

Lorentz algebra について

九 大 理 太 田 昇 一

§1. 序

Indefinite な内積をもつ Hilbert space は J-space と、Minkowsky space とも言われ、その indefinite な内積による adjoint operation で hermitian や unitary な有界線型作用素は、古くからロシアにおいて研究されて来た。一方、最近になって、M. Tomita や S.V. Šul'man 等によって作用素理論的な考察がされて来た。しかし、現在までのところ何ら大きな成果は何もないようである。それは通常の v. Neuman 型 (or Kaplansky 型) の density 定理が成立しないことによる。この小論では、不変部分空間との間の関連を考察するが、表現論との関連、および通常の作用素環 (特に derivation) との関連もあるように思われる。

§2. Lorentz algebra

$\mathcal{A}_0$ を単位元をもつ C^* -algebra とする。 $\mathcal{A}_0$ の involution $*$ を明確に示すため $(\mathcal{A}_0, *)$ と示すことにする。 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{A}_0$ の Banach subalgebra で、ある involution φ をもつ Banach $*$ -algebra とする。 そのとき、 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{A}_0$ に関して Lorentz algebra (w.r.t $\mathcal{A}_0$) であるとは、

$\exists J (\text{unitary, hermitian}) \in \mathcal{A}_0$ $\therefore A^\varphi = J A^* J$ for all $A \in \mathcal{A}$ が成立することをいう。

この $\mathcal{A}$ を以後、 $(\mathcal{A}, \varphi; J)$ と書くことにする。

上の条件の下に、

$$U(\mathcal{A}, \varphi) \equiv \{x \in \mathcal{A} : x^\varphi x = x x^\varphi = 1\}$$

$$(\mathcal{A}_0, *)^+ \equiv \{x \in \mathcal{A}_0 : x \geq 0\}$$

$$H(\mathcal{A}, \varphi) \equiv \{x \in \mathcal{A} : x^\varphi = x\} \quad \text{と定義すると、}$$

定理 2.1

Lorentz algebra $(\mathcal{A}, \varphi; J)$ が $\mathcal{A}_0$ の involution $*$ で閉じているとする。 そのとき、 $A \in U(\mathcal{A}, \varphi)$ に対して、我々は次のような一意に決まる分解をもつ；

$$A = B \cdot C$$

$$\text{ここに、} \quad B \in U(\mathcal{A}, \varphi) \cap (\mathcal{A}_0, *)^+$$

$$C \in U(\mathcal{A}, \varphi) \cap U(\mathcal{A}_0, *) .$$

(証明) $A \in U(\mathcal{A}, \varphi)$ とする。 そのとき、

$$(A A^*)^\varphi = J A J \cdot J A^* J = (A^*)^{-1} (A)^{-1} = (A A^*)^{-1}$$

すなわち、 $AA^* \in \mathcal{U}(\mathcal{O}, \varphi) \cap (\mathcal{O}_0, *)^+$ 。ここで、仮定より、 $\mathcal{O}$ は involution $*$ で $(\mathcal{O}_0, *)$ の C^* -subalgebra に注意すると、スワフトル論より、 $(AA^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{O}$ で、 $J(AA^*)^{\frac{1}{2}}J = (AA^*)^{-\frac{1}{2}}$ 。ここで、 $B \equiv (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ 、 $C \equiv B^{-1}A$ とおくと、

$$C^*C = A^*B^{-1}B^{-1}A = A^*(AA^*)^{-1}A = 1, \text{ 同様に、} CC^* = 1 \text{ を得る。}$$

従って、 $B \in \mathcal{U}(\mathcal{O}, \varphi) \cap (\mathcal{O}_0, *)^+$ 、 $C \in \mathcal{U}(\mathcal{O}, \varphi) \cap \mathcal{U}(\mathcal{O}_0, *)$ 、又分解の一意性は、ほとんど明らかである。

次に Lorentz 環 $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ w.r.t $(\mathcal{O}_0, *)$ が C^* -Lorentz algebra であるとは、Lorentz algebra $(\mathcal{O}, \varphi)$ が Banach $*$ -algebra として、 C^* -条件を満たすときを言う。次の定理は、 C^* -Lorentz algebra を決定するものである。

定理 2.2

$(\mathcal{O}, \varphi; J)$ を Lorentz algebra w.r.t $(\mathcal{O}_0, *)$ とするとき、次の条件は同値である。

- (1) $(\mathcal{O}, \varphi)$ が C^* -Lorentz algebra.
- (2) $A^\varphi = A^*$ for all $A \in \mathcal{O}$.
- (3) $J \in \mathcal{O}'$ ($\mathcal{O}' : \mathcal{O}$ の commutant).
- (4) $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}_0$ の involution $*$ で閉じており、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ が hermitian.

