

Laplacian の第一固有値の上限を与える 閉曲面上の計量について

佐賀大学・教育学部 庄田 敏宏*

Toshihiro Shoda
Faculty of Education,
Saga University

概要

閉曲面上の Laplacian に対して、その第一固有値の上限を決定する問題は、古典的な問題ではあるものの、高種数の場合はほとんど結果が知られていない。2005 年に Jakobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam, Polterovich によって、向き付けられた種数 2 の閉曲面上における第一固有値の上限に関する予想が提唱され、今回、その予想を解決した。本稿ではその内容を紹介したい。

1 問題設定

M を向き付けられた種数 γ の閉曲面とし、 $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ を M 上の Riemann 計量とする。このとき、 M 上の Laplacian が[§]

$$\Delta_{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad ((g^{ij}) = (g_{kl})^{-1}, |g| = \det(g_{ij}))$$

によって定義される。定数 $\lambda(ds^2)$ が[§] M 上の Laplacian の固有値であるとは、 M 上の恒等的に 0 でない関数 u で $\Delta_{ds^2} u + \lambda(ds^2)u = 0$ を満たすものが存在するときをいう。この u のことを固有値 $\lambda(ds^2)$ に対する固有関数と

*本内容は、科学研究費(基盤研究(C)一般、「周期的極小曲面の安定性およびその極限の研究」課題番号 16K05134)の援助を受けており、また、名古屋大学の納谷信氏との共同研究に基づくものである。

いう．Laplacian の固有値を降べきの順で $\lambda_0(ds^2)$, $\lambda_1(ds^2)$, $\lambda_2(ds^2)$, $\dots$ と番号付けすると, $\lambda_0(ds^2) = 0$ であり, さらに,

$$0 = \lambda_0(ds^2) < \lambda_1(ds^2) \leq \lambda_2(ds^2) \leq \dots \rightarrow \infty$$

というように, 離散的に増加していき正の無限大に発散することが知られている．本稿では, 最小の正の固有値 $\lambda_1(ds^2)$ のことを Laplacian の第一固有値ということにする．

第一固有値に関しては, ds^2 が計量全体を動いたときに $\lambda_1(ds^2)$ がどこまで大きくなるか? という問題がある．ただし, 計量 ds^2 を定数倍すれば $\lambda_1(ds^2)$ はいくらでも大きくできるし, いくらでも小さくできる．したがって, 計量の定数倍に依存しない $\Lambda(ds^2) = \lambda_1(ds^2) \cdot \text{Area}(ds^2)$ の最大値を問う問題が一つの課題となる．ここで, $\text{Area}(ds^2)$ は計量 ds^2 による面積である．適切に計量を定数倍して面積を一定値, 例えば面積を 1 に固定して, 面積が 1 である計量全体の集合において第一固有値の最大値を問う問題に解釈し直しても同じ問題となる．このことから, 本問題は第一固有値に関する等周問題といわれている．これに関しては以下の先行研究が知られている．

定理 1.

- (1) (Hersch [Her]) $\gamma = 0$ のとき, $\Lambda(ds^2) \leq 8\pi$ が成り立つ．なお, 等号成立は球面上の標準計量のとき, かつ, そのときに限る．
- (2) (Yang-Yau [YY]) 種数 γ のとき, $\Lambda(ds^2) \leq 8\pi \cdot \left[\frac{\gamma+3}{2}\right]$ が成り立つ．ここで, $[\cdot]$ は整数部分を表す．
- (3) (Nadirashvili [N]) $\gamma = 1$ のとき, $\Lambda(ds^2) \leq 8\pi^2/\sqrt{3}$ が成り立つ．なお, 等号成立は一つの内角が $\pi/3$ であるひし形による平坦計量のとき, かつ, そのときに限る．

いずれの結果も, $\Lambda(ds^2)$ が計量に依存しない定数で上から抑えられている．しかし, こうした現象は 3 次元以上では成立しないことが知られている ([U, T, M]).

定理 1 の (2) は $\gamma = 0$ のときは最良の評価であるが, $\gamma = 1$ のときは最良の評価ではないことがすぐに導かれる．このことから, (2) の不等式が最良か? 最良でなければ最良の最大値ないし上限は何か? という問題が考えられる．単純な問題であるが, 種数が 2 以上の場合は未解決問題である．

$\gamma = 2$ のとき, 定理 1 の (2) から $\Lambda(ds^2) \leq 16\pi$ が成り立つ．この評価

に対しては, Jakobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam, Polterovich による以下の示唆 [JLNNP] がある.

予想.

Bolza 曲面上には $\Lambda(ds^2) = 16\pi$ を満たす分岐計量 ds^2 が存在する.

この予想は極小曲面の Morse 指数の理論と深く関連しており, Nayatani [Nay] の技法を用いて解決される. 本稿ではその詳細を紹介する, 即ち, 納谷・庄田 [NS] の解説となる.

なお, 上の予想における分岐計量は通常の計量で近似ができることから, 通常の計量に対する $\Lambda(ds^2)$ の上限は 16π となる. ただし, $\Lambda(ds^2) = 16\pi$ を満たす通常の計量 ds^2 の存在は未だ知られていない.

2 極小曲面の Morse 指数との関連

Bolza 曲面とは,

$$B = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4 + 1)\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

で定義される種数 2 の超楕円型 Riemann 面のことである. $g_B: B \ni (z, w) \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ により分岐二重被覆が得られ, 球面上の標準計量 $ds_{S^2}^2$ を引き戻して得られる分岐計量 $ds_B^2 = g_B^* ds_{S^2}^2$ が予想で扱われているものである. g_B は球面の分岐二重被覆であることから $\text{Area}(ds_B^2) = 8\pi$ となり, これにより $\Lambda(g) = 16\pi$ なる予想の主張は $\lambda_1(ds_B^2) = 2$ を意味することが導かれる.

これを示すために [JLNNP] で考察されている以下の B の変形を扱う. $0 < \theta < \pi/2$ なる θ に対して

$$B_\theta = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z^4 + 2 \cos 2\theta \cdot z^2 + 1)\} \cup \{(\infty, \infty)\}$$

で定義される種数 2 の超楕円型 Riemann 面を B_θ とする. なお, $B_{\pi/4} = B$ である. B と同様に $g_\theta: B_\theta \ni (z, w) \mapsto z \in \overline{\mathbb{C}}$ なる分岐二重被覆を考え, 球面の標準計量をこれにより引き戻したものを ds_θ^2 とする.

主結果 ([NS]).

$\theta_1 \approx 0.65$ なる θ_1 が存在して, $\theta_1 \leq \theta \leq \pi/2 - \theta_1$ なる θ に対して $\lambda_1(ds_{B_\theta}^2) = 2$, 即ち, $\Lambda(ds_\theta^2) = 16\pi$ が成り立つ.

以下では、この問題と極小曲面の Morse 指数の関連を述べる.

$M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を向き付けられた完備な極小曲面とする. $\Omega \subset M$ を相対コンパクトな領域とし, $\text{ind}(\Omega)$ を

$$\int_{\Omega} (|du|^2 + 2Ku^2) da < 0, \quad \forall u \in V \setminus \{0\}$$

なる線形空間 $V \subset C_0^\infty(\Omega)$ の最大次元とする. ここで, K と da は M の Gauss 曲率と面積要素である. さらに,

$$\text{ind}(M) = \sup_{\Omega} \text{ind}(\Omega)$$

と定義する. なお, 上限は相対コンパクトな領域 $\Omega \subset M$ 全体でとるものとする. $\text{ind}(M)$ は有限とは限らないが, 以下の Fischer-Colbrie [F] による結果が知られている.

$$\text{ind}(M) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_M (-K) da < \infty.$$

Osserman [O] の結果から, 全曲率有限で完備な極小曲面 $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, コンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ から有限個の点 $\{p_j\}_{j=1}^k$ を除いた $\overline{M} \setminus \{p_j\}$ に共形同値であり, その Gauss 写像 $G: \overline{M} \setminus \{p_j\} (= M) \rightarrow S^2$ は正則写像 $\overline{G}: \overline{M} \rightarrow S^2$ に拡張される. 極小曲面 $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ の誘導計量 ds^2 による Laplacian Δ_{ds^2} に対して, 線形空間

$$\text{Nul}(M) = \{u \in C_0^\infty(M) \mid (\Delta_{ds^2} + 2K)u = 0\}$$

の次元のことを極小曲面の退化次数といい, $\text{nul}(M)$ で表す.

一般に, コンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ から球面への正則写像 $\overline{G}: \overline{M} \rightarrow S^2$ による球面上の標準計量の引き戻しを $ds_{\overline{G}}^2$ とする. $ds_{\overline{G}}^2$ は分岐計量となるが, Laplacian $\Delta_{\overline{G}}$ の固有値問題を考察することができる. 重複度も含めた 2 未満の $\Delta_{\overline{G}}$ の固有値の個数のことを正則写像 $\overline{G}$ の Morse 指数といい, $\text{ind}(\overline{G})$ で表す. また, 重複度も含めた $\Delta_{\overline{G}}$ の 2 固有値の個数のことを正則写像 $\overline{G}$ の退化次数といい, $\text{nul}(\overline{G})$ で表す. Fischer-Colbrie の結果により, 極小曲面の Morse 指数 $\text{ind}(M)$ は拡張された Gauss 写像 (正則写像 $\overline{G}$ による $\text{ind}(\overline{G})$) に一致する. また, 極小曲面の退化次数 $\text{nul}(M)$ は, $(\Delta_{ds^2} + 2K)u = 0$ となり, かつ, 各 p_j の近傍で有界な M 上の関数 u による線形空間の次元に一致することも Fischer-Colbrie によって示されている. $\mathbb{R}^3$ における等長変換である平行移動を意味する定ベクトル $a \in \mathbb{R}^3$

