 \rangle \sim \sum_q \mathcal{D}(q)$$

は三次元では有限だが二、一次元で発散して長距離のゆらぎの不安定を示している。ふつうの定義ではオーダーはおこらないと言える。

それに対して実験的には二次元薄膜も一次元 wire も殆んど超伝導の性質を示しているようだ。(ここで使っている次元は、ゆらぎが二次元的・一次元的という意味で、物体の大きさとの関係で決まる) しかし三次元はともかく、低次元では S 状態と N 状態の分け方は実は問題をもつ。以後の話に関連するが、一次元

の試料で電気抵抗の変化をしらべると第25図のように  $T_c$  と思われる温度を過ぎてても有限に残っている。ただ、どんどん小さくなるので輪を作って流した電流の寿命はどんどん長くなる。二次元では微妙なところで、実験的には観測できない程の長い寿命であり、ふつうは超伝導がおこっているとしてとり扱ってよさそうだ。この問題は今後はっきりした答が出されねばならないが、今回は  $T_c$  の上から近づいた時の fluctuation のみの話に限る。

### a, 電気伝導度

一番簡単な方法は TDGL 方程式によるもので、<sup>54)</sup>

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - D(\nabla - 2ie\mathbf{A})^2 + \epsilon_0 \right\} \Delta(r, t) = 0 \quad (5.25)$$

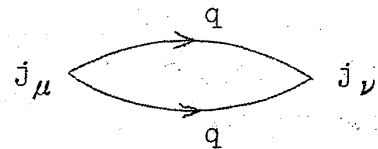
$$\mathbf{j} = \frac{\pi}{8} \frac{e\tau N}{mT} (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \Delta_{\mathbf{q}_1} \Delta_{\mathbf{q}_2}^* \quad (5.26)$$

ゆらぎの効果を見るときには上の式から出発してオーダパラメタのゆらぎに関する effective な Green 関数を定義する。vortex state にもあった fluctuation の伝播で、(5.4) 式と本質的に同じ ( $\Delta = |\mathbf{r}| \langle \Psi \rangle$  により) 手続で求まり

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \omega_n) \equiv \langle \Delta_{\mathbf{q}}^+ \Delta_{\mathbf{q}} \rangle = N(0)^{-1} \left[ \frac{\pi}{8T} (|\omega_n| + Dq^2 + \epsilon_0) \right]^{-1} \quad (5.27)$$

となる。一番ふつうに電気伝導度を計算するには Kubo 公式で、先ず電流の遅延積を求めればよい。それを  $Q_{\mu\nu}$  とすると、<sup>54)</sup>

$$Q_{\mu\nu}(i\omega_\nu) = \langle [j_\mu, j_\nu] \rangle$$



第28図

$$\begin{aligned} &= T \sum_n \sum_q \left( \frac{\pi e \tau N}{8mT} \right)^2 (2q_\mu) (2q_\nu) \\ &\quad \times \frac{1}{\left( N(0) \frac{\pi}{8T} \right)^2} \cdot \frac{1}{Dq^2 + \epsilon_0 + |\omega_n|} \cdot \frac{1}{Dq^2 + \epsilon_0 + |\omega_{n+\nu}|} \end{aligned} \quad (5.28)$$

となる。ここで時間を含んだ4つの  $\Delta$  の積のフーリエ変換を伝播関数  $\mathcal{D}$  の積であらわした。前の因子は電流の行列要素である。これを整理すると

$$Q_{\mu\nu}(i\omega_\nu) = T[4eD]^2 \sum_n \sum_q \frac{q_\mu q_\nu}{(Dq^2 + \epsilon_0 + |\omega_n|)(Dq^2 + \epsilon_0 + |\omega_{n+\nu}|)} \quad (5.29)$$

この  $n$  和をとるのに、部分分数にばらして、di gamma 関数に書いてから簡単にする方法もあるが、ここでは次のようにして重要な項を拾い出す。一般に

$$\begin{aligned} T \sum_n \frac{1}{A + |\omega_n|} \frac{1}{B + |\omega_{n+\nu}|} &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \coth \frac{z}{2T} \left\{ \left[ \frac{1}{A + iz} - \frac{1}{A - iz} \right] \right. \\ &\times \frac{1}{B + iz + \omega_\nu} + \frac{1}{A - iz + \omega_\nu} \left[ \frac{1}{B + iz} - \frac{1}{B - iz} \right] \Big\} \\ &+ (\omega_n = 0, \quad \omega_n = -\omega_\nu \text{ の pole 項}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

pole の項は  $\coth$  の積分の  $z=0$  の pole の寄与を消す。積分に効く pole のうち  $\coth$  から来るものは原点から  $T$  の程度はなれていて、 $A$  及び  $B$  は非常に近く、従ってその pole のみ考えて、 $\coth z/2T \sim 2T/z$  に近似する。 $T_c$  で一番大きな項のみをとる近似と同じである。