(証明) 容易なので省略。

次に Lorentz algebra の例を与えるが、その前に J-space の概念が必要になるので、それを先に述べる。

$\mathcal{H}$ を Hilbert space, $(x|y)$ は通常の内積とする。 $[x|y]_\varphi$ を $\mathcal{H}$ 上の sesquilinear form とする。その時、 $[x|y]_\varphi$ が Minkowsky form であるというのは、次の条件 (i) (ii) を満たすときをいう；

$$(i) \quad [x|y]_\varphi = \overline{[y|x]_\varphi} \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{H},$$

$$(ii) \quad \|x\| = \sup \{ |[x|y]_\varphi| : \|y\| \leq 1 \} \quad \text{for all } x \in \mathcal{H}.$$

又 $[x|x]_\varphi$ が正と負の値をもつとき、 $[x|y]_\varphi$ は indefinite と言い、そうでないとき definite と言われる。

上のような Minkowsky form をもつ Hilbert space を J-space と呼ぶことにする。

次の補題は Riesz の定理より明らかであるが、基本的である。

補題 2.3

sesquilinear form $[x|y]_\varphi$ が Minkowsky form であるための必要十分条件は、ある一意的に hermitian, unitary 作用素 J が存在して、

$$[x|y]_\varphi = (Jx|y) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{H},$$
 となることである。

更に、上の Minkowsky form $[x|y]_\varphi$ が definite であるための必要十分条件は、 $J=1$ or -1 なることである。

例 1 $\mathcal{H}$ を J-space とする。 $\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の Banach subalgebra

とする。もしも、与えられた Minkowsky form $[x|y]_\varphi$ で定義される adjoint operation による involution φ で用いたものは、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に関する Lorentz algebra である。

実際、補題 2.3 より、 $\exists J$: unitary hermitian operator,

$$[Ax|y]_\varphi = (JAx|y) = (Jx|JA^*Jy) = [x|JA^*Jy]_\varphi \text{ for all } x, y \in \mathcal{H}.$$

従って、 $A^\varphi = JA^*J$ for all $A \in \mathcal{O}$.

ここで、定理 2.2 に関する次の系をもつ。

系 2.4

J -空間 $\mathcal{H}$ 上の Lorentz algebra $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で weakly dense とする。そのとき J -空間 $\mathcal{H}$ が definite であるための必要十分条件は、 $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が C^* -Lorentz algebra になることである。

§3. 不変部分空間

$\mathcal{H}$ を Minkowsky form $[x|y]_\varphi = (Jx|y)$ をもつ J -space とする。我々は、まず基本的な概念から始める。[J -space の用語、その他については [], [] 等を参照)。 $\mathcal{M}$ を subspace (閉いた) とする。

(i) $\mathcal{M}$ が J -nonnegative $\Leftrightarrow [x|x]_\varphi \geq 0$ for $\forall x \in \mathcal{M}$,

(ii) $\mathcal{M}$ が J -positive $\Leftrightarrow [x|x]_\varphi > 0$ for $\forall x \neq 0 \in \mathcal{M}$,

(iii) $\mathcal{M}$ が J -uniformly positive $\Leftrightarrow$ ある定数 $\gamma > 0$ が存在して

$$[x|x]_\varphi \geq \gamma \|x\|^2 \text{ for } \forall x \in \mathcal{M}.$$

(iv) (ii) (iii) と同様にして、 J -nonpositive, J -negative, J -uniformly negative

が定義される。さらに、subspace $\mathcal{M}$ が J -positive or J -negative の時 J -strongly definite, J -uniformly positive or J -uniformly negative の時、 J -uniformly definite であると言い、又、上のそれぞれの場合について、 $\mathcal{M}$ が maximal であるとは他の同じタイプの subspace に真に含まれることがないときを言う。

$\mathcal{M}^{[\perp]} \equiv \{x \in \mathcal{H} : [x|y]_J = 0 \text{ for all } x \in \mathcal{M}\}$ を $\mathcal{M}$ の J -orthogonal complement と言う。次の補題は明らかである。

