

共鳴円筒波の衝撃波への発展

北大・工 栗原 央流 (Eru Kurihara)

北大・工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)

Graduate School of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

定在波や共鳴波といった進行しない音波の非線形なふるまいを知ることは、非線形音響学の分野における重要な研究テーマの一つである。とくに、音波の共鳴現象は、音源から放射される音波の振幅が微小であったとしても、音場中に励起される共鳴波の振幅は有限となることがあるという点で極めて興味深く、かつ工学的にも重要であるといえる。

平面音波の共鳴現象に関しては、閉管内における音響流の発生¹や管内を往復する衝撃波の形成²などさまざまな研究がなされている。一方で、円筒や球殻の内部に励起される非線形共鳴振動については、いまだ十分な研究がなされているとはいえない状況である。また、円筒音波や球面音波の共鳴現象は、空間の幾何学的な性質のため、波面の収束による局所的な振幅の増大がおこるなど、平面音波の共鳴現象と比較して、より複雑な現象といえる。

著者らは、衝撃波が形成されない場合について、同軸円筒内の気体中に励起される弱非線形共鳴波のふるまいを解析するため、速度ポテンシャルに関する非線形の支配方程式の数値シミュレーションをおこなった。³ その結果、円筒内に励起される共鳴波は、ゆっくりとした振幅の変調を伴うこと、変調の周期は音源の Mach 数 M の $-2/3$ 乗に比例すること、共鳴波の振幅は最大で $O(M^{1/3})$ に達することなどが明らかになった。このことにより、円筒波の共鳴振動は、それまでに知られていた閉管内の平面音波の共鳴振動とは大きく異なる性質を持つことがわかった。

本研究では、衝撃波の形成も含めて、同軸円筒内の理想気体中に励起される大振幅の共鳴波の非線形発展について、流体力学の基礎方程式(連続の式、運動方程式、エネルギー方程式)を数値的に解析した結果を報告する。

2 問題の定式化

軸方向に無限の長さをもつ初期半径 r_b の円筒(外部円筒)と、外部円筒と中心軸を共有する半径 r_a の剛体円柱(内部円柱)の間の環状領域を理想気体で満たす。時刻 $t^* = 0$ から、外部円筒の半径が、平均半径 $\bar{r}_b$ ($\bar{r}_b = r_b + a$) を中心として、軸方向に一様に振幅 a 、角振動数 ω で正弦的に変化する(図1参照)。これにより、円筒内部に定在音波を励起する。本研究では、外部円筒の加振振動数が系の固有振動数に一致した場合の、共鳴振動状態に着目して解析をおこなう。なお、具体的な共鳴条件については後述する。

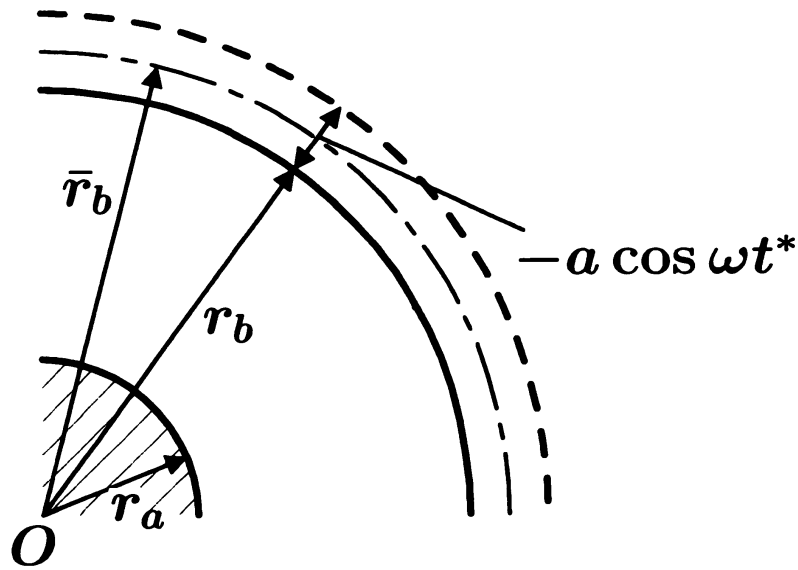


図 1: 同軸 2 重円筒の概念図

以下では，この非線形共鳴現象を特徴づける重要なパラメータについて説明する．第 1 のパラメータは，音源 (外部円筒表面) における音響 Mach 数 M であり，静止一様状態での音速 c_0 を用いて次のように定義する．