に対して、極小曲面 $M \rightarrow \mathbb{R}^3$ の単位法線ベクトル場 N との内積 $\langle a, N \rangle$ は $(\Delta_{ds^2} + 2K)\langle a, N \rangle = 0$ を満たし、各 p_j の近傍で有界な M 上の関数を定める．定ベクトル a は3次元分の自由度があるため、 $\text{nul}(M) \geq 3$ となる．これに対して、 $(\Delta_{ds^2} + 2K)u = 0$ を満たし、定ベクトルから導かれるものでない関数 u のことを **extra eigenfunction** という．一方、 $\mathbb{R}^3$ の回転は等長変換ではあるものの、恒等的に0になるか、各 p_j の近傍で有界でなくなるような関数しか誘導しないことから $\text{nul}(M)$ に影響しないことが導かれる．さらに、極小曲面の退化次数は、拡張された Gauss 写像 (正則写像) $\overline{G}$ による $\text{nul}(\overline{G})$ に一致することが示される．以上の議論において、 ind や nul という記号が極小曲面の Morse 指数 (退化次数) と正則写像の Morse 指数 (退化次数) の二つの意味をもつことになるが、今の状況ではこの二つが一致することにより同じ記号を用いている． $\Delta_{\overline{G}}$ には0固有値 (2未満の固有値) があることから、 $\text{ind}(\overline{G}) \geq 1$ が成り立つ．なお、上述した定ベクトル a による関数 $\langle a, N \rangle$ は、 $\Delta_{\overline{G}}$ の重複度3の2固有値を導き、extra eigenfunction はそれ以外の2固有値を導く．

以上の議論から、 Δ_{g_B} の第一固有値が2であるという主張は、 $\text{ind}(g_B) = 1$ であることと同値である．主結果は B_θ において $\text{ind}(g_\theta)$ を計算することにより示される．次節以降ではその詳細を述べる．

3 Extra eigenfunction 全体の集合の決定法

正則写像の Morse 指数を計算するためには、extra eigenfunction 全体の集合を決定することが一つの道順である．extra eigenfunction 全体の集合の記述法は1990年代に江尻・小谷 [EK], Montiel-Ros [MR] によって確立されている．以下ではその詳細を述べる．

コンパクト Riemann 面 $\overline{M}$ から2次元球面 S^2 への正則写像 $G: \overline{M} \rightarrow S^2$ を考える．今、 G と立体射影との合成写像 $g: \overline{M} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の極による因子を P とし、正則写像 $G: \overline{M} \rightarrow S^2$ の分岐因子 (ramification divisor) を B とする：

$$P = \sum_{j=1}^k m_j p_j, \quad B = \sum_{j=1}^l n_j q_j.$$

ここで、

$$D = \sum_{j=1}^l (n_j + 1) q_j - \sum_{j=1}^k 2m_j p_j$$

とおく．さらに， K を標準因子として，

$$\hat{H}(G) = \left\{ \omega \in H^0(\overline{M}, K \otimes D) \left| \begin{array}{l} \text{Res}_{q_j} \omega = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l), \\ \Re \int_{\ell}^t (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega = \mathbf{o} \quad (\ell \in H_1(\overline{M}, \mathbb{Z})) \end{array} \right. \right\}$$

とおく．このとき， $\omega \in \hat{H}(G)$ に対して

$$f_{\omega}(p) = \Re \int_{p_0}^p (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega$$

とおくと，支持関数 $\langle f_{\omega}(p), G \rangle$ によって， $\hat{H}(G)$ から extra eigenfunction 全体の集合への同型が得られる．なお，周期条件

$$\Re \int_{\ell}^t (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega = \mathbf{o}$$

は

$$\int_{\ell} \omega = \overline{\int_{\ell} g^2 \omega}, \quad \int_{\ell} g \omega = -\overline{\int_{\ell} g \omega} \quad (1)$$

と同値である．

B_{θ} および $g_{\theta} : B_{\theta} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ にこの手順を適用すると，極因子 P および分岐因子 B は

$$P = 2(\infty, \infty), \quad B = (0, 0) + (e^{\pm i(\pi/2 \pm \theta)}, 0) + (\infty, \infty)$$

である．これにより

$$D = 2(0, 0) + 2(e^{\pm i(\pi/2 \pm \theta)}, 0) - 2(\infty, \infty)$$

となる．Riemann-Roch の定理から，

$$h^0(K \otimes D) = \underbrace{h^0(-D)}_{=0} + 1 - (\text{種数}) + \deg(K \otimes D) = 9$$

である．実際，具体的に以下のように $H^0(K \otimes D)$ が明記される：

$$H^0(K \otimes D) = \left\{ \frac{dz}{w}, \frac{dz}{w^2}, \frac{z}{w^2} dz, \frac{z^2}{w^2} dz, \frac{dz}{w^3}, \frac{z}{w^3} dz, \frac{z^2}{w^3} dz, \frac{z^3}{w^3} dz, \frac{z^4}{w^3} dz \right\}.$$

dz/w^2 , zdz/w^2 , z^2dz/w^2 は留数をもつので $\hat{H}(g_\theta)$ に属さない. また, 他の $H^0(K \otimes D)$ を構成する有理型微分が留数をもたないことを示すのは簡単である. したがって, $H^0(K \otimes D)$ の基底の中で留数をもたないのは

$$\left\{ \frac{dz}{w}, \frac{dz}{w^3}, \frac{z}{w^3}dz, \frac{z^2}{w^3}dz, \frac{z^3}{w^3}dz, \frac{z^4}{w^3}dz \right\}$$

となり, 任意の $\omega \in \hat{H}(g_\theta)$ は複素数 α_j を用いて

$$\omega = \alpha_1 \frac{dz}{w} + \alpha_2 \frac{dz}{w^3} + \alpha_3 \frac{z}{w^3}dz + \alpha_4 \frac{z^2}{w^3}dz + \alpha_5 \frac{z^3}{w^3}dz + \alpha_6 \frac{z^4}{w^3}dz$$

と表される.

(1) のための周期計算の準備として, $\hat{H}(g_\theta)$ の基底を第二種微分 (留数が 0 である有理型微分) で記述する. 次の補題は直接計算による帰結である.

補題 2.

$$\begin{aligned} d(z^\alpha w^\beta) &= \frac{1}{2} z^{\alpha-1} w^{\beta-2} \{ (2\alpha + 5\beta)w^2 - 4\beta \cos(2\theta)z^3 - 4\beta z \} dz \\ &= \frac{1}{2} z^\alpha w^{\beta-2} \{ (2\alpha + 5\beta)z^4 + 2\cos(2\theta)(2\alpha + 3\beta)z^2 + 2\alpha + \beta \} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

またこの補題から以下を得る.

補題 3.

$$\frac{z}{w^3}dz \equiv \frac{3}{4} \frac{dz}{w} - \cos(2\theta) \frac{z^3}{w^3}dz, \quad (4)$$

$$\frac{z^2}{w^3}dz \equiv \frac{1}{4} \frac{z}{w}dz - \cos(2\theta) \frac{z^4}{w^3}dz, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{w^3} &\equiv -5 \frac{z^4}{w^3}dz - 6 \cos(2\theta) \frac{z^2}{w^3}dz \\ &\equiv -\frac{3}{2} \cos(2\theta) \frac{z}{w}dz + (-5 + 6 \cos^2(2\theta)) \frac{z^4}{w^3}dz, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{z^5}{w^3}dz &\stackrel{w^2=z^5+2\cos(2\theta)z^3+z}{=} \frac{dz}{w} - 2 \cos(2\theta) \frac{z^3}{w^3}dz - \frac{z}{w^3}dz \\ &\equiv \frac{1}{4} \frac{dz}{w} - \cos(2\theta) \frac{z^3}{w^3}dz, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{z^6}{w^3}dz &\stackrel{zw^2=z^6+2\cos(2\theta)z^4+z^2}{=} \frac{z}{w}dz - 2 \cos(2\theta) \frac{z^4}{w^3}dz - \frac{z^2}{w^3}dz \\ &\equiv \frac{3}{4} \frac{z}{w}dz - \cos(2\theta) \frac{z^4}{w^3}dz, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{z^2}{w}dz \equiv -4\cos(2\theta)\frac{z^5}{w^3}dz - 4\frac{z^3}{w^3}dz \equiv -\cos(2\theta)\frac{dz}{w} - 4\sin^2(2\theta)\frac{z^3}{w^3}dz. \quad (9)$$

今、完全形式を無視した第二種微分の基底を

$$\left\{ \frac{dz}{w}, \frac{z}{w}dz, \frac{z^3}{w^3}dz, \frac{z^4}{w^3}dz \right\}$$

とする． $\omega \in \hat{H}(g_\theta)$ を

$$\omega = \alpha_1 \frac{dz}{w} + \alpha_2 \frac{z}{w^3}dz + \alpha_3 \frac{z^2}{w^3}dz + \alpha_4 \frac{z^3}{w^3}dz + \alpha_5 \frac{z^4}{w^3}dz + \alpha_6 \frac{z^5}{w^3}dz$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \omega &\underbrace{\equiv}_{(4), (5), (6)} \left(\alpha_1 + \frac{3}{4}\alpha_3 \right) \frac{dz}{w} + \left(-\frac{3}{2}\cos(2\theta)\alpha_2 + \frac{\alpha_4}{4} \right) \frac{z}{w}dz + (-\cos(2\theta)\alpha_3 \\ &+ \alpha_5) \frac{z^3}{w^3}dz + ((-5 + 6\cos^2(2\theta))\alpha_2 - \cos(2\theta)\alpha_4 + \alpha_6) \frac{z^4}{w^3}dz, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} z\omega &= \alpha_1 \frac{z}{w}dz + \alpha_2 \frac{z^2}{w^3}dz + \alpha_3 \frac{z^3}{w^3}dz + \alpha_4 \frac{z^4}{w^3}dz + \alpha_5 \frac{z^5}{w^3}dz + \alpha_6 \frac{z^6}{w^3}dz \\ &\underbrace{\equiv}_{(4), (5), (7)} \left(\frac{3}{4}\alpha_2 + \frac{\alpha_6}{4} \right) \frac{dz}{w} + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{4} \right) \frac{z}{w}dz \\ &+ (-\cos(2\theta)\alpha_2 + \alpha_4 - \cos(2\theta)\alpha_6) \frac{z^3}{w^3}dz + (-\cos(2\theta)\alpha_3 + \alpha_5) \frac{z^4}{w^3}dz, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} z^2\omega &= \alpha_1 \frac{z^2}{w}dz + \alpha_2 \frac{z^3}{w^3}dz + \alpha_3 \frac{z^4}{w^3}dz + \alpha_4 \frac{z^5}{w^3}dz + \alpha_5 \frac{z^6}{w^3}dz + \alpha_6 \frac{z^7}{w^3}dz \\ &\underbrace{\equiv}_{(5), (7), (8), (9)} \left(-\cos(2\theta)\alpha_1 + \frac{\alpha_5}{4} \right) \frac{dz}{w} + \left(\frac{\alpha_2}{4} + \frac{3}{4}\alpha_6 \right) \frac{z}{w}dz \\ &+ (-4\sin^2(2\theta)\alpha_1 + \alpha_3 - \cos(2\theta)\alpha_5) \frac{z^3}{w^3}dz \\ &+ (-\cos(2\theta)\alpha_2 + \alpha_4 - \cos(2\theta)\alpha_6) \frac{z^4}{w^3}dz. \end{aligned} \quad (12)$$