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{A} \frac{1}{B + A + \omega_\nu} + \frac{1}{B} \frac{1}{B + A + \omega_\nu} \right]$$

になるから  $i\omega_\nu$  を  $\omega + i\delta$  におきかえて

$$Q_{\mu\nu}(\omega) = T[4eD]^2 \sum_q \frac{q_\mu q_\nu}{(Dq^2 + \epsilon_0)(Dq^2 + \epsilon_0 - \frac{1}{2}i\omega)} \quad (5.31)$$

を得る。実は  $j = QA$  であるから  $E = i\omega A$  によって電導度は  $Q$  の  $i\omega$  の係数であることがわかる。 $Q$  が  $\omega=0$  で残ったら困るが、この定数項は GL 方程式の  $A$  に一次の項から出てくるもの

$$\bar{J}_p = e^2 \frac{DN(0)}{T} \pi A \langle |\Delta|^2 \rangle = 8e^2 D \sum_q \frac{1}{Dq^2 + \epsilon_0}$$

と打消しあうことが示される。こうして

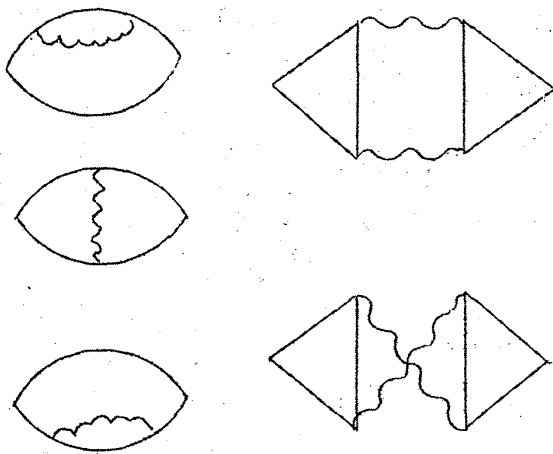
$$\sigma_{AL} = \frac{T}{2} (4eD)^2 \sum_q \frac{q_\mu q_\nu}{[Dq^2 + \epsilon_0]^3} \quad (5.32)$$

を得る。<sup>54)</sup> 次元によって、やはり、 $q$  和がちがって来て、

$$\begin{aligned} \sigma_{AL}^{(3)} &= \frac{e^2}{4\pi} \frac{T}{\sqrt{D\epsilon_0}} = \frac{e^2}{8} \sqrt{\frac{T}{2\pi D}} \left(\frac{T}{T-T_c}\right)^{1/2} \\ \sigma_{AL}^{(2)} &= \frac{e^2}{2\pi d} \frac{T}{\epsilon_0} = \frac{e^2}{16d} \frac{T}{T-T_c} \\ \sigma_{AL}^{(1)} &= \frac{e^2 T}{2S\epsilon_0} \sqrt{\frac{D}{\epsilon_0}} = \frac{8e^2}{S} \sqrt{\frac{D}{\pi^3 T}} \left(\frac{T}{T-T_c}\right)^{3/2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$d$  は二次元 film の厚さ、 $S$  は針金の断面積である。未だ三次元の実験はないが、三次元の時には前の factor が小さい。上の式は Glover の実験をよく説明するが、理論的には渦糸運動による抵抗のときと同じような問題が出てくる。実験に於いても例えば Al などの薄膜、また、針金で pure なものでは、電気抵抗は上の計算から期待されるよりもっと大きな温度変化をすることが知られている。<sup>55) 56)</sup>

では微視的理論で計算するとどうなるか。渦糸状態の時の 5 つのダイアグラムに相当して、ゆらぎの効果を電子に対する摂動として扱いと第 29 図のよう



第 29 図

な項が出てくる。波線は先のゆらぎの伝播関数である。この取扱いは、右の 2 つが先の AL 項に相当している。実際三角の部分を実算してやると今の近似では

$$c(q_1 - q_2) \Delta(q_1) \Delta(q_2)$$

となる。げんみつには  $\omega/\pi T_c$  のオーダーの補正項があるが、発散の議論には必要ない。ところで左

の3つのうち第二のものは実際計算をやってみると発散をしめす。<sup>21)</sup> 渦糸運動の状態でこういう項が効いていると考えられる場合があったことと対応している。その“anomalous term”を計算してみると（筆記者注，ふつう Maki 項と呼ばれる），