$$M \equiv \frac{a\omega}{c_0} \ll 1 \quad (1)$$

これは，音源から放射された音波に対する非線形効果の大きさを表している．ここで M は 1 に比べて十分に小さいとしているが，円筒内に励起される共鳴波の振幅は最大で $O(M^{1/3})$ にまで増幅される．つまり，音源から放射される音波の振幅が小さくても，共鳴波の振幅が大きくなれば衝撃波の形成をはじめとするさまざまな非線形現象が顕著に現れる．

第 2 のパラメータは，内部円柱と外部円筒の半径の比 α で，

$$\alpha \equiv \frac{r_a}{r_b} \quad (2)$$

と定義する．このパラメータは空間の幾何学的な性質を指定する．すなわち， $\alpha = 0$ ならば，円筒内に励起される音波は円筒波の性質をもつが， $\alpha \rightarrow 1$ ($\Omega \rightarrow \infty$) の極限では平面波となる．ここで，無次元の角振動数 Ω は以下のように定義されている．

$$\Omega \equiv \frac{\bar{r}_b \omega}{c_0} \quad (3)$$

いま，共鳴振動を考えているので， α と共鳴モード (基本振動，2 倍振動，...) を与えると， Ω は共鳴条件の式

$$J_1(\Omega)N_1(\alpha\Omega) - J_1(\alpha\Omega)N_1(\Omega) = 0 \quad (4)$$

から自動的に決定される。³

また、音波の非線形効果と散逸効果の大きさの比を表す音響 Reynolds 数 Re は、

$$Re \equiv \frac{(\gamma + 1)c_0 u_0}{\delta \omega} \quad (5)$$

と定義される。ここで、 γ は比熱比、 u_0 は音源における最大流速であり、いまの場合 $u_0 = a\omega$ である。また、 δ は音の拡散率である。本研究では、 $Re \rightarrow \infty$ の極限を考え、衝撃波面をその厚さがゼロの不連続面として取り扱い、衝撃波面以外では流体の散逸性を無視できるものとして解析をおこなう。

次に、初期の静止一様状態にある気体の密度 ρ_0 、音速 c_0 、圧力 p_0 を用いて以下のような無次元変数を導入する。

$$r = \frac{r^*}{\bar{r}_b}, \quad t = \frac{c_0}{\bar{r}_b} t^*, \quad u = \frac{u^*}{c_0}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 c_0^2}, \quad E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (6)$$

ここで、 u は動径方向の流速、 E は単位体積あたりの気体の持つ運動エネルギーと内部エネルギーの和であり、気体の全エネルギーとよばれる。有次元の変数には “*” の記号を付して無次元の変数と区別している。これらの無次元変数を用いて流体力学の基礎方程式系 (Euler 方程式系) を書き表すと以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) = -\frac{\rho u}{r} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(p + \rho u^2) = -\frac{\rho u^2}{r} \quad (8)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}[(E + p)u] = -\frac{(E + p)u}{r} \quad (9)$$

ただし、式 (7)–(9) は円筒の中心軸を原点とする極座標系を用いて表現している。

境界条件は、

$$\text{内部円柱表面 } r = \alpha \text{ で} \quad u = 0 \quad (10)$$

$$\text{外部円筒の境界面 } r = 1 - \frac{M}{\Omega} \cos \Omega t \text{ で} \quad u = M \sin \Omega t \quad (11)$$

となる。本研究では、これらの境界条件のもとで、基礎方程式系 (7)–(9) を数値的に解く。

3 共鳴円筒波の数値解析

この節では、無次元パラメータ α と音響 Mach 数 M の大小によって問題を大雑把に区分して計算を実行し、それぞれに現れる特徴的な現象を調べる。外部円筒の脈動の角振動数 Ω は、式 (4) によって決定される値のうち最も小さい値 (基本共鳴振動モード) を採用する。なお、差分法による数値計算を実行するにあたり、衝撃波が形成されないケース ($\alpha = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-4}$) では、MacCormack のスキームを適用し、それ以外のケースでは Osher のスキーム⁴を用い