B_θ 上のホモロジー基底を次のようにとる．まず、 $\varphi(z, w) = (-z, iw)$, $j(z, w) = (z, -w)$ なる B_θ 上の正則変換を導入し、

$$C_1 = \{(z, w) = (t, \sqrt{t(t^4 + 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}) \mid 0 \leq t \leq \infty\},$$

$$C_2 = \{(z, w) = (it, e^{i\pi/4}\sqrt{t(t^4 - 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}) \mid 0 \leq t \leq \infty\}$$

なる道を考える。このとき、

$$C_1 \cup [-j(C_1)], C_2 \cup [-j(C_2)], \varphi(C_1 \cup [-j(C_1)]), \varphi(C_2 \cup [-j(C_2)])$$

がホモロジー基底になる。これらを (1) の ℓ に代入してまとめると、

$$A = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t^4 + 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}}, \quad B = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t^4 - 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}},$$

$$C = \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\sqrt{t(t^4 + 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}^3}, \quad D = \int_0^\infty \frac{t^3 dt}{\sqrt{t(t^4 - 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}^3}$$

に対して、連立線形方程式

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_5 \\ \overline{\alpha_2} \\ \overline{\alpha_4} \\ \alpha_3 \\ \overline{\alpha_6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

を得る。ただし、

$$X = \begin{pmatrix} A & C \\ B & -D \\ B & -D \\ A & C \\ - (A \cos(2\theta) + 4C \sin^2(2\theta)) & \frac{A}{4} - C \cos(2\theta) \\ B \cos(2\theta) - 4D \sin^2(2\theta) & - (\frac{B}{4} + D \cos(2\theta)) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}A - C \cos(2\theta) & C \\ -\frac{3}{4}B - D \cos(2\theta) & D \\ \frac{B}{4} + D \cos(2\theta) & -D \\ -\frac{A}{4} + C \cos(2\theta) & -C \\ \frac{3}{2}A \cos(2\theta) + (5 - 6 \cos^2(2\theta))C & -\frac{A}{4} + C \cos(2\theta) \\ \frac{3}{2}B \cos(2\theta) + (-5 + 6 \cos^2(2\theta))D & -\frac{B}{4} - D \cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{A}{4} - C \cos(2\theta) & \frac{A}{4} - C \cos(2\theta) \\ \frac{B}{4} + D \cos(2\theta) & -\frac{B}{4} - D \cos(2\theta) \\ \frac{3}{4}B + D \cos(2\theta) & \frac{3}{4}B + D \cos(2\theta) \\ \frac{3}{4}A - C \cos(2\theta) & -\frac{3}{4}A + C \cos(2\theta) \\ C & -C \\ D & D \end{pmatrix}$$

とする.

$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$ を行列の基本変形で簡単な型にすると (基本変形の手順は第8節を参照されたい), $\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' \end{pmatrix}$ を得る. ただし,

$$X' = \begin{pmatrix} A(AD+BC)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(AD+BC)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AD+BC & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2C(AD+BC) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A(AD+BC)^2 + \frac{1}{8}A(-AD+BC)^2 \\ (AD+BC)^2 \cos(2\theta) + \frac{1}{4}AB(-AD+BC) \\ \frac{1}{2}(-AD+BC) \\ (AB + (AD-BC) \cos(2\theta))C \\ \frac{1}{16}AC(3AD+BC)[-B(A^2+16C^2 \sin^2(2\theta)) + 8(AD+BC)(A \cos(2\theta) + 4C \sin^2(2\theta))] \\ -\frac{1}{16}BD(AD+3BC)[A(B^2+16D^2 \sin^2(2\theta)) + 8(AD+BC)(B \cos(2\theta) - 4D \sin^2(2\theta))] \end{pmatrix},$$

$$Z' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A(AD+BC)(-AD+BC) \\ AB(AD+BC) \\ AD+BC \\ 0 \\ \frac{1}{4}AC(AD+BC)[B(A^2+16C^2 \sin^2(2\theta)) - 8(AD+BC)(A \cos(2\theta) + 4C \sin^2(2\theta))] \\ -\frac{1}{4}BD(AD+BC)[A(B^2+16D^2 \sin^2(2\theta)) + 8(AD+BC)(B \cos(2\theta) - 4D \sin^2(2\theta))] \end{pmatrix}$$

となる.

したがって, (13) が自明でない解をもつための必要十分条件は,

$$A(B^2 + 16D^2 \sin^2(2\theta)) + 8(AD + BC)(B \cos(2\theta) - 4D \sin^2(2\theta)) = 0 \quad (14)$$

または,

$$B(A^2 + 16C^2 \sin^2(2\theta)) - 8(AD + BC)(A \cos(2\theta) + 4C \sin^2(2\theta)) = 0 \quad (15)$$

である.

注意 4. $\theta \mapsto \pi/2 - \theta$ なる変換を行うと

$$A \longleftrightarrow B, \quad C \longleftrightarrow D, \quad \cos(2\theta) \longleftrightarrow -\cos(2\theta)$$

となる．したがって，(14) と (15) は互いに入れ替わる．(14) を満たす θ は $\theta_1 = 0.65\dots$ であり，(15) を満たす θ は $\theta_2 = 0.91\dots$ である．この θ の値は $\theta = \pi/4$ を中心に対称である．この θ_i の存在証明は第7節に譲る．

(14) の場合， $\alpha_3 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) とおくと，

$$\begin{aligned}
 \omega &= -\frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\alpha_3\frac{dz}{w} - \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\overline{\alpha_3}\frac{dz}{w^3} + \alpha_3\frac{z}{w^3}dz \\
 &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{\alpha_3 w^3}dz + \frac{AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\alpha_3\frac{z^3}{w^3}dz \\
 &+ \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\overline{\alpha_3}\frac{z^4}{w^3}dz \\
 &= \alpha\left(-\frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} - \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \right. \\
 &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\
 &+ \left. \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz\right) \\
 &+ i\beta\left(-\frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} + \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \right. \\
 &- \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\
 &- \left. \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz\right).
 \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &:= -\frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} - \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \\
 &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\
 &+ \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz, \\
 \omega_2 &:= i\left(-\frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} + \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \right. \\
 &- \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\
 &- \left. \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz\right)
 \end{aligned}$$

として,

$$u_1 := \left\langle \Re \begin{pmatrix} \int_{p_0}^p (1-z^2)\omega_1 \\ \int_{p_0}^p i(1+z^2)\omega_1 \\ \int_{p_0}^p 2z\omega_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$u_2 := \left\langle \Re \begin{pmatrix} \int_{p_0}^p (1-z^2)\omega_2 \\ \int_{p_0}^p i(1+z^2)\omega_2 \\ \int_{p_0}^p 2z\omega_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

とおくと, これが extra eigenfunction になる.

(15) の場合, $\alpha_3 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\alpha_3\frac{dz}{w} + \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\overline{\alpha_3}\frac{dz}{w^3} + \alpha_3\frac{z}{w^3}dz \\ &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\overline{\alpha_3}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{-AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\alpha_3\frac{z^3}{w^3}dz \\ &- \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\overline{\alpha_3}\frac{z^4}{w^3}dz \\ &= \alpha \left(-\frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} + \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \right. \\ &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{-AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\ &\left. - \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz \right) \\ &+ i\beta \left(-\frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} - \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \right. \\ &- \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{-AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\ &\left. + \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \omega_3 &:= -\frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w} + \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)}\frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3}dz \\ &+ \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^2}{w^3}dz + \frac{-AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)}\frac{z^3}{w^3}dz \\ &- \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)}\frac{z^4}{w^3}dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_4 := & i \left(-\frac{3AD+BC}{4(AD+BC)} \frac{dz}{w} - \frac{3AD+BC}{4(AD+BC)} \frac{dz}{w^3} + \frac{z}{w^3} dz \right. \\ & - \frac{AB+(AD-BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)} \frac{z^2}{w^3} dz + \frac{-AB+2(AD+BC)\cos(2\theta)}{2(AD+BC)} \frac{z^3}{w^3} dz \\ & \left. + \frac{AD+3BC}{4(AD+BC)} \frac{z^4}{w^3} dz \right)\end{aligned}$$

として,

$$\begin{aligned}u_3 := & \left\langle \Re \begin{pmatrix} \int_{p_0}^p (1-z^2)\omega_3 \\ \int_{p_0}^p i(1+z^2)\omega_3 \\ \int_{p_0}^p 2z\omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} \right\rangle, \\ u_4 := & \left\langle \Re \begin{pmatrix} \int_{p_0}^p (1-z^2)\omega_4 \\ \int_{p_0}^p i(1+z^2)\omega_4 \\ \int_{p_0}^p 2z\omega_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

とおくと, これが $\mathfrak{s}$ extra eigenfunction になる.