補題 3.1

J -space $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素 T の不変部分空間 $\mathcal{M}$ に対し、 $\mathcal{M}^{[\perp]}$ は、 $T^* = JT^*J$ の不変部分空間である。

又、 $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]} = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{H} = \overline{\mathcal{M} + \mathcal{M}^{[\perp]}}$ より、 $\mathcal{M}$ が J -strongly definite ならば、 $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{M} + \mathcal{M}^{[\perp]}}$ になることを注意しておく。

次の定理は、 J -space $\mathcal{H}$ 上の C^* -Lorentz algebra の特徴づけである。与えられた Minkowsky form を定義する unitary hermitian operator J に対し、 $P_+ \equiv \frac{1}{2}(1+J)$, $P_- \equiv \frac{1}{2}(1-J)$ とおくと、 P_+, P_- は orthogonal complementary projections で $J = P_+ - P_-$ 。又 $P_+\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_+$, $P_-\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_-$ とおくと $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ 。

定理 3.2

$(\mathcal{O}, \varphi; J)$ を J -space $\mathcal{H}$ 上の Lorentz algebra とする。そのとき、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ が C^* -Lorentz algebra に存在するための必要十分条件は、 $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ を不変部分空間とにもつことである。

【証明】 定理 2.2 より、従う。

(注意) 上の定理 3.2 において、 $\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-$ は maximal J -uniformly positive。故に我々は自然に、“いかなる場合に、 $\mathfrak{L}$ 上の Lorentz algebra が、この種の不変部分空間をもつか？”という問題をもつ。この件については、後の章で再び問題とする。

補題 3.3

$\mathfrak{L}$ 上の Lorentz algebra $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が、 J -strongly definite subspace $\mathcal{M}$ を不変部分空間としてもつならば、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ の $*$ -radical R^* は $\mathcal{M}$ 上 0 となる $\mathcal{O}$ の元の集合に含まれる。

補題 3.3 と p6 の補題 3.1 の下の注意より、次の定理を得る。

定理 3.4

$\mathfrak{L}$ 上の Lorentz algebra $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が、2 つの J -strongly definite subspace $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を不変にするとする。もしも、 $\mathfrak{L}$ が $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ による closed linear span だとすると、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ は $*$ -semi-simple になる。特に、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ が $\mathcal{O}$ -不変な maximal J -strongly definite subspace をもつならば、 $(\mathcal{O}, \varphi)$ は $*$ -semi-simple である。

次に、Banach $*$ -algebra が、ある Hilbert space 上の C^* -algebra に $*$ -isomorphic な時に、 C^* -equivalent であるという。

例2 (C^* -equivalent で not C^* -Lorentz algebra)

$\mathcal{B}$ を C^* -algebra とする。(ただし, $\mathcal{B}$ は, ある Hilbert space $\mathcal{H}$ 上に作用しているとする。) $\delta \in \mathcal{B}$ 上の hermitian derivation とする。

そして, $\mathcal{O}_0 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} ; A, B, C, D \in \mathcal{B} \right\}$ on $\mathcal{H}$ の

$$J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とおく。}$$

明らかに $\mathcal{O}_0$ は $\mathcal{H}$ の $\mathcal{H}$ 上の operator adjoint で C^* -algebra になり,

$$\tilde{\mathcal{O}} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} A & \delta(A) \\ 0 & A \end{pmatrix} ; A \in \mathcal{B} \right\}$$

とおくと, $\tilde{\mathcal{O}}$ は J によって induce される involution によって, Lorentz algebra w.r.t $(\mathcal{O}_0, *)$ になり, しかも C^* -equivalent である。

定理3.5

$\mathcal{H}$ 上の Lorentz algebra $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が, J -uniformly positive subspace $\mathcal{M}$ と J -uniformly negative subspace $\mathcal{N}$ を不変部分空間として持つとする。さらに $\mathcal{H}$ は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の直和であるとする。そのとき, $(\mathcal{O}, \varphi)$ は C^* -equivalent になる。

特に, $(\mathcal{O}, \varphi; J)$ が $\mathcal{O}$ -不変な maximal J -uniformly definite subspace をもつならば, $(\mathcal{O}, \varphi)$ は C^* -equivalent になる。

我々は J -space $\mathcal{H}$ 上の C^* -Lorentz algebra の場合は, maximal J -

uniformly subspace $\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-$ によって、完全に決定された。従って、自然に次の問題をもつ。定理 3.5 の逆は真か？。すなわち、