3.1 $\alpha = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}$ の場合

音源 (外部円筒) の振幅が十分に小さくても音源の振動数が系の固有振動数に一致すると、円筒内の気体中に励起される音波の振幅は時間とともに増大し、もはや、その非線形性を見捨てることはできなくなってしまう。ここでは、 $\alpha = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}$ の場合について、円筒内に励起される共鳴波の時間発展を数値的に解析した結果を示す。

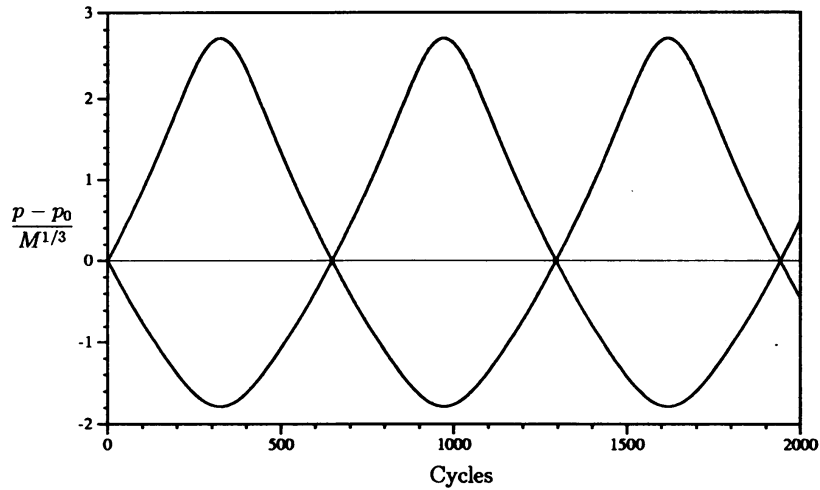


図 2: $\alpha = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}$ の場合の内部円柱表面 ($r = \alpha = 0.1$) における圧力振幅の時間発展