以上により,

定理 5 ([NS]). $\theta = \theta_1 (= 0.65\dots)$ および $\theta = \theta_2 (= 0.91\dots)$ にて $\text{nul}(g_\theta) = 5 (= 3 + 2)$ となる. また, *extra eigenfunction* は, $\theta = \theta_1$ のときは u_1 と u_2 , $\theta = \theta_2$ のときは u_3 と u_4 である. それ以外の θ では $\text{nul}(g_\theta) = 3$ となる.

4 Extra eigenfunction の対称性

[JLNNP] における s_1, s_2, s_3 なる変換を B_θ に適用すると,

$$s_1(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}), \quad s_2(z, w) = (-\bar{z}, i\bar{w}), \quad s_3(z, w) = (1/\bar{z}, \bar{w}/\bar{z}^3)$$

となる. また, 直接計算によって

$$s_1 \circ s_3 = s_3 \circ s_1, \quad s_2 \circ s_3 = s_3 \circ s_2, \quad s_2 \circ s_1 = j \circ s_1 \circ s_2$$

を得る. 以下では, 特に, s_1, s_3, j の extra eigenfunction への作用を考える.

今, 基点を $p_0 = (1, \sqrt{2+2\cos 2\theta})$ とする.

補題 6. $\theta = \theta_1$ において,

$$\begin{aligned} s_1^* u_1 &= u_1, & s_3^* u_1 &= u_1, & s_1^* u_2 &= -u_2, & s_3^* u_2 &= u_2, \\ j^* u_i &= -u_i + \langle c_i, N \rangle \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

ここで, $c_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2$) であり, N は X_{ω_i} の単位法線ベクトル場である. また, $\theta = \theta_2$ において,

$$\begin{aligned} s_1^* u_3 &= u_3, & s_3^* u_3 &= -u_3, & s_1^* u_4 &= -u_4, & s_3^* u_4 &= -u_4, \\ j^* u_i &= -u_i + \langle c_i, N \rangle \quad (i = 3, 4), \end{aligned}$$

ここで, $c_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 3, 4$) であり, N は X_{ω_i} の単位法線ベクトル場である.

Proof. $u_i = \langle X_{\omega_i}, N \rangle$ であり, 単位法線ベクトル場は

$$N = {}^t \left(\frac{2\Re g_{\theta_i}}{|g_{\theta_i}|^2 + 1}, \frac{2\Im g_{\theta_i}}{|g_{\theta_i}|^2 + 1}, \frac{|g_{\theta_i}|^2 - 1}{|g_{\theta_i}|^2 + 1} \right)$$

で表されることに注意する.

$$\begin{aligned} s_1^* \omega_1 &= \overline{\omega_1}, & s_1^* \omega_2 &= -\overline{\omega_2}, & s_1^* \omega_3 &= \overline{\omega_3}, & s_1^* \omega_4 &= -\overline{\omega_4}, \\ s_1^* \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ i(1 + z^2) \\ 2z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ i(1 + z^2) \\ 2z \end{pmatrix}}, \\ s_1^* \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2 - 1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2 - 1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, $s_1(p_0) = p_0$ であることから,

$$s_1^* u_1 = u_1, \quad s_1^* u_2 = -u_2, \quad s_1^* u_3 = u_3, \quad s_1^* u_4 = -u_4$$

を得る.

また, $\psi(z, w) = (1/z, w/z^3)$ に対して,

$$\begin{aligned} \psi^* \left(\frac{dz}{w} \right) &= -\frac{z}{w} dz = -\frac{z^2(z^4 + 2\cos(2\theta)z^2 + 1)}{w^3} dz, \\ \psi^* \left(\frac{dz}{w^3} \right) &= -\frac{z^7}{w^3} dz = -\frac{z^2(w^2 - 2\cos(2\theta)z^3 - z)}{w^3} dz, \\ \psi^* \left(\frac{z}{w^3} \right) dz &= -\frac{z^6}{w^3} dz, & \psi^* \left(\frac{z^2}{w^3} \right) dz &= -\frac{z^5}{w^3} dz, \\ \psi^* \left(\frac{z^3}{w^3} \right) dz &= -\frac{z^4}{w^3} dz, & \psi^* \left(\frac{z^4}{w^3} \right) dz &= -\frac{z^3}{w^3} dz \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
\psi^* \omega_1 &= \frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(z^4 + 2 \cos(2\theta)z^2 + 1)}{w^3} dz \\
&+ \frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(w^2 - 2 \cos(2\theta)z^3 - z)}{w^3} dz - \frac{z^6}{w^3} dz \\
&- \frac{AB + (AD - BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^5}{w^3} dz \\
&- \frac{AB + 2(AD + BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^4}{w^3} dz - \frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^3}{w^3} dz \\
&= -z^2 \omega_1, \\
\psi^* \omega_2 &= i \left(\frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(z^4 + 2 \cos(2\theta)z^2 + 1)}{w^3} dz \right. \\
&- \frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(w^2 - 2 \cos(2\theta)z^3 - z)}{w^3} dz - \frac{z^6}{w^3} dz \\
&+ \frac{AB + (AD - BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^5}{w^3} dz \\
&- \left. \frac{AB + 2(AD + BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^4}{w^3} dz + \frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^3}{w^3} dz \right) \\
&= z^2 \omega_2, \\
\psi^* \omega_3 &= \frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(z^4 + 2 \cos(2\theta)z^2 + 1)}{w^3} dz \\
&- \frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(w^2 - 2 \cos(2\theta)z^3 - z)}{w^3} dz - \frac{z^6}{w^3} dz \\
&- \frac{AB + (AD - BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^5}{w^3} dz \\
&- \frac{-AB + 2(AD + BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^4}{w^3} dz + \frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^3}{w^3} dz \\
&= z^2 \omega_3, \\
\psi^* \omega_4 &:= i \left(\frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(z^4 + 2 \cos(2\theta)z^2 + 1)}{w^3} dz \right. \\
&+ \frac{3AD + BC}{4(AD + BC)} \frac{z^2(w^2 - 2 \cos(2\theta)z^3 - z)}{w^3} dz - \frac{z^6}{w^3} dz \\
&+ \left. \frac{AB + (AD - BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^5}{w^3} dz \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{-AB + 2(AD + BC) \cos(2\theta)}{2(AD + BC)} \frac{z^4}{w^3} dz - \frac{AD + 3BC}{4(AD + BC)} \frac{z^3}{w^3} dz \Big) \\
& = -z^2 \omega_4
\end{aligned}$$

となる。さらに,

$$\begin{aligned}
\psi^* \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ i(1 + z^2) \\ 2z \end{pmatrix} &= \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - z^2 \\ i(1 + z^2) \\ 2z \end{pmatrix}, \\
\psi^* \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\Re z}{1+|z|^2} \\ \frac{2\Im z}{1+|z|^2} \\ \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。これらと $\psi(p_0) = p_0$ により,

$$\psi^* u_1 = u_1, \quad \psi^* u_2 = -u_2, \quad \psi^* u_3 = -u_3, \quad \psi^* u_4 = u_4.$$

$s_3 = \psi \circ s_1$ なので,

$$\begin{aligned}
s_3^* u_1 &= (s_1^* \circ \psi^*) u_1 = u_1, & s_3^* u_2 &= (s_1^* \circ \psi^*) u_2 = u_2, \\
s_3^* u_3 &= (s_1^* \circ \psi^*) u_3 = -u_3, & s_3^* u_4 &= (s_1^* \circ \psi^*) u_4 = -u_4
\end{aligned}$$

を得る。

次に, j による作用を考える。 $j^* \omega_i = -\omega_i$ ($1 \leq i \leq 4$) が成り立ち, そして

$$j^* \begin{pmatrix} 1 - g_{\theta_i}^2 \\ i(1 + g_{\theta_i}^2) \\ 2g_{\theta_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - g_{\theta_i}^2 \\ i(1 + g_{\theta_i}^2) \\ 2g_{\theta_i} \end{pmatrix}, \quad j^* N = N$$

が成り立つ。よって,

$$\begin{aligned}
j^* u_1(p) &= \left\langle \Re \int_{j(p_0)}^{j(p)} \begin{pmatrix} 1 - g_{\theta_1}^2 \\ i(1 + g_{\theta_1}^2) \\ 2g_{\theta_1} \end{pmatrix} \omega_1, N(j(p)) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \Re \int_{p_0}^{j(p_0)} \begin{pmatrix} 1 - g_{\theta_1}^2 \\ i(1 + g_{\theta_1}^2) \\ 2g_{\theta_1} \end{pmatrix} \omega_1, N(j(p)) \right\rangle \\
&= -u_1(p) + \langle c_1, N(p) \rangle,
\end{aligned}$$

ここで, $c_1 = \Re \int_{p_0}^{j(p_0)} t(1 - g_{\theta_1}^2, i(1 + g_{\theta_1}^2), 2g_{\theta_1}) \omega_1$ である. 同様にすれば, $j^*u_i = -u_i + \langle c_i, N \rangle$ ($2 \leq i \leq 4$) を得る.

以上により補題が示された. $\square$

$j \circ s_1$ と $j \circ s_3$ の extra eigenfunction への作用を線形の情報のみにするため, extra eigenfunction を次のように取り替える:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - (j \circ s_1)^*u_1 - (j \circ s_3)^*u_1 + (j \circ s_1)^* \circ (j \circ s_3)^*u_1, \\ v_2 &= u_2 + (j \circ s_1)^*u_2 - (j \circ s_3)^*u_2 - (j \circ s_1)^* \circ (j \circ s_3)^*u_2, \\ v_3 &= u_3 - (j \circ s_1)^*u_3 + (j \circ s_3)^*u_3 - (j \circ s_1)^* \circ (j \circ s_3)^*u_3, \\ v_4 &= u_4 + (j \circ s_1)^*u_4 + (j \circ s_3)^*u_4 + (j \circ s_1)^* \circ (j \circ s_3)^*u_4. \end{aligned}$$

このとき, 補題 6 から, 以下が成り立つ.

