

The Multiple Zeta Value Algebra And The Stable Derivation Algebra

京大数理研 古庄 英和 (Hidekazu Furusho)

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ

Abstract 多重ζ値 (multiple zeta value) で生成された $\mathbb{Q}$ ベクトル空間は積によって
 閉じているから代数構造を持っています。これが多重ζ値代数 (multiple zeta value algebra)
 です。安定導分 Lie 環 (stable derivation algebra) というのは GT (Grothendieck–Teichmüller
 群) の $\mathbb{Q}$ 上の Lie 環 version に相当します。2 進 Galois Lie 環 ($\mathbb{F}_2^1 - \{0, 1, \infty\}$ の pro- ℓ
 基本群への外 Galois 表現の像から作った $\mathbb{Q}_\ell$ 上の Lie 環) は安定導分 Lie 環の ℓ 進化 ($\otimes \mathbb{Q}_\ell$
 したもの) に canonical にうめこまれることが知られています。実はこのうめこみ射は同型だろ
 うという予想が伊原先生によりされています。今回の私の主結果とはこのストーリーと Hodge
 側でパラレルに作ったことです ([F])。詳しく説明しますと安定導分 Lie 環の dual 線
 型空間から new ζ 空間 (多重ζ値代数の algebraic generator の空間) に向かって (同型かもしれ
 ないような) canonical な全射を作ったのです (ch2. Th 4.6)。これは安定導分 Lie 環の
 構造予想から多重ζ値代数の次元予想の上限パートが従うことが系として出ます。
 (実は最近、多重ζ値代数と GT (の副代数群版) との関係が付けられました。) □

目次	ch1	Galois Side
	ch2	Hodge Side
	ch3	proof of theorem
	ch4	comparison

Ch1 Galois Side

profinite group world

$$0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}_0^1 - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}_0^1 - \{0, 1, \infty\}) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

これは2元生成の自由群の剰余有限完備化です。略して $\hat{F}_2$ とかきます

略して G_0 とかきます

上のスキーム論的基本群のホモトピー完全列から外 Galois 表現

$$\begin{array}{ccc} \varphi: G_0 & \hookrightarrow & \text{Out } \hat{F}_2 \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{GT} & \end{array}$$

が生じます。

$\text{Out } \hat{F}_2 := \text{Aut } \hat{F}_2 / \text{Inn } \hat{F}_2$
 自己同型群を内部自己同型群で割った商群です。これを外部自己同型群といいます。

実は, Belyi により, φ が単射であることが示されています ([Bel]). そこで

“この Galois 像を $\text{Out } \hat{F}_2$ の中で具体的に特徴付けよう!”

という試みが始まりました。Grothendieck-Teichmüller 群 GT というのは Drinfel'd により定義した $\text{Out } \hat{F}_2$ の部分群のことです ([Dr]). そして実は G_0 の像がこれに含まれていることが知られています ([Ih], [Nak]). $\varphi(G_0) = \text{GT}$ かどうかはまだ未解決です。

では, 次にこの世界のバリエーションに移ることにしましょう。

ℓ -adic Lie algebra world (くわしくは [Ih99] を見て下さい.)

素数 $\ell \in 1$ を固定して先の pro- ℓ 版の外 Galois 表現: $\varphi_\ell: G_0 \rightarrow \text{Out } \hat{F}_2^\ell$ を考えましょう。