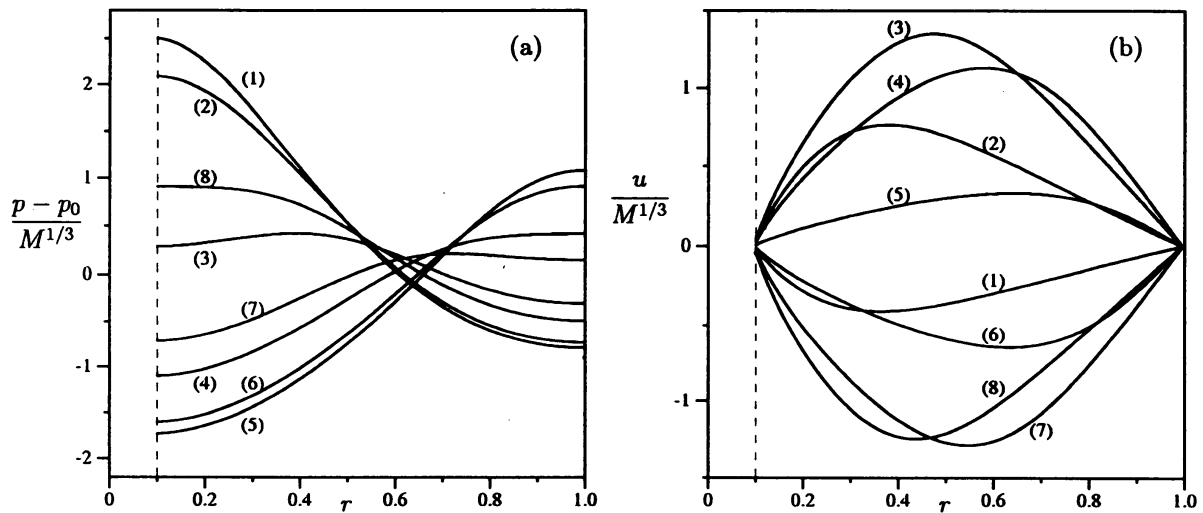


図 3: 円筒の脈動 300 周期後の圧力分布 (a) と流速分布 (b) $\alpha = 0.1, M = 1 \times 10^{-4}$, 時刻 $\Omega t = 2n\pi + \psi (n = 300)$, における (1) $\psi = 0$, (2) $\psi = \pi/4$, (3) $\psi = \pi/2$, (4) $\psi = 3\pi/4$, (5) $\psi = \pi$, (6) $\psi = 5\pi/4$, (7) $\psi = 3\pi/2$, (8) $\psi = 7\pi/4$ での流速と圧力の波形。図中の破線は内部円柱境界をあらわす。

図2に内部円柱表面 ($r = \alpha = 0.1$) での圧力振幅の時間発展を外部円筒が脈動を開始してから 2000 周期まで求めた結果を示す。図の曲線は、円筒の脈動 1 周期ごとに、内部円柱表面における圧力の最大値と最小値をそれぞれ連ねて得られた (厳密には近似的な) 包絡線である。

図からは、共鳴波の振幅が時間とともに増加と減少を周期的に繰り返している様子がわかる。振幅の成長は最大で $O(M^{1/3})$ に抑えられており、時間の経過にともなって際限無く増加するわけではないことがいえる。

図 3(a) は脈動開始から 300 周期後の圧力の空間分布を示したグラフである。図中の各曲線には、円筒が脈動を開始してから n 周期目の時刻を $\Omega t = 2n\pi + \psi$ として、 $\psi = 0$ から $\psi = 7\pi/4$ まで $\pi/4$ きざみで番号をふってある。図中の破線は内部円柱境界の位置 $r = \alpha$ を示している。図 3(a) から、非線形効果によって波形が歪み、圧力の空間波形の上下の非対称性が顕著にあらわれているのがわかる。

同時刻 (脈動開始から 300 周期後) における流速の空間波形を示したグラフが図 3(b) である。振幅の増大による非線形効果のため、圧力波形と同様に流速の空間波形にも歪みが見られるが、衝撃波を形成するには至っていない。

3.2 $\alpha = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-2}$ の場合

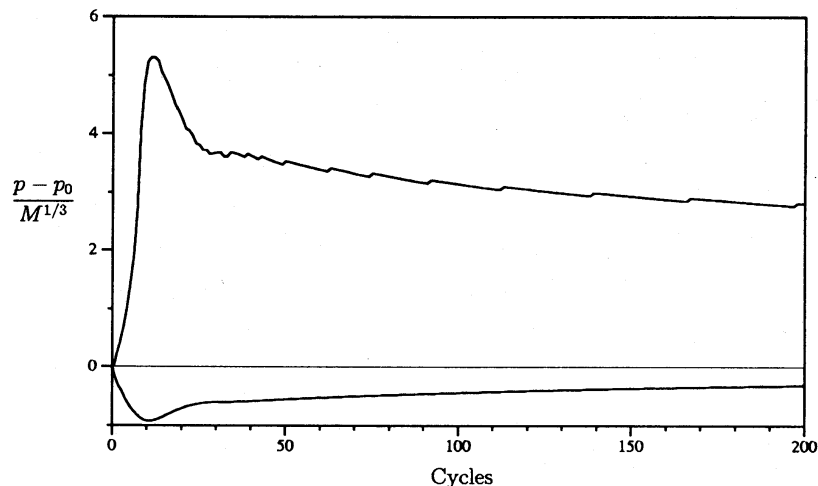


図 4: $\alpha = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-2}$ の場合の $r = \alpha$ における圧力振幅の時間発展

ここでは、 α を前節と同じく 0.1 として、Mach 数が大きな ($M = 1 \times 10^{-2}$) ケースについて考える。

図 4 は、円筒が脈動を開始してから 200 周期までの内部円柱表面における圧力振幅の包絡曲線である。振幅は、脈動開始とともに急激に増大し、 $M^{1/3}$ の 5 倍以上にまで達した後、ただちに $M^{1/3}$ の 4 倍弱まで減衰する。このような急激な振幅の増減は、脈動開始から 20 周期程度で落ち着き、その後、振幅は緩やかに減衰してゆき、共鳴波のふるまいは準定常的となる。なお、ここでの振幅の変調には、前節で見られたような周期性が見られなかった。