補題 7.

$$\begin{aligned} s_1^*v_1 &= v_1, & (j \circ s_1)^*v_1 &= -v_1, & s_3^*v_1 &= v_1, & (j \circ s_3)^*v_1 &= -v_1, \\ s_1^*v_2 &= -v_2, & (j \circ s_1)^*v_2 &= v_2, & s_3^*v_2 &= v_2, & (j \circ s_3)^*v_2 &= -v_2, \\ s_1^*v_3 &= v_3, & (j \circ s_1)^*v_3 &= -v_3, & s_3^*v_3 &= -v_3, & (j \circ s_3)^*v_3 &= v_3, \\ s_1^*v_4 &= -v_4, & (j \circ s_1)^*v_4 &= v_4, & s_3^*v_4 &= -v_4, & (j \circ s_3)^*v_4 &= v_4. \end{aligned}$$

5 各 s_j の不動点集合

まず, s_1 と $j \circ s_1$ の不動点集合は,

$$\begin{aligned} s_1(z, w) &= (z, w) \iff (z, w) = (\bar{z}, \bar{w}) \\ &\iff z = t \in \mathbb{R} \text{ and } w(t)^2 = t \underbrace{(t^4 + 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}_{=(t^2 + \cos(2\theta))^2 + \sin^2(2\theta) \geq 0} \geq 0 \\ &\iff z = t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ (j \circ s_1)(z, w) &= (z, -w) \iff (z, -w) = (\bar{z}, \bar{w}) \\ &\iff z = t \in \mathbb{R} \text{ and } w(t)^2 = t \underbrace{(t^4 + 2\cos(2\theta)t^2 + 1)}_{=(t^2 + \cos(2\theta))^2 + \sin^2(2\theta) \geq 0} \leq 0 \\ &\iff z = t \in \mathbb{R}_{\leq 0} \end{aligned}$$

である.

次に, s_3 と $j \circ s_3$ の不動点集合は, $w^2/z^3 = z^2 + 1/z^2 + 2\cos(2\theta)$ から,

$$s_3(z, w) = (z, w) \iff (z, w) = \left(\frac{1}{z}, \frac{\bar{w}}{z^3}\right) \iff |z| = 1 \text{ and } \frac{w}{z^{\frac{3}{2}}} = \overline{\left(\frac{w}{z^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

$$\iff z = e^{it} \text{ and } \frac{w(t)^2}{e^{3it}} = 2(\cos(2t) + \cos(2\theta)) \geq 0$$

$$\iff z = e^{it} \text{ and } t \in \left[-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} - \theta\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{3}{2}\pi - \theta\right],$$

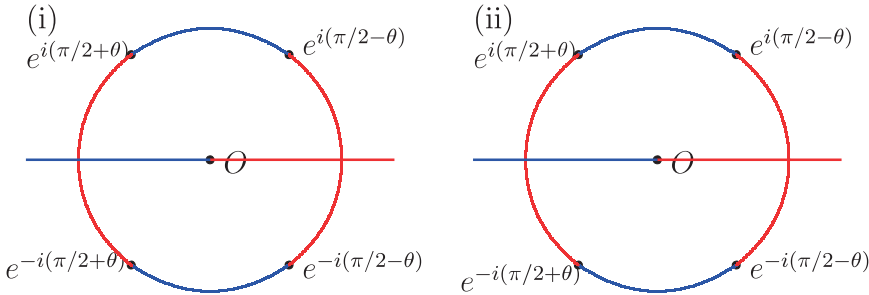
$$(j \circ s_3)(z, w) = (z, w) \iff (z, w) = \left(\frac{1}{z}, -\frac{\bar{w}}{z^3}\right)$$

$$\iff z = e^{it} \text{ and } \frac{w(t)^2}{e^{3it}} = 2(\cos(2t) + \cos(2\theta)) \leq 0$$

$$\iff z = e^{it} \text{ and } t \in \left[\frac{\pi}{2} - \theta, \frac{\pi}{2} + \theta\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2} - \theta, -\frac{\pi}{2} + \theta\right]$$

となる.

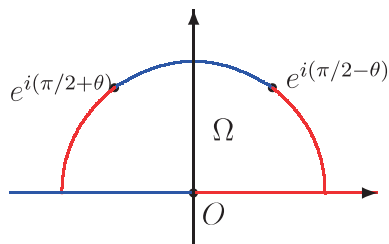
下図において, 単位円周上の赤線が s_3 の不動点集合であり, 青線が $j \circ s_3$ の不動点集合である. また, 実軸上の赤線が s_1 の不動点集合であり, 青線が $j \circ s_1$ の不動点集合である.



6 $\theta = \theta_1, \theta_2$ における固有値の挙動

j, s_1, s_3 によって生成される群は位数 8 の abel 群になる. これを B_θ に作用させたときの基本領域を Ω とすると, 図 1 のようになる.

Ω には標準計量 ds_{S^2} が入っており, これの Laplacian の固有値を考える. v_i ($1 \leq i \leq 4$) を Ω 上の関数と見る. 補題 7 により, v_i ($1 \leq i \leq 2$) においては共に実軸の半直線と, 単位円周上の青線が零点集合となっている. v_i ($3 \leq i \leq 4$) においては共に実軸の半直線と, 単位円周上の赤線が零点集合となっている. θ を 0 から $\pi/4$ まで動かすと, v_i ($1 \leq i \leq 2$)

図 1: 基本領域 Ω

に対しては零点集合が単調増加していき, v_i ($3 \leq i \leq 4$) に対しては零点集合が単調減少していくことが判る. 固有値の Min-Max 原理による特徴付けから, このとき固有値は, v_i ($1 \leq i \leq 2$) の場合は単調増加し, v_i ($3 \leq i \leq 4$) の場合は単調減少する. したがって, v_i ($1 \leq i \leq 2$) によって誘導される重複度 2 の 2 固有値は $\theta = \theta_1$ を境に 2 を越える固有値へと増加し, v_i ($3 \leq i \leq 4$) によって誘導される重複度 2 の 2 固有値は $\theta = \theta_2$ を境に 2 よりも小さい固有値へと減少する.

以上により, 次が導かれる:

定理 8.

$$\text{ind}(g_\theta) = \begin{cases} 3, & 0 < \theta < \theta_1, \\ 1, & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ 3, & \theta_2 < \theta < \pi/2. \end{cases} \quad (16)$$

これにより主結果が証明され, Jakobson, Levitin, Nadirashvili, Nigam, Polterovich による予想に対する肯定的解決を得る.

7 θ_1, θ_2 の存在について

$\theta_2 = \pi/2 - \theta_1$ ゆえ, (14) を満たす θ が θ_1 のみであることを示せば十分である. (14) の左辺は, $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ のときは負になり, $\theta \rightarrow 0$ のときは正となる (証明は後述する). このことから, 中間値の定理により, (14) を満たす $\theta \in (0, \pi/4)$ が少なくとも一つある. 前節の議論から, この地点を境に Morse 指数が二つ減る. よって, もし (14) を満たす θ が二つ以上あるときは, Morse 指数が -1 以下になるので矛盾が生じる. したがって, (14) を満たす θ は θ_1 のみとなる.

$\theta \rightarrow 0$ のときに (14) の左辺が正になるのは容易に示せるので, 以下では $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ のときに (14) の左辺が負になることを示す.

7.1 完全楕円積分による書き替え

まず, 上の A , B , C , D を完全楕円積分で書き直す. $0 < k < 1$ に対して

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

とおき, $K(k)$ を第一種完全楕円積分, $E(k)$ を第二種完全楕円積分という. Mathematica では $K(k)$ および $E(k)$ を $K(k^2)$ および $E(k^2)$ としているので注意を要する.

[BF] の 222 から,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(t^4 + 2 \cos(2\theta)t^2 + 1)}} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t dt}{\sqrt{t(t^4 + 2 \cos(2\theta)t^2 + 1)}} \\ &\stackrel{x=\sqrt{t}-1/\sqrt{t}}{=} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 2 + 2 \cos 2\theta}} = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 2 + 2 \cos 2\theta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \sin \theta)}} K \left(\sqrt{\frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta}} \right), \\ B &= 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 2 - 2 \cos 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} K \left(\sqrt{\frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right), \\ C &= 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 2 + 2 \cos 2\theta}^3} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2(1 + \sin \theta)} \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)} \\ &\quad \times \left(E \left(\sqrt{\frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta}} \right) - (1 - \sin \theta) K \left(\sqrt{\frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta}} \right) \right), \\ D &= 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 2 - 2 \cos 2\theta}^3} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)} \\ &\quad \times \left(E \left(\sqrt{\frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right) - (1 - \cos \theta) K \left(\sqrt{\frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \right) \right) \end{aligned}$$

となる.

(14) は

$$\cos 2\theta(AB^2 \cos 2\theta + 8ABD + 8B^2C) + \sin^2 2\theta(AB^2 - 16AD^2 - 32BCD) = 0$$

と同値である． よって， $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ にて

$$AB^2 \cos 2\theta + 8ABD + 8B^2C > 0, \quad AB^2 - 16AD^2 - 32BCD < 0$$

が同時に満たされれば (14) の左辺は $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ において負の値をとることが判る．

後々の議論のために， $k^2 = 2 \sin \theta / (1 + \sin \theta)$ ， $l^2 = 2 \cos \theta / (1 + \cos \theta)$ とおいておく． このとき，

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{k^2}{2 - k^2}, \quad 1 - \sin \theta = \frac{2(1 - k^2)}{2 - k^2}, \quad \cos \theta = \frac{l^2}{2 - l^2}, \\ 1 - \cos \theta &= \frac{2(1 - l^2)}{2 - l^2}, \quad k^4 l^4 = 16(1 - k^2)(1 - l^2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

7.2 $AB^2 \cos 2\theta + 8ABD + 8B^2C > 0$ の証明

$AB^2 \cos 2\theta + 8ABD + 8B^2C > 0$ は次の補題から従う．

補題 9. $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ に対して， $A \cos 2\theta + 8C > 0$ が成り立つ．

Proof.

$$\begin{aligned} A \cos 2\theta + 8C &= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \sin \theta)} \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)} \\ &\quad \times (E(k) + (\cos 2\theta \sin^2 \theta - 1)(1 - \sin \theta)K(k)) \end{aligned}$$

である． ここで，

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2(\sqrt{2} - 1) \leq k^2 < 1$$

であり， $A \cos 2\theta + 8C > 0$ は

$$E(k) + \frac{4(-k^8 + 2k^6 - 10k^4 + 16k^2 - 8)}{(2 - k^2)^5} \cdot (1 - k^2)K(k) > 0$$

と同値である.