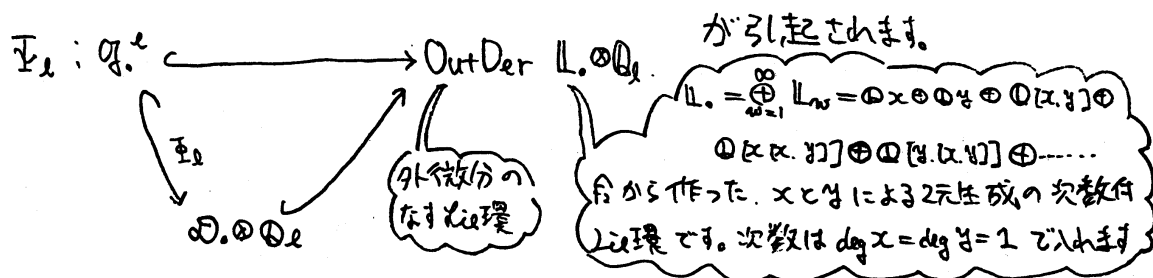
ℓ -adic Galois Lie 環 $\hat{F}_2^\ell$ の降中心列で切った表現で考えることにより

拡大体の塔 $\mathbb{Q}^\ell(1) = \mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty}) \subset \mathbb{Q}^\ell(2) \subset \mathbb{Q}^\ell(3) \subset \dots$ が作れます。

$$\mathcal{G}^\ell := \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathfrak{g}_m^\ell, \quad \mathfrak{g}_m^\ell := \text{Gal}(\mathbb{Q}^\ell(m+1)/\mathbb{Q}^\ell(m)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

とおくことにより, $\mathcal{G}^\ell$ には自然に $\mathbb{Q}_\ell$ 上の * 次数付 Lie 環の構造が入ります!

これが $\mathbb{Q}$ 上の Galois Lie 環です。さて $\mathbb{Q}^L$ から Lie 環の単射準同型



やはり、こちらのワールドでも

“この像を $\text{Out Der } \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}_L$ の中で具体的に特徴付け その Lie 構造を明らかにしよう！”
 という問題が考えられています。

安定導分 Lie 環 (stable derivation algebra) $\mathcal{D}_L$ というのは $\text{Out Der } \mathbb{L}$ の部分 Lie 環

です。伊原先生によって定義されました ([Ih90])。これは $\mathbb{Q}$ 上で定義された次数付 Lie 環になっていて $\mathbb{Q}^L$ の像は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}_L$ への写像 $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}_L$ に含まれています。こうめしを $\mathcal{D}_L$ としておきましょう。(‘stable’ という語が何になる方は [Ih92] をご覧下さい。) $\mathcal{D}_L$ の定義 (正確には $\text{Der } \mathbb{L}$ の特上げ) は以下の通りです。

(定義) $\mathcal{D}_L = \left\{ D_f \in \text{Der } \mathbb{L} \mid \begin{array}{l} D_f(x) = 0, \quad D_f(y) = [y, f] \\ f \in \mathbb{L} \text{ は関係式 (i) } \sim \text{(iii) をみたす} \end{array} \right\}$

(関係式) $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad f \in \bigoplus_{w=2}^{\infty} \mathbb{L}_w \\ \text{(ii)} \quad f(x, y) + f(y, x) = 0 \\ \text{(iii)} \quad f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0 \quad \text{for } x+y+z=0 \\ \text{(iv)} \quad \sum_{i \in \mathbb{Z}_5} f(x_{i+1}, x_{i+2}) = 0 \quad \text{in } \mathbb{P}_5 \end{array} \right.$

* $\mathbb{P}_5$ というのは 5 本組紐 Lie 環です。詳しくは [Ih90] [Ih92] を見て下さい。

附注*) [Ih94] では $\mathcal{D}_L$ (と $\mathbb{Q}^L$) は $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_L$) 構造でなく $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}_L$) 構造で考えられています。実はこちらの方が面白いのですが、ここでは $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}_L$) 構造で考えることにします。

(次数) は $\mathcal{D}_\bullet = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \mathcal{D}_w$, $\mathcal{D}_w := \{D_f \in \mathcal{D}_\bullet \mid f \in \mathbb{L}_w\}$

で入れます。この degree を 'weight' と呼んだりもします ([Ih99])。

さて、先の問題に関して、次の2つの予想がされています。

Conjecture A ([Ih99]) $\mathfrak{g}_\bullet : \mathfrak{g}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{D}_\bullet \otimes \mathbb{Q}_\bullet$ は同型だろう。