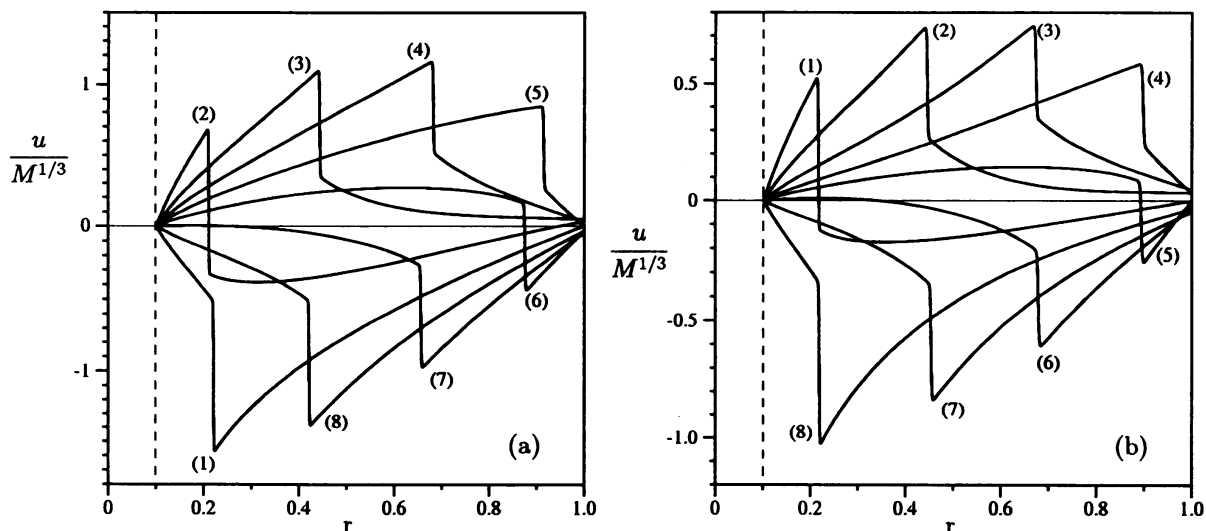


図 5: 円筒が脈動を開始してから (a):10 周期, (b):100 周期 経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-2}$)

$n = 10, 100$ (n は外部円筒の脈動の回数) の時点での流速の波形を図 5 に示す. 図 5(a) から, 図 4 において振幅がピークに達する時刻 ($n = 10$ 前後) には, 既に衝撃波が形成されていることが確認できる. つまり, 衝撃波が形成されても振幅はすぐには減衰せずに, 衝撃波が十分に発達し, その波面でのエネルギー散逸が音源から加えられるエネルギーよりも大きくなった時点で振幅の減衰がおこると考えられる. 図 5(a) と (b) を比較すると, 波形に関してはほとんど相違がないが, 振幅は (a) のグラフに比べ (b) では約半分程度にまで減衰している. これは図 4 に示されている圧力振幅の変化とも一致している.

図 5 を見ると, 内部円柱に近付くにつれ, 波面の収束により振幅および衝撃波面での流速の跳びの量が大きくなっている. また, グラフ上で衝撃波面を含む波形は, r が増加する方向に進むときと r が減少する方向に進むときで著しく異なっている.

これらは, 平面波の共鳴現象には見られず, 共鳴円筒波に特有の現象であるといえる.

3.3 $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-4}$ の場合

図 6 に, $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-4}$ としたときの圧力振幅の時間発展の様子を示す. $\alpha = 0.9$ の場合, $\alpha = 0.1$ のときに比べ, 円筒内に励起される共鳴波は平面波の性質を強くもつ. ここでは, $\alpha = 0.1$ のときに見られた振幅の変調現象は見られず, 振幅は時間の経過とともに単調に増加してゆき, 外部円筒の脈動開始から約 100 周期程度の時間が経過すると, 共鳴波の振幅は, ほぼ定常な状態に達することがわかる.