[BF] の **710.02** と **710.04** から,

$$\frac{d}{dk}E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \quad \frac{d}{dk}((1 - k^2)K(k)) = \frac{dE(k)}{dk} - kK(k)$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dk} \left(E(k) + \frac{4(-k^8 + 2k^6 - 10k^4 + 16k^2 - 8)}{(2 - k^2)^5} \cdot (1 - k^2)K(k) \right) \\ &= \frac{E(k) - K(k)}{k} - \frac{8k(k^8 + 4k^6 + 18k^4 - 24k^2 + 8)}{(2 - k^2)^6} \cdot (1 - k^2)K(k) \\ & \quad + \frac{4(-k^8 + 2k^6 - 10k^4 + 16k^2 - 8)}{(2 - k^2)^5} \left(\frac{E(k) - K(k)}{k} - kK(k) \right) \\ &= \frac{k(k^8 - 6k^6 + 32k^4 - 40k^2 + 16)}{(2 - k^2)^5} (K(k) - E(k)) \\ & \quad + \frac{4k^3(k^4 + 4k^2 - 4)(k^4 + 6k^2 - 6)}{(2 - k^2)^6} K(k) \\ & \left(= \frac{k(k^8 + 6k^4(1 - k^2) + k^4 + (5k^2 - 4)^2)}{(2 - k^2)^5} (K(k) - E(k)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{4k^3(k^4 + 4k^2 - 4)(k^4 + 6k^2 - 6)}{(2 - k^2)^6} K(k) \right) \\ &= \frac{k}{(2 - k^2)^6} ((2 - k^2)(k^8 - 6k^6 + 32k^4 - 40k^2 + 16)(K(k) - E(k)) \\ & \quad + 4k^2(k^4 + 4k^2 - 4)(k^4 + 6k^2 - 6)K(k)) \end{aligned}$$

を得る. したがって, $\sqrt{15} - 3 \leq k^2 < 1$ ではこの値は無条件に正となる.

また, $2(\sqrt{2} - 1) \leq k^2 < \sqrt{15} - 3$ では

$$\begin{aligned} & (2 - k^2)(k^8 - 6k^6 + 32k^4 - 40k^2 + 16)(K(k) - E(k)) \\ & \quad + 4k^2(k^4 + 4k^2 - 4)(k^4 + 6k^2 - 6)K(k) \\ & \geq \lim_{k^2 \rightarrow 2(\sqrt{2}-1)} (2 - k^2)(k^8 - 6k^6 + 32k^4 - 40k^2 + 16)(K(k) - E(k)) \\ & \quad - 0.1 \cdot K \left(\sqrt{\sqrt{15} - 3} \right) \\ & > (7424 - 5248\sqrt{2})(K(\sqrt{0.82}) - E(\sqrt{0.82})) - 0.1 \cdot K(\sqrt{0.88}) \\ & > 2.2(2.305232 - 1.164798) - 0.1 \cdot 2.492635 = 2.25969 > 0 \end{aligned}$$

となる ([BF] の p. 324 にある表を参照のこと). 実際, $f(x) = (2-x)(x^4 - 6x^3 + 32x^2 - 40x + 16)$ とおくと, $2(\sqrt{2}-1) \leq x < 1$ にて $f(x)$ は単調増加となる. また, [BF] の 710.05 から

$$\frac{d}{dk}(K(k) - E(k)) = \frac{kE(k)}{1-k^2} > 0$$

ゆえ, $K(k) - E(k)$ は単調増加である.

以上により, $2(\sqrt{2}-1) \leq k^2 < 1$ にて,

$$\frac{d}{dk} \left(E(k) + \frac{4(-k^8 + 2k^6 - 10k^4 + 16k^2 - 8)}{(2-k^2)^5} \cdot (1-k^2)K(k) \right) > 0$$

を得る. このことから, $2(\sqrt{2}-1) \leq k^2 < 1$ において,

$$\begin{aligned} & E(k) + \frac{4(-k^8 + 2k^6 - 10k^4 + 16k^2 - 8)}{(2-k^2)^5} \cdot (1-k^2)K(k) \\ & \geq E\left(\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right) - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}K\left(\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right) \\ & > E(\sqrt{0.82}) - 0.3K(\sqrt{0.83}) = 1.164798 - 0.3 \cdot 2.331409 = 0.465375 > 0 \end{aligned}$$

となる ([BF] の p. 324 にある表を参照のこと). □

7.3 $AB^2 - 16AD^2 - 32BCD < 0$ の証明

$AB^2 - 16AD^2 - 32BCD < 0$ を示すには,

$$AB^2 - 16AD^2 - 32BCD$$

$$= \begin{cases} A\left(B - \frac{192}{25}D\right)\left(B + \frac{25}{12}D\right) + BD\left(\frac{1679}{300}A - 32C\right) & (\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/16) \\ A(B - 10D)\left(B + \frac{8}{5}D\right) + BD\left(\frac{42}{5}A - 32C\right) & (5\pi/16 \leq \theta \leq 3\pi/8) \\ A(B - 16D)(B + D) + BD(15A - 32C) & (3\pi/8 \leq \theta < \pi/2) \end{cases}$$

ゆえ,

$$25B - 192D < 0 \quad (\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/16), \quad (17)$$

$$1679A - 9600C < 0 \quad (\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/16), \quad (18)$$

$$B - 10D < 0 \quad (5\pi/16 \leq \theta \leq 3\pi/8), \quad (19)$$

$$21A - 80C < 0 \quad (5\pi/16 \leq \theta \leq 3\pi/8), \quad (20)$$

$$B - 16D < 0 \quad (3\pi/8 \leq \theta < \pi/2), \quad (21)$$

$$15A - 32C < 0 \quad (3\pi/8 \leq \theta < \pi/2) \quad (22)$$

を示せばよい.

(17) の証明

$$\begin{aligned}
 25B - 192D &= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)} \\
 &\quad \times (25 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) K(l) - 24(E(l) - (1 - \cos \theta) K(l))), \\
 25 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) K(l) - 24(E(l) - (1 - \cos \theta) K(l)) \\
 &= \frac{2}{(2 - l^2)^3} ((49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3 E(l))
 \end{aligned}$$

である. このことから,

$$0.714298 \approx \frac{2 \cos \frac{5}{16}\pi}{1 + \cos \frac{5}{16}\pi} \leq l^2 \leq \frac{2 \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} \approx 0.828427$$

なる範囲で

$$(49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3 E(l) < 0$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dl} ((49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3 E(l)) \\
 &= (196l^3 - 192l)(1 - l^2)K(l) + (49l^4 - 96l^2 + 96) \left(\frac{E - K}{l} - lK \right) \\
 &\quad + 72l(2 - l^2)^2 E(l) - 12(2 - l^2)^3 \cdot \frac{E - K}{l} \\
 &= l(-(257l^4 - 507l^2 + 336)K(l) + (84l^4 - 311l^2 + 336)E(l))
 \end{aligned}$$

となる. $0.71 \leq l^2 \leq 0.83$ にて, $K(l)$ は正值単調増加, $257l^4 - 507l^2 + 336$, $84l^4 - 311l^2 + 336$, $E(l)$ の三つは正值単調減少である. ここで, $0.71 \leq l^2 \leq 0.83$ なる定義域を, $0.71 \leq l^2 \leq 0.81$, $0.81 \leq l^2 \leq 0.83$ に分けて評価する. $0.71 \leq l^2 \leq 0.81$ にて,

$$\begin{aligned}
 &- (257l^4 - 507l^2 + 336)K(l) + (84l^4 - 311l^2 + 336)E(l) \\
 &\leq -(257 \cdot 0.81^2 - 507 \cdot 0.81 + 336)K(\sqrt{0.71}) \\
 &\quad + (84 \cdot 0.71^2 - 311 \cdot 0.71 + 336)E(\sqrt{0.71}) \\
 &\approx -1.723 < 0
 \end{aligned}$$

であり, $0.81 \leq l^2 \leq 0.83$ にて,

$$\begin{aligned} & - (257l^4 - 507l^2 + 336)K(l) + (84l^4 - 311l^2 + 336)E(l) \\ & \leq - (257 \cdot 0.83^2 - 507 \cdot 0.83 + 336)K(\sqrt{0.81}) \\ & \quad + (84 \cdot 0.81^2 - 311 \cdot 0.81 + 336)E(\sqrt{0.81}) \\ & \approx -47.2487 < 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, $0.71 \leq l^2 \leq 0.83$ において,

$$\frac{d}{dl}((49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3E(l)) < 0$$

ゆえ,

$$(49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3E(l)$$

は単調減少関数となる. $K(l)$ が正値単調増加, $E(l)$ が正値単調減少であることに注意して $l^2 = 0.714$ での値で評価すると,

$$\begin{aligned} & (49l^4 - 96l^2 + 96)(1 - l^2)K(l) - 12(2 - l^2)^3E(l) \\ & \leq (49 \cdot 0.714^2 - 96 \cdot 0.714 + 96)(1 - 0.714)K(\sqrt{0.714}) \\ & \quad - 12(2 - 0.714)^3E(\sqrt{0.714}) \\ & \approx -0.0337104 < 0 \end{aligned}$$

となる.