★ “ $\mathcal{J}$ 上の C^* -equivalent Lorentz algebra は、maximal $\mathcal{J}$ -uniformly subspace を不変部分空間としてもつか？ ”。

この問題は、可換の場合、yes の解答を得るか、それを示すには、次の補題が基本的である。

補題 3.6 [R.S. Phillips, Theorem 6.1]

代数的 Lorentz algebra $\mathcal{A}$ が maximal $\mathcal{J}$ -uniformly positive subspace を不変部分空間としてもつための必要十分条件は、元の内積に equivalent な内積 $(x|y)'$ が存在して、その内積による adjoint operation を $A \rightarrow A^*$ としたとき、 $A^{\#} = A^*$ for $\forall A \in \mathcal{A}$ が成り立つことである。

定理 3.7

可換な C^* -equivalent Lorentz algebra $(\mathcal{A}, \varphi; \mathcal{J})$ は、ある maximal $\mathcal{J}$ -uniformly subspace を不変にする。

一般の場合については、次の §2 で定義する Lorentz 表現の用語を用いて述べられる。

§4. Lorentz 表現.

$\mathcal{A}$ を一般の $*$ -algebra とする。 π を $\mathcal{A}$ から Hilbert space 上の representation (一般に involution は保存しない) とする。

そのとき、

定義 4.1

π が J -representation であるとは、ある π に連結した Minkowsky form $[x|y]_p = (Jx|y)$ をもつ J -space $\mathcal{H}_\pi$ が存在して、それが $\mathcal{A}$ から $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi), \varphi; J)$ の中への $*$ -homomorphism になることを言う。特に、連続な J -representation を Lorentz representation と呼ぶことにする (連続性を要するとき、 $\mathcal{A}$ は topological $*$ -algebra と考えている)。

[注意] ; 我々は、単に $*$ -representation という用語を、通常のもの上の adjoint operation による $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の involution との間での involution-保存表現にのみ用いる。

さて、 π を $*$ -alg $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}$ 上の representation とすると、 π は J -representation を誘導する。 実際、

$$\hat{\pi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi(x) & 0 \\ 0 & \pi(x^{**}) \end{pmatrix} \quad \text{の対角を} \quad , \quad J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とあて、}$$

$$J \hat{\pi}(x) J = \hat{\pi}(x^*) \quad \text{を得る。}$$

従って、 $*$ -alg の representation を研究するには、 J -representation (Lorentz representation) を研究すれば十分である。

補題 4.2

*-algebra $\mathcal{A}$ は J-space $\mathcal{H}$ (with $[x|y]_J = (Jx|y)$) 上の J-representation π が、ある *-representation ρ に similar (intertwining operator X とする) であるとする。そのとき、

$$XJX^* \in \rho(\mathcal{A})', \quad J \in \pi(\mathcal{A})' (X^*X)^{-1}$$

命題 4.3

$\mathcal{A}$ を Banach *-algebra とする。 π を indefinite な J-space 上の Lorentz representation とする。そのとき、 π はどんな irreducible な *-representation にも similar でない。

次の定理は、S.V. Šul'man の suggestion である。

定理 4.4

π を *-algebra $\mathcal{A}$ の J-space 上の J-representation とする。そのとき、次の条件は同値である。

- (a) $(\pi(\mathcal{A}), \varphi; J)$ は maximal J-uniformly positive subspace を不変部分空間として持つ
- (b) J-representation π は、ある *-representation に similar である。

この定理と、C*-equivalent の定義より従う "J-space 上の Lorentz algebra $(\mathcal{A}, \varphi)$ が C*-equivalent になるための必要十分条件は、

ある C^* -algebra の J -space 上の Lorentz representation の image である
こと" に注意すると、

定理 4.5

C^* -equivalent Lorentz algebra が、ある maximal J -uniformly positive
subspace を不変にするための必要十分条件は、ある C^* -algebra が
その上での $*$ -representation に similar な Lorentz representation が存在す
ることである。

References

- [1] Kreĭn, M. G. ; Amer. Math. Soc. Transl, 93 (1970) p103 ~ p176
- [2] Iohvidov, I. S., Kreĭn, M. G. ; Amer. Math. Soc. Transl. 13 (1960)
p105 ~ p175.
- [3] S. Ôta ; Memoirs. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. (1975)
- [4] R. S. Phillips ; Proc. Intern. Symp (Linear Spaces), Jerusalem (1960)
- [5] M. Tomita ; Lectures in Kyushu Univ 1973/74, 1975 ~.