これまでと同様, 共鳴波の空間的な分布を調べるために, 脈動開始から 50 周期, 100 周期後の流速分布をそれぞれ示したのが図 7 である. 図 7(a) では共鳴波の波形歪みは観測されるが, 衝撃波を形成するには至っていない. この時刻では, 図 6 からわかるように振幅は成長

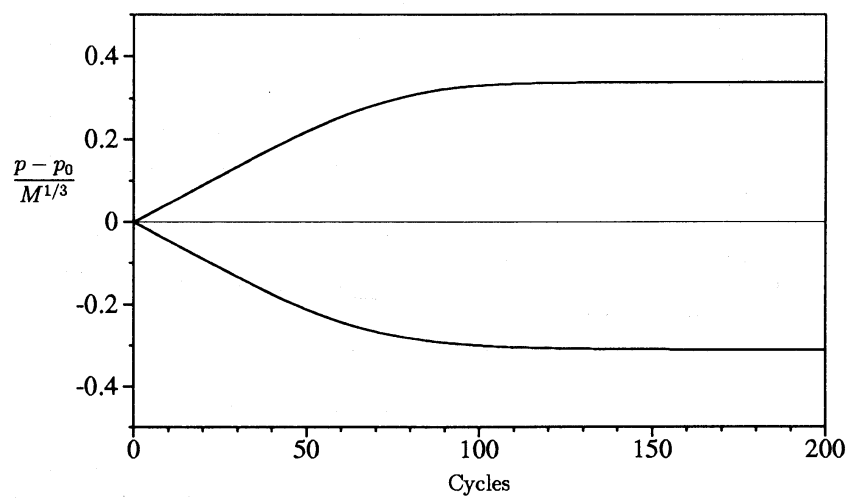


図 6: $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-4}$ の場合の $r = \alpha$ における圧力振幅の時間発展

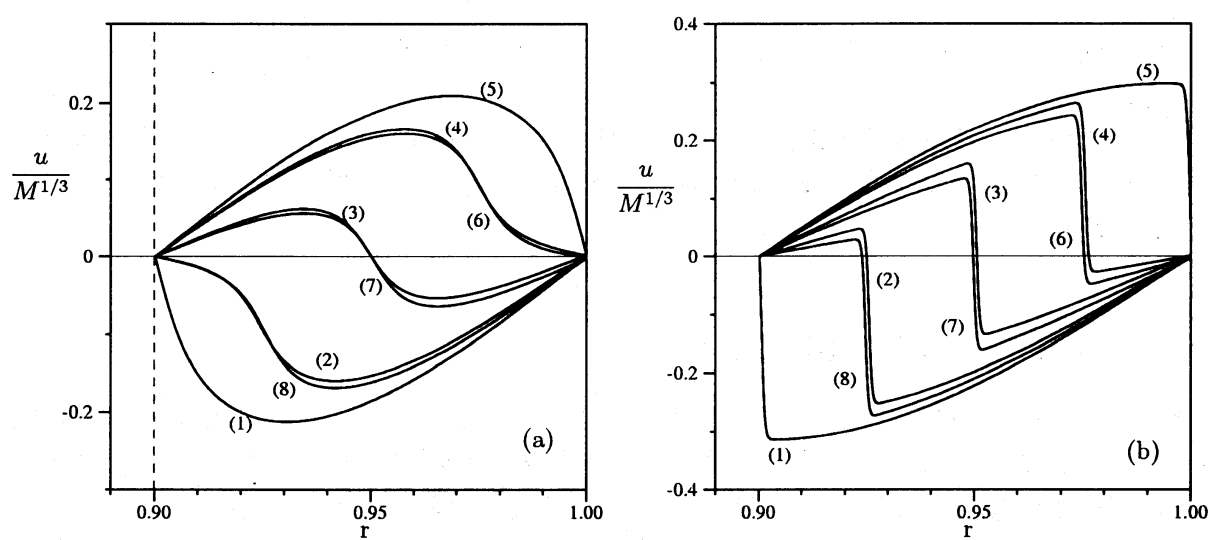


図 7: 円筒が脈動を開始してから (a):50 周期, (b):100 周期 経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-4}$)