以上により主張を得る.

(18) の証明.

$$\begin{aligned} 1679A - 9600C &= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \sin \theta)} \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)} \\ & \times (1679 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta) K(k) - 1200(E(k) - (1 - \sin \theta)K(k))), \\ 1679 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta) K(k) - 1200(E(k) - (1 - \sin \theta)K(k)) \\ &= \frac{2}{(2 - k^2)^3} ((2879k^4 - 4800k^2 + 4800)(1 - k^2)K(k) - 600(2 - k^2)^3E(k)) \end{aligned}$$

である. なお,

$$0.828427 \approx \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{1 + \sin \frac{\pi}{4}} \leq k^2 < 1$$

である.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dk}((2879k^4 - 4800k^2 + 4800)(1 - k^2)K(k) - 600(2 - k^2)^3E(k)) \\
 &= (4 \cdot 2879k^3 - 9600k)(1 - k^2)K(k) \\
 & \quad + (2879k^4 - 4800k^2 + 4800) \left(\frac{E - K}{k} - kK \right) \\
 & \quad + 3600k(2 - k^2)^2E(k) - 600(2 - k^2)^3 \cdot \frac{E - K}{k} \\
 &= k(-(14995k^4 - 26637k^2 + 16800)K(k) \\
 & \quad + (4200k^4 - 15121k^2 + 16800)E(k))
 \end{aligned}$$

となる. ここで, $0.82 \leq k^2 < 1$ において, $14995x^2 - 26637x + 16800$ は軸 $x = 26637/(2 \cdot 14995)$ にて最小値, $x = 1$ にて最大値をとる正值関数であり, $4200x^2 - 15121x + 16800$ は正值単調減少関数である. よって,

$$\begin{aligned}
 & -(14995k^4 - 26637k^2 + 16800)K(k) + (4200k^4 - 15121k^2 + 16800)E(k) \\
 & \leq - \left(14995 \cdot \left(\frac{26637}{2 \cdot 14995} \right)^2 - 26637 \cdot \frac{26637}{2 \cdot 14995} + 16800 \right) K(\sqrt{0.82}) \\
 & \quad + (4200 \cdot 0.82^2 - 15121 \cdot 0.82 + 16800)E(\sqrt{0.82}) \\
 & \approx -3042.79 < 0
 \end{aligned}$$

ゆえ, $(2879k^4 - 4800k^2 + 4800)(1 - k^2)K(k) - 600(2 - k^2)^3E(k)$ は単調減少である. $k^2 = 0.8284$ で評価して,

$$\begin{aligned}
 & (2879k^4 - 4800k^2 + 4800)(1 - k^2)K(k) - 600(2 - k^2)^3E(k) \\
 & \leq (2879 \cdot 0.8284^2 - 4800 \cdot 0.8284 + 4800)(1 - 0.8284)K(\sqrt{0.8284}) \\
 & \quad - 600(2 - 0.8284)^3E(\sqrt{0.8284}) \\
 & \leq (2879 \cdot 0.8284^2 - 4800 \cdot 0.8284 + 4800)(1 - 0.8284)K(\sqrt{0.8284}) \\
 & \quad - 600(2 - 0.8284)^3E(\sqrt{0.8284}) \\
 & \approx -0.371741 < 0
 \end{aligned}$$

となる.

以上により, 主張を得る.

(19) の証明.

$$B - 10D = \frac{1}{2\sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$\begin{aligned}
& \times (2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) K(l) - 5(E(l) - (1 - \cos \theta) K(l))), \\
& 2 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) K(l) - 5(E(l) - (1 - \cos \theta) K(l)) \\
& = \frac{1}{(2 - l^2)^3} (2(7l^4 - 20l^2 + 20)(1 - l^2) K(l) - 5(2 - l^2)^3 E(l))
\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dl} (2(7l^4 - 20l^2 + 20)(1 - l^2) K(l) - 5(2 - l^2)^3 E(l)) \\
& = 2(28l^3 - 40l)(1 - l^2) K(l) + 2(7l^4 - 20l^2 + 20) \left(\frac{E - K}{l} - lK \right) \\
& \quad + 30l(2 - l^2)^2 E(l) - 5(2 - l^2)^3 \cdot \frac{E - K}{l} \\
& = l(-(75l^4 - 192l^2 + 140) K(l) + (35l^4 - 136l^2 + 140) E(l))
\end{aligned}$$

となる.

ここで,

$$0.553537 \approx \frac{2 \cos \frac{3}{8} \pi}{1 + \cos \frac{3}{8} \pi} \leq l^2 \leq \frac{2 \cos \frac{5}{16} \pi}{1 + \cos \frac{5}{16} \pi} \approx 0.714298$$

である. なお, $0.55 \leq l^2 \leq 0.715$ において, $75l^4 - 192l^2 + 140$, $35l^4 - 136l^2 + 140$ は正値単調減少である.

$0.55 \leq l^2 \leq 0.715$ なる定義域を, $0.55 \leq l^2 \leq 0.58$, $0.58 \leq l^2 \leq 0.62$, $0.62 \leq l^2 \leq 0.66$, $0.66 \leq l^2 \leq 0.715$ に分けて考える. $0.55 \leq l^2 \leq 0.58$ にて,

$$\begin{aligned}
& -(75l^4 - 192l^2 + 140) K(l) + (35l^4 - 136l^2 + 140) E(l) \\
& \leq -(75 \cdot 0.58^2 - 192 \cdot 0.58 + 140) K(\sqrt{0.55}) \\
& \quad + (35 \cdot 0.55^2 - 136 \cdot 0.55 + 140) E(\sqrt{0.55}) \\
& \approx -1.87479 < 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. 次に, $0.58 \leq l^2 \leq 0.62$ にて,

$$\begin{aligned}
& -(75l^4 - 192l^2 + 140) K(l) + (35l^4 - 136l^2 + 140) E(l) \\
& \leq -(75 \cdot 0.62^2 - 192 \cdot 0.62 + 140) K(\sqrt{0.58}) \\
& \quad + (35 \cdot 0.58^2 - 136 \cdot 0.58 + 140) E(\sqrt{0.58}) \\
& \approx -0.589051 < 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．また， $0.62 \leq l^2 \leq 0.66$ にて，

$$\begin{aligned} & - (75l^4 - 192l^2 + 140)K(l) + (35l^4 - 136l^2 + 140)E(l) \\ & \leq - (75 \cdot 0.66^2 - 192 \cdot 0.66 + 140)K(\sqrt{0.62}) \\ & \quad + (35 \cdot 0.62^2 - 136 \cdot 0.62 + 140)E(\sqrt{0.62}) \\ & \approx -1.5945 < 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに， $0.66 \leq l^2 \leq 0.715$ にて，

$$\begin{aligned} & - (75l^4 - 192l^2 + 140)K(l) + (35l^4 - 136l^2 + 140)E(l) \\ & \leq - (75 \cdot 0.715^2 - 192 \cdot 0.715 + 140)K(\sqrt{0.66}) \\ & \quad + (35 \cdot 0.66^2 - 136 \cdot 0.66 + 140)E(\sqrt{0.66}) \\ & \approx -0.115848 < 0 \end{aligned}$$

ゆえ， $2(7l^4 - 20l^2 + 20)(1 - l^2)K(l) - 5(2 - l^2)^3E(l)$ は単調減少関数である． $l^2 = 0.55$ で評価すると，

$$\begin{aligned} & 2(7l^4 - 20l^2 + 20)(1 - l^2)K(l) - 5(2 - l^2)^3E(l) \\ & \leq 2(7 \cdot 0.55^2 - 20 \cdot 0.55 + 20)(1 - 0.55)K(\sqrt{0.55}) - 5(2 - 0.55)^3E(\sqrt{0.55}) \\ & \approx -1.19735 < 0 \end{aligned}$$

となることから，主張を得る．

(20) の証明．

$80/21 \approx 3.80952 > 3.8 = 19/5$ ゆえ， $5\pi/16 \leq \theta < \pi/2$ に対して， $5A - 19C < 0$ が成り立つことを示せばよい．

$$\begin{aligned} 5A - 19C &= \frac{1}{4\sqrt{2(1 + \sin \theta)} \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)} \\ & \quad \times (40 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta) K(k) - 19(E(k) - (1 - \sin \theta) K(k))), \\ &= \frac{1}{40 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta) K(k) - 19(E(k) - (1 - \sin \theta) K(k))} \\ &= \frac{1}{(2 - k^2)^3} (2(59k^4 - 76k^2 + 76)(1 - k^2)K(k) - 19(2 - k^2)^3E(k)) \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dk} (2(59k^4 - 76k^2 + 76)(1 - k^2)K(k) - 19(2 - k^2)^3E(k)) \\ &= 2(236k^3 - 152k)(1 - k^2)K(k) + 2(59k^4 - 76k^2 + 76) \left(\frac{E - K}{k} - kK \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 114k(2 - k^2)^2 E(k) - 19(2 - k^2)^3 \cdot \frac{E - K}{k} \\
& = k(-7(87k^4 - 132k^2 + 76)K(k) + (133k^4 - 452k^2 + 532)E(k))
\end{aligned}$$

となる.

ここで,

$$0.907981 \approx \frac{2 \sin \frac{5}{16} \pi}{1 + \sin \frac{5}{16} \pi} \leq k^2 < 1$$

である. なお, $0.9 \leq x < 1$ において, $87x^2 - 132x + 76$ は正值単調増加, $133x^2 - 452x + 532$ は正值単調減少である. よって,

$$\begin{aligned}
& -7(87k^4 - 132k^2 + 76)K(k) + (133k^4 - 452k^2 + 532)E(k) \\
& \leq -7(87 \cdot 0.9^2 - 132 \cdot 0.9 + 76)K(\sqrt{0.9}) \\
& \quad + (133 \cdot 0.9^2 - 452 \cdot 0.9 + 532)E(\sqrt{0.9}) \\
& \approx -242.015 < 0
\end{aligned}$$

ゆえ, $2(59k^4 - 76k^2 + 76)(1 - k^2)K(k) - 19(2 - k^2)^3 E(k)$ は単調減少関数となる. $k^2 = 0.907$ で評価すると,

$$\begin{aligned}
& 2(59k^4 - 76k^2 + 76)(1 - k^2)K(k) - 19(2 - k^2)^3 E(k) \\
& \leq 2(59 \cdot 0.907^2 - 76 \cdot 0.907 + 76)(1 - 0.907)K(\sqrt{0.907}) \\
& \quad - 19(2 - 0.907)^3 E(\sqrt{0.907}) \\
& \approx -0.247829 < 0
\end{aligned}$$

となることから, 主張を得る.