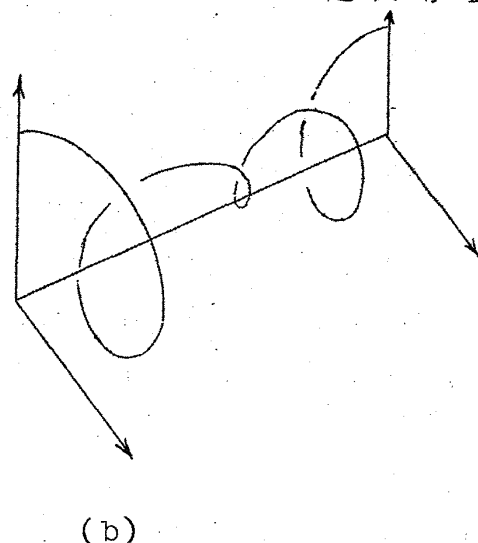
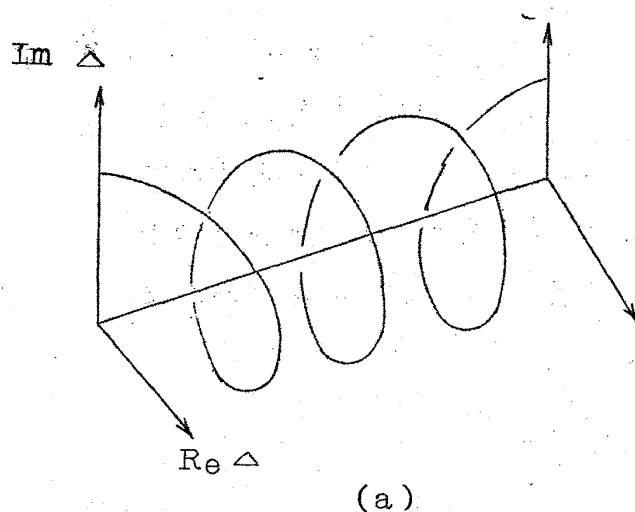
$$\sigma_{AN} = 4 e^2 T \sum_q \frac{1}{D q^2 + \delta} \frac{1}{D q^2 + \epsilon_0} \quad (5.34)$$

$\delta$  は pair breaking パラメタ（Thompson<sup>45)</sup>）である。もし  $\delta$  が存在しなければ，一次元，二次元系では  $\sigma$  は小さい  $q$  で発散してしまう。この  $\delta$  を考慮すると各次元で次のような結果を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_{AN}^{(3)} &= \frac{e^2}{\pi} \frac{T}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\delta}} \\ \sigma_{AN}^{(2)} &= \frac{e^2 T}{\pi d} \frac{1}{\epsilon_0 - \delta} \ln \frac{\epsilon_0}{\delta} \\ \sigma_{AN}^{(1)} &= \frac{2 e^2 T}{S} \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{\epsilon_0} \delta} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0} + \sqrt{\delta}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

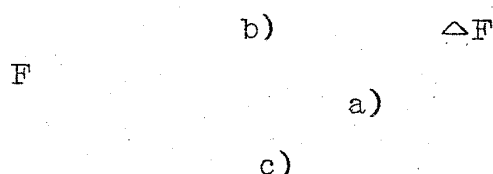
上の計算で一つの問題は  $\delta$  の起源であって，例えば薄膜で磁場を表面と平行にかけた場合にはそれが対をこわす作用をおこなっていることが明らかだが，何も磁場が入っていないなくても  $\delta$  はあるようだ。今のところそれを adjustable なパラメタとして， $T_c$  以上の実験は殆んどうまく説明できる。<sup>69)</sup>（とくに抵抗の下がり始めのところが第25図の①）

今後の問題は更に  $T_c$  の近く，及び  $T_c$  より下に理論をひろげることであるが，今の段階では仕方がないので，②附近では fluctuation の高次の摂動をやり，③で全くちがった approach をする。<sup>73), 74)</sup> それは例えば次のようなものになる。一様電流の流れている時のオーダーパラメタは  $\Delta_0 e^{i q r}$  の形をして，電流は  $q$  に比例している。抵抗を生ずる理由は，電流のちがった状態へ，つまり  $q$  のちがう状態へ遷移をおこなうからで，その遷移のためには（今の一次元試料の）一箇所  $\Delta$  が 0 になる必要がある。それを図示すると，第30図で a) は一様な電流，b) は中間状態をあらわし，これを通してピッチが変