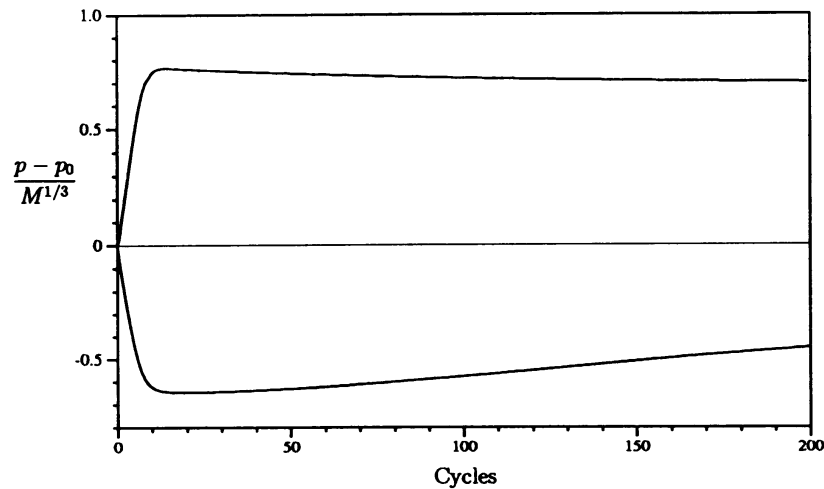


図 8: $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-2}$ の場合の $r = \alpha$ における圧力振幅の時間発展

を続けている。一方、図 7(b) では衝撃波が形成されていることがわかる。また、衝撃波面を含む流速の波形は、衝撃波が r が増加する方向に進むときと減少する方向に進むときとではほぼ同じ形となっている。これは、Chester によって示された平面音波の共鳴現象とよく類似している。

図 6 と図 7 から、円筒の脈動開始から 100 周期程度の時間が経過すると、衝撃波面でのエネルギー散逸と音源でのエネルギーの供給が平衡状態に達し、共鳴波のふるまいは準定常的になるといえる。

3.4 $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-2}$ の場合

最後に、 $\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-2}$ の場合を考える。図 8 は $r = \alpha$ における圧力振幅の時間発展の様子である。脈動開始からわずか 10 周期程度で振幅の成長は頭打ちとなり、その後ゆっくりと振幅が減衰している。長時間にわたって振幅の変化を追ってゆくと、圧力振幅の最大値と最小値の変化が時間軸に対して非対称であることがわかる。これは、衝撃波面において熱が発生することにより円筒内の平均温度が上昇し、その結果、平均圧力が初期の圧力 p_0 より高くなるためである。また、平均温度の上昇により円筒内の平均音速も変化し、固有振動数が変化する。これにより、円筒内の気体の振動は少しずつ共鳴状態からずれてくる。図 8 に見られる共鳴波の振幅の減少は、衝撃波面におけるエネルギーの散逸と、加振振動数と固有振動数のずれによって起こると考えられる。

衝撃波の形成とその発展の様子を知るため、図 9 に $n = 5, 10$ のときの円筒内の流速分布の様子を示した。図 9(a) から、脈動開始からわずか 5 周期目の時点で衝撃波が形成されていることがわかる。さらに時間が経過し、振幅の増加が止まった時刻 (脈動開始から 10 周期目、図 9(b)) では、衝撃波は十分に発達しており、波面は不連続面としてとらえられている。