(21) の証明.

$$\begin{aligned}
B - 16D &= \frac{2}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta)} \\
&\quad \times (-2E(l) + (\cos^2 \theta + 2)(1 - \cos \theta)K(l))
\end{aligned}$$

である. ここで,

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \iff 0 < l^2 \leq 2(\sqrt{2} - 1)$$

であり, $B - 16D < 0$ は

$$-E(l) + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \cdot (1 - l^2)K(l) < 0$$

と同値である.

次に, [BF] の **710.02** と **710.04** から,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dl} \left(-E(l) + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \cdot (1 - l^2)K(l) \right) \\
 &= \frac{K(l) - E(l)}{l} + \frac{2l(3l^4 - 4l^2 + 8)}{(2 - l^2)^4} \cdot (1 - l^2)K(l) \\
 &\quad + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \left(\frac{E(l) - K(l)}{l} - lK(l) \right) \\
 &= \frac{l^2(l^4 - 3l^2 + 4)}{(2 - l^2)^3} \cdot \frac{E(l) - K(l)}{l} - \frac{3l^7}{(2 - l^2)^4} K(l) \\
 &= \frac{l^2((l^2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4})}{(2 - l^2)^3} \cdot \frac{E(l) - K(l)}{l} - \frac{3l^7}{(2 - l^2)^4} K(l) < 0
 \end{aligned}$$

を得る. したがって,

$$-E(l) + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \cdot (1 - l^2)K(l)$$

は単調減少であり,

$$\begin{aligned}
 & -E(l) + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \cdot (1 - l^2)K(l) \\
 & < \lim_{l \rightarrow 0} \left(-E(l) + \frac{3l^4 - 8l^2 + 8}{(2 - l^2)^3} \cdot (1 - l^2)K(l) \right) = -E(0) + K(0) \\
 & = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0
 \end{aligned}$$

となる. これにより主張を得る.

(22) の証明.

$$\frac{3}{8}\pi \leq \theta < \frac{\pi}{2} \iff (2 + \sqrt{2}) \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2} \right) \leq k^2 < 1$$

である. 次に,

$$15A - 32C = \frac{2((15 \sin^2 \theta + 4)(1 - \sin \theta)K(k(\theta)) - 4E(k(\theta)))}{\sqrt{2(1 + \sin \theta)} \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}$$

となる. これにより,

$$(15 \sin^2 \theta + 4)(1 - \sin \theta)K(k(\theta)) - 4E(k(\theta))$$

$$= \frac{2}{(2-k^2)^3}((19k^4 - 16k^2 + 16)(1-k^2)K(k) - 2(2-k^2)^3E(k)) < 0$$

を示すことが目標となる.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dk}(19k^4 - 16k^2 + 16) &= 2k(38k^2 - 16), \\ \frac{d}{dk}(1-k^2)K(k) &= \frac{E(k)}{k} - \frac{1+k^2}{k}K(k), \\ \frac{d}{dk}(2-k^2)^3 &= -6k(2-k^2)^2, \quad \frac{d}{dk}E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k}\end{aligned}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dk}((19k^4 - 16k^2 + 16)(1-k^2)K(k) - 2(2-k^2)^3E(k)) \\ = k(-97k^4 + 117k^2 - 56)K(k) + k(14k^4 - 41k^2 + 56)E(k) \\ = k((14k^4 - 41k^2 + 56)\underbrace{(-K(k) + E(k))}_{<0}) + k^2(76 - 83k^2)K(k)\end{aligned}$$

を得る.

ここで,

$$(2 + \sqrt{2}) \left(2\sqrt{2 + \sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2} \right) \approx 0.9604 \dots$$

である. $x = k^2$ とおき, $0.96 < x < 1$ において

$$14x^2 - 41x + 56 > 0, \quad 76 - 83x < 0$$

ゆえ,

$$\frac{d}{dk}((19k^4 - 16k^2 + 16)(1-k^2)K(k) - 2(2-k^2)^3E(k)) < 0$$

となる. これにより, $(19k^4 - 16k^2 + 16)(1-k^2)K(k) - 2(2-k^2)^3E(k)$ は減少関数になる. $k^2 = 0.96$ を代入して,

$$\begin{aligned}(19k^4 - 16k^2 + 16)(1-k^2)K(k) - 2(2-k^2)^3E(k) \\ = 0.726016 \cdot K(\sqrt{0.96}) - 2.24973 \cdot E(\sqrt{0.96}) \\ = 0.726016 \cdot 3.016112 - 2.24973 \cdot 1.050502 = -0.173598 < 0\end{aligned}$$

である. 以上により, $3\pi/8 \leq \theta < \pi/2$ にて $15A - 32C < 0$ となるゆえ, 主張を得る.

8 付録

付録では、行列の基本変形を用いて $\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} X' & Y' & Z' \end{pmatrix}$ を得る手順を与える．記述の簡易化のため、 $\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$ の j 行を R_j ($1 \leq j \leq 6$) で表すことにする．変形後の行列に対しても同じ記号 R_j を用いる．

- (i) $R_4 \longrightarrow R_4 - R_1.$
- (ii) $R_5 \longrightarrow R_5 + R_1 \times \cos 2\theta.$
- (iii) $R_3 \longrightarrow R_3 - R_2.$
- (iv) $R_6 \longrightarrow R_6 - R_2 \times \cos 2\theta.$
- (v) $R_5 \longrightarrow R_5 \times A + R_1 \times 4C \sin^2 2\theta.$
- (vi) $R_6 \longrightarrow R_6 \times B + R_2 \times 4D \sin^2 2\theta.$
- (vii) $R_2 \longrightarrow R_2 + R_3 \times 1/2.$
- (viii) $R_6 \longrightarrow R_6 + R_3 \times (-B \cos 2\theta + 2D \sin^2 2\theta).$
- (ix) $R_1 \longrightarrow R_1 + R_4 \times 1/2.$
- (x) $R_5 \longrightarrow R_5 + R_4 \times (A \cos 2\theta + 2C \sin^2 2\theta).$
- (xi) $R_2 \longrightarrow R_2 \times A + R_1 \times (-B).$
- (xii) $R_5 \longrightarrow R_5 \times C + R_4 \times (-A^2/8).$
- (xiii) $R_6 \longrightarrow R_6 \times D + R_3 \times (-B^2/8).$
- (xiv) $R_1 \longrightarrow R_1 \times (AD + BC) + R_2 \times C.$
- (xv) $R_3 \longrightarrow R_3 \times C + R_4 \times (-D).$
- (xvi) $R_5 \longrightarrow R_5 \times (AD + BC) + R_2 \times (A^2C/4 + 4C^3 \sin^2 2\theta).$
- (xvii) $R_6 \longrightarrow R_6 \times (AD + BC) + R_2 \times (-B^2D/4 - 4D^3 \sin^2 2\theta).$
- (xviii) $R_1 \longrightarrow R_1 \times (AD + BC) + R_3 \times A(-AD + BC)/4.$
- (xix) $R_2 \longrightarrow R_2 \times (AD + BC) + R_3 \times AB/2.$

- (xx) $R4 \longrightarrow R4 \times (AD + BC) + R3 \times (A - 2C \cos 2\theta)$.
- (xxi) $R5 \longrightarrow R5 \times (AD + BC) + R3 \times [-A^2(A^2D/8 + (AD + BC)C \cos 2\theta + 6C^2D \sin^2 2\theta) - 4ABC^3 \sin^2 2\theta]$.
- (xxii) $R6 \longrightarrow R6 \times (AD + BC) + R3 \times [-B^2(-B^2C/8 + (AD + BC)D \cos 2\theta - 6CD^2 \sin^2 2\theta) + 4ABD^3 \sin^2 2\theta]$.

参考文献

- [BF] P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Second edition, revised, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 67, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.
- [EK] N. Ejiri and M. Kotani, Index and flat ends of minimal surfaces, Tokyo J. Math. **16** (1993), no. 1, 37–48.
- [F] D. Fischer-Colbrie, On complete minimal surfaces with finite Morse index in three-manifolds, Invent. Math. **82** (1985), no. 1, 121–132.
- [Her] J. Hersch, Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A-B **270** (1970), A1645–A1648.
- [JLNNP] D. Jakobson, M. Levitin, N. Nadirashvili, N. Nigam, I. Polterovich, How large can the first eigenvalue be on a surface of genus two?, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 63, 3967–3985.
- [MR] S. Montiel and A. Ros, Schrödinger operators associated to a holomorphic map, in: Global differential geometry and global analysis (Berlin, 1990), Lecture Notes in Math. **1481**, Springer, Berlin, 1991, pp. 147–174.
- [M] H. Muto, The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres, Tôhoku. Math. Journ. **32** (1980), 427–432.

- [N] N. Nadirashvili, Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), no. 5, 877–897.
- [Nay] S. Nayatani, Morse index and Gauss maps of complete minimal surfaces in Euclidean 3-space, *Comment. Math. Helv.* **68** (1993), no. 4, 511–537.
- [NS] S. Nayatani and T. Shoda, *Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian*, arXiv:1704.06384.
- [O] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*. Second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1986.
- [T] S. Tanno, The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, *Tôhoku. Math. Journ.* **31** (1979), 179–185.
- [U] H. Urakawa, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), no. 1, 209–226.
- [YY] P. C. Yang and S. T. Yau, Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **7** (1980), no. 1, 55–63.