この予想は、 $\mathbb{L}$ 型 Galois Lie 環が各素数 ℓ に対して $\mathfrak{g}_\bullet$ に存在するものでなく、共通な $\mathbb{Q}$ -構造がとれて、しかも $\mathfrak{g}_\bullet$ がこのような combinatorially に定義されている安定導分 Lie 環でとくことと主張しています。

Conjecture B ([De], [Ih99]) $\mathfrak{g}_\bullet$ は 次数が3以上の奇数の所に1つずつ生成元がとれるような自由 Lie 環 だろう。

この予想は、R. Hain と 松本 貞 さんによって の部分は正しいことが示されています ([HM])。Conj A と Conj B を組み合わせることによって得られるのが安定導分 Lie 環の構造予想です。

Conjecture B' ([Ih99]) $\mathcal{D}_\bullet$ は 次数が3以上の奇数の所に1つずつ生成元がとれるような自由 Lie 環 だろう。

角皆 虫 さんと 松本 貞 さんは計算機を用いて、安定導分 Lie 環の lower weight の各次元を求めて Conj B' が weight 12 の所までは正しいことを確認しました ([Tsu])。

w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{D}_w$	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2

Ch 2. Hodge Side

多重ζ値 (multiple zeta value: 略してMZVとかいたりします。)

既に大野さんの報告で説明されていると思うので (詳しい話はそちら (Tkan などもよい文献です。)) を参照して下さい。天下りの的ですが記号は以下のようにしておきましょう。

(記号)

$k = (k_1, \dots, k_m)$: admissible index (i.e. $k_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $k_m > 1$)

$\text{wt } k := k_1 + \dots + k_m$: weight of k

$\zeta(k) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_m} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_m^{k_m}}$: MZV of $k \in \mathbb{R}$

これはMZVの収束条件

$$Z_0 := \mathbb{Q}$$

$$Z_w := \langle \zeta(k) \mid \text{wt } k = w \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R} ; \text{ wt } = w \text{ の MZV で生成された } \mathbb{Q} \text{ ベクトル空間}$$

多重ζ値代数 とは $Z := \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w$ のことです。これは実際、次数付

$\mathbb{Q}$ 代数の構造をしています。(この代数構造に関しては [Gon] の予想を見て下さい。) さて、金子昌信 先生, 大野泰生 さん, M. Hoffman さん (それから Euler も!) などなどにより MZV 間に成り立つ関係式がいっぱい見つかっています。今まで見つかっているこの MZV の関係式をすべて総動員すると多重ζ値代数の lower weight 部分は以下のように生成系がとれます。

$$Z_0 = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = \langle \zeta^2 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_3 = \langle \zeta(3) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_4 = \langle \zeta^4 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_5 = \langle \zeta^2 \zeta(3), \zeta(5) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$\cdot \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Euler})$$

$$\cdot \zeta(3) = \zeta(1, 2) \quad (\text{Euler})$$

$$\cdot \zeta(4) = 4\zeta(1, 3) = \frac{4}{3}\zeta(2, 2) = \zeta(1, 1, 2) = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{Euler})$$

$$Z_0 = \langle \pi^0, \zeta(3)^2 \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_1 = \langle \pi^4 \zeta(3), \pi^2 \zeta(5), \zeta(7) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

$$Z_2 = \langle \pi^8, \pi^2 \zeta(3)^2, \zeta(3) \zeta(5), \zeta(3, 5) \rangle_{\mathbb{Q}}$$