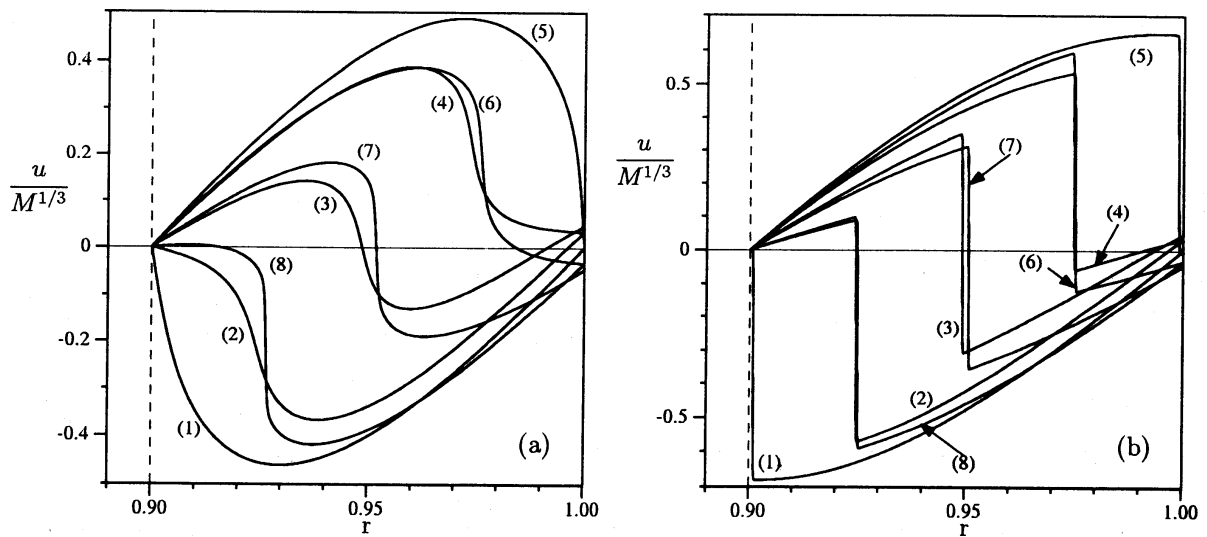


図 9: 円筒が脈動を開始してから (a):5 周期, (b):10 周期 経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.9$, $M = 1 \times 10^{-2}$)

4 まとめ

本研究では, 同軸二重円筒内の気体中に励起される共鳴波の非線形発展を α と M を変化させて, 数値的に解析した. 得られた結果を以下に示す.

1. 大振幅の共鳴円筒波には, 波形を歪ませる性質とそれを抑制する性質の両方が存在する. このため, 次のような現象が現れる.
 - (a) 音響 Mach 数 M が十分に小さいと, 非線形効果による波形歪みの効果が弱いため, 衝撃波の形成には至らない. このとき, 共鳴波の振幅は周期的な変調を起こす.
 - (b) 1-(a) のとき, 共鳴波の振幅は最大で $O(M^{1/3})$ に達する.
 - (c) M が大きく, 波形歪みの効果とその抑制効果に打ち勝つほど強い場合, 波形は振幅の増大とともに大きく歪み, ついには衝撃波が形成される.
2. α が大きな場合, 衝撃波面が r の増加する方向に進むときも, 減少する方向に進むときも, 流速の波形はほぼ同じであるのに対して, α が小さなときは, 大きく異なっている.
3. r の小さな領域 (内部円柱の境界に近い領域) では, 波面の収束によって衝撃波が強くなる. この波面の収束の効果は α が小さいときに顕著になる.

今後の課題としては, 計算精度の向上, 空間多次元への拡張などをあげることができる. とくに, 本研究では $Re \rightarrow \infty$ の極限を仮定しているにもかかわらず, 図 7(b) では, 衝撃波

面を不連続面としてとらえることができていない。これは、Osher のスキームのもつ数値的な散逸性によるものであり、音響 Mach 数 M の小さな問題において現象を正確に評価するためには、より解像度の高い計算を行う必要がある。

参考文献

1. J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, vol. 2, (McGraw-Hill, New York, 1948).
2. W. Chester, "Resonant oscillations in closed tubes", J. Fluid Mech. **18**, 44–64 (1964).
3. 栗原央流・井上良紀・矢野猛, "同軸二重円筒内部の理想気体中に励起される線形および非線形共鳴振動", 日本流体力学会誌 *ながれ* **20**, 396–405 (2001).
4. S. R. Chakravarthy and S. Osher, "Numerical experiments with the Osher upwind scheme for the Euler equations", AIAA J. **21**, 1241–1248 (1983).