第 30 図

わる。遷移確率は，自由エネルギーの障壁  $\Delta F$  と，次の準定常状態 c) に落ちる速度に関係した dynamical な定数  $C$  を使っておおざっぱに  $C e^{-\Delta F/T}$  と計算でき，低温の方では温度依存性が  $e^{-\frac{\Delta_0}{T}(1-\frac{T}{T_c})^{3/2}}$  となっている。この



第 31 図

ように一次元では現実には相転移がおこっていないという意味で転移の途中のようすに興味がある。実験でもそれがながめられるのでおもしろい。

二次元では相転移がおこっているかいないか，いろいろの議論があって，相転移の条件にもきびしいものからゆるいものまでがある。一番きびしいものはゆらぎが有限つまり， $\langle |\delta\Delta|^2 \rangle < \infty$  というもので，これによると超伝導の可能性は先の議論のように二，一次元で，NO である。もっとゆるい条件，すなわち電気抵抗  $\rho = 0$  at  $T = T_c$  をとれば一次元では NO，二次元は微妙なところである。或る近似のもとで二次元 OK の答が出ている。(Schmid, Mikeska)<sup>75)</sup> 超伝導とはちがうが似た議論はスピン系の話にある。Ising 模型で一次元 NO，二次元 OK の厳密な証明が，最近接相互作用の場合に，Onsager によってなされた。しかし Heisenberg 模型で考えると，

$\langle |\delta S|^2 \rangle < \infty$  の条件では一次元，二次元とも NO。ところが  $x \rightarrow \infty$  ( $x$  は帯磁率) の条件にすると，例えば Padé 近似では一次元 NO，二次元 OK となる。その意味で超伝導の問題と酷似していて，超伝導の話がきちっとすればそういうものも解ってくるかも知れない。ただ，例えば摂動で次数をひとつ上げると労力は 10 倍以上増すような次第である。何かもっと良い方法があれば相転移一般論の観点からおもしろい。

文 献 (続)

- 52) D.J.Thouless, Annals of Phys. 10, 553 (1960).
- 53) R.E.Glover, Phys. Letters 25A, 542 (1967)  
もっと一般的な理論及び実験に関しての解説は，それぞれ P.C.Hohenberg 及び R.D.Parks によって LT12 (Kyoto, 1970) に行なわれた。
- 54) L.G.Aslamazov and A.I.Larkin, Soviet Phys.— Solid State 10, 875 (1968).
- 55) J.E.Crow, R.S.Thompson, M.A.Klenin and A.K.Bhatnager Phys. Rev, Letters 24, 371 (1970).
- 56) G.A.Thomas and R.D.Parks, Proceedings of LT12 (Kyoto 1970).
- 57) K.Kajimura, N.Mikoshiha and K.Yamaji, preprint.
- 58) J.P.Hurault, Phys. Rev, 179 494 (1969).
- 59) A.Schmid, Phys. Rev. 180, 527 (1969).
- 60) L.P.Gorkov, Soviet Phys.—JETP Letters 11, 32 (1970).
- 61) T.Tsuzuki, Prog. Theor. Phys. 43, 286 (1970).
- 62) K.Kajimura and N.Mikoshiha, Solid State Commun. 8, 1617 (1970).
- 63) H.Fukuyama, H.Ebisawa and T.Tsuzuki, to be published in Prog. Theor. Phys.
- 64) K.Maki, to be published in Prog. Theor. Phys.

- 65) H.Schmidt, Z.Physik 216, 336 (1968).
- 66) K.Yamaji, Phys. Letters 29A, 123 (1969).
- 67) R.E.Prange, Phys. Rev. B1, 2349 (1970).
- 68) J.P.Gollub, M.R.Beasley and M.Tinkham, Phys. Rev. Letters 25, 1646 (1970).
- 69) B.R.Patton, V.Ambegaokar and J.W.Wilkins, Solid State Commun. 7, 1287 (1969).
- 70) K.Maki and H.Takayama, preprint
- 71) L.D.Landau and M.Lifshitz, Statistical Physics.
- 72) K.Maki, Prog. Theor. Phys. 40, 193 (1968).
- 73) J.S.Langer and V.Ambegaokar, Phys. Rev. 164, 498 (1970)
- 74) D.E.McCumber and B.I.Halperin, Phys. Rev. B1, 1054 (1970).
- 75) H.Schmidt and H.I.Mikeska, preprint.