現在までの所、上記の生成系の間に成り立つ $\mathbb{Q}$ -linear な関係式は (異なる weight 間も含めて) 見つからないです。

new ζ 空間 上の表の ~~~~ 印を見て下さい。まず、~~~~ が付いていない MZV

はそれより weight の小さい MZV の product でかけている old comer です。一方、~~~~

が付いている MZV はそこで weight になって初めて出現するから new comer

ですね。この new comer はいかなんかは '99 重 ζ 値代数の algebraic generator' です。

そこでこの new comer を取り出した次のような 2. の $\mathbb{Q}$ 空間を new ζ 空間と呼ぶことにしましょう。

$$NZ. := Z_{\geq 2} / Z_{\geq 0}^2 \simeq Z. / \begin{matrix} \swarrow Z_0 & \swarrow Z_2 \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} & \pi^2 \oplus Z_{\geq 0}^2 \end{matrix} : \text{new } \zeta \text{ 空間}$$

これは、多重 ζ 値代数を 'modulo product' に考えた空間です。次数付 $\mathbb{Q}$.

ベクトル空間になります。都合上 π^2 は old にしておきました。何故でしょう？

Main Results さて ch1 でうめこみ: $\Phi_e: \mathcal{A}^e \hookrightarrow \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_e$

がありました。私の結果 はこれを Hodge Side で作ったことです。(証明は ch3 を見て下さい。)

Theorem 次のような (次数付 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての) canonical な全射が作れました。

$$\Phi_{\text{DR}}: \mathcal{D}_0^{\vee} \longrightarrow NZ.$$

$\mathcal{D}_0^{\vee}$ は $\mathcal{D}_0$ の graded dual のこと。

即ち $\mathcal{D}_0^{\vee} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n^{\vee}$, $\mathcal{D}_n^{\vee} = \mathcal{D}_{-n}$ の双対空間

これより $\dim \mathrm{NZ}_w \leq \dim \mathcal{D}_w$ です。そこで

$$d'_w := \left[\begin{array}{l} \pi^2 : \deg \pi^2 = 2, \quad z_{ik} : \deg z_{ik} = k \quad (1 \leq i \leq \dim \mathcal{D}_k, k \in \mathbb{N}) \\ \text{で生成された次数付多項式環の } \deg = w \text{ 部分の次元} \end{array} \right]$$

とおくことにしましょう。これは具体的に

$$\sum_{k=0}^{\infty} d'_k t^k = \frac{1}{1-t^2} \prod_{w=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \dim \mathcal{D}_w t^w} \quad \text{で計算できます。}$$

すると次のような bound が得られます。

Corollary

$$\dim \mathrm{Z}_w \leq d'_w \quad \text{for all } w$$

では、これが $\dim \mathrm{Z}_w$ の予想値 d_w (この講義録の中の大野さんの記事を見て下さい) にどの位近付いているのかなと思って、ch1 の $\dim \mathcal{D}_w$ の表を用いて d'_w を計算してみました。すると、

$$d'_w = d_w \quad \text{for } w \leq 12$$

参考までに

w	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_w	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12

です。

でした。つまり、計算機で計算されている所 ($w \leq 12$) までは、上の bound は予想値になっていることが確かめられたのです。

さて、一般の weight w に対しては、次のようなことまでいってしまいました。

Proposition

もし、Conj B' (ch1) が正しいのなら

$$d'_w = d_w \quad \text{for all } w$$

即ち、Galois Side で述べた安定導分環の構造予想から多重値の次元予想の bounding に関する部分の結果が従ってしまうのです。だから次のような予想をしてもよいと思います。

Conjecture C

全射 $\Phi_{\mathrm{or}} : \mathcal{D}_w^V \longrightarrow \mathrm{NZ}_w$ は同型だろう。

Galois Side の予想 Conj A に対してこのような予想を Hodge Side でも立てることにしました。

Ch3. Proof of the main theorem

材料 ここでは必要な道具をざっと紹介します。くわしくは [Dr] [kas] をご覧下さい。

KZ 方程式 $A_c^* := \mathbb{C}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$: $\mathbb{C}$ 係数 2 変数非可換形式的巾級数環

$G(u)$: 全平面 $\mathbb{C}$ のある領域上定義され A_c^* 上に値をとる複素解析的関数

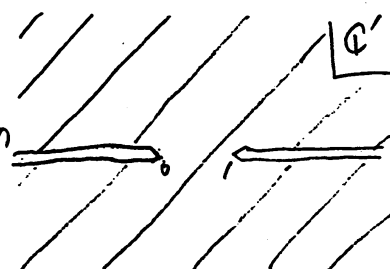
とします。次の微分方程式が KZ (Knizhnik-Zamolodchikov) 方程式です。

$$G'(u) = \left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{u-1} \right) \cdot G(u) \quad \text{for } u \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$$

これは $u=0, 1, \infty$ で確定特異点を持つ Fuchs 型の

微分方程式であり初期条件を適当に決めると右の

領域 $\mathcal{C}'$ 上で定義された解が一意的に決まります。



基本解 特に次のような初期条件を満たす解が $\mathcal{C}'$ 上でそれぞれ unique に定まります。

$$\exists! G_0(u) \approx u^X \quad (u \rightarrow 0), \quad \exists! G_1(u) \approx (1-u)^Y \quad (u \rightarrow 1)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし, } u^X := 1 + \frac{(X \log u)}{1!} + \frac{(X \log u)^2}{2!} + \frac{(X \log u)^3}{3!} + \dots \\ G_0(u) \approx u^X \iff G_0(u) \cdot u^{-X} \text{ は } u \text{ の近傍で解析的 かつ} \\ \quad u \rightarrow 0 \text{ で値 1 をとること} \\ G_1(u) \approx (1-u)^Y \text{ の定義も同様にできますね。} \end{array} \right) \quad \text{27.}$$

$G_0(u)$ の lower degree 部分を手計算で求めてみました。 $\text{Li}_{k_1, \dots, k_m}(u) = \sum_{0 < \eta_1 < \dots < \eta_m} \frac{u^{\eta_m}}{\eta_1^{k_1} \dots \eta_m^{k_m}}$

: multiple poly logarithm を使, 2 次のまうにかけました。

$$\begin{aligned} G_0(u) = & 1 + (\log u)X + (\log(1-u))Y + \frac{(\log u)^2}{2} X^2 - \text{Li}_2(u)XY + \{\text{Li}_2(u) + \log u (\log(1-u))\} YX \\ & + \frac{(\log(1-u))^2}{2} Y^2 + \frac{(\log u)^3}{6} X^3 - \text{Li}_3(u)X^2Y + \{2\text{Li}_3(u) - \log u \text{Li}_2(u)\} XYX + \text{Li}_{12}(u)XY^2 \\ & - \{\text{Li}_3(u) - \log u \text{Li}_2(u) - \frac{(\log u)^2 \log(1-u)}{2}\} YX^2 + \text{Li}_{21}(u)YXY - \{\text{Li}_2(u) + \text{Li}_2(u) - \frac{\log u (\log(1-u)^2)}{2}\} \\ & Y^2X + \frac{(\log(1-u))^3}{6} Y^3 + \frac{(\log u)^4}{24} X^4 - \text{Li}_4(u)X^3Y + \{3\text{Li}_4(u) - \log u \text{Li}_3(u)\} X^2YX + \dots \end{aligned}$$

Drinfeld associator とは $\Phi_{k2}(X, Y) = G_1^{-1}(u) \cdot G_0(u)$ のことです。

これは u によらない定数関数です。(即ち $A_{\mathbb{Q}}^{\wedge}$ の元と思えます。) さらに各係数が $M \geq V$ になっています。

$$\begin{aligned} \Phi_{k2}(X, Y) = & 1 - \zeta(2)XY + \zeta(2)YX - \zeta(3)X^2Y + 2\zeta(3)XYX + \zeta(1,2)XY^2 \\ & - \zeta(3)YX^2 - 2\zeta(1,2)YXY + \zeta(1,2)Y^2X - \zeta(4)X^3Y + \dots \end{aligned}$$

関係式 さて Drinfeld は $[D_1]$ において $\Phi_{k2}(\frac{X}{2\pi i}, \frac{Y}{2\pi i})$ は quasi-triangular

quasi-Hopf quantized universal enveloping algebra over $\mathbb{C}[[\hbar]]$ の $\mathbb{C}$ -universal formula になる' ことを, $\Phi_{k2}(X, Y)$ に以下の関係が成り立つことを示してそれより導いていきます。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & \log \Phi_{k2}(X, Y) \in \prod_{w=2}^{\infty} L_w \otimes \mathbb{C} \\ \text{(ii)} & \Phi_{k2}(X, Y) \Phi_{k2}(Y, X) = 1 \\ \text{(iii)} & e^{\pi i X} \Phi_{k2}(Z, X) e^{\pi i Z} \Phi_{k2}(Y, Z) e^{\pi i Y} \Phi_{k2}(X, Y) = 1 \quad \text{for } X+Y+Z=0 \\ \text{(iv)} & \Phi_{k2}(x_{12}, x_{23}) \Phi_{k2}(x_{34}, x_{45}) \Phi_{k2}(x_{51}, x_{12}) \Phi_{k2}(x_{23}, x_{34}) \Phi_{k2}(x_{45}, x_{51}) = 1 \quad \text{in } (U_3 \otimes \mathbb{C})^{\wedge} \end{array} \right.$$

構成法 定理の証明をします。

① まず reduction

次数は $\deg X = \deg Y = 1$ で入れます。

$$A_{\mathbb{Q}}^{\wedge} := \prod_{w=0}^{\infty} A_w := \mathbb{Q}\langle\langle X, Y \rangle\rangle : \mathbb{Q}\text{係数2変数非可換次数付多項式環}$$

とします。Drinfeld associator $\Phi_{k2}(X, Y)$ は $\prod_{w=0}^{\infty} Z_w \otimes A_w$ に属しています。

これを 'modulo product' したものを $\overline{\Phi_{k2}}(X, Y)$ を考えてみることにしました。

$$\prod_{w=0}^{\infty} Z_w \otimes A_w \ni \Phi_{k2}(X, Y)$$

$$\downarrow$$

$$\prod_{w=0}^{\infty} NZ_w \otimes A_w \ni \overline{\Phi_{k2}}(X, Y) : \text{'reduction Drinfeld associator'}$$

② $\overline{\Phi}_{k2}(X, Y)$ と $\mathcal{D}$ の関係

$\overline{\Phi}_{k2}$ の関係式より $\overline{\Phi}_{k2}$ は次の関係を満たします。

$$\left\{ \begin{array}{ll} (0) & \overline{\Phi}_{k2}(X, Y) \in \prod_{w=2}^{\infty} NZ_w \otimes L_w \\ (i) & \overline{\Phi}_{k2}(X, Y) + \overline{\Phi}_{k2}(Y, X) = 0 \\ (ii) & \overline{\Phi}_{k2}(X, Y) + \overline{\Phi}_{k2}(Y, Z) + \overline{\Phi}_{k2}(Z, X) = 0 \quad \text{for } X+Y+Z=0 \\ (iii) & \sum_{i \in \mathbb{Z}/3} \overline{\Phi}_{k2}(X_{i+1}, X_{i+1, i+2}) = 0 \quad \text{in } \prod_{w=0}^{\infty} NZ_w \otimes (P_3)_w \end{array} \right.$$

これより $\overline{\Phi}_{k2} \in \prod_{w=0}^{\infty} NZ_w \otimes \mathcal{D}_w$ であることがわかります。

③ 最後に代入

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{DR}: \mathcal{D}^{\vee} = \bigoplus_{w=0}^{\infty} \mathcal{D}_w^{\vee} & \longrightarrow & NZ = \bigoplus_{w=0}^{\infty} NZ_w \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R}(\overline{\Phi}_{k2}) \end{array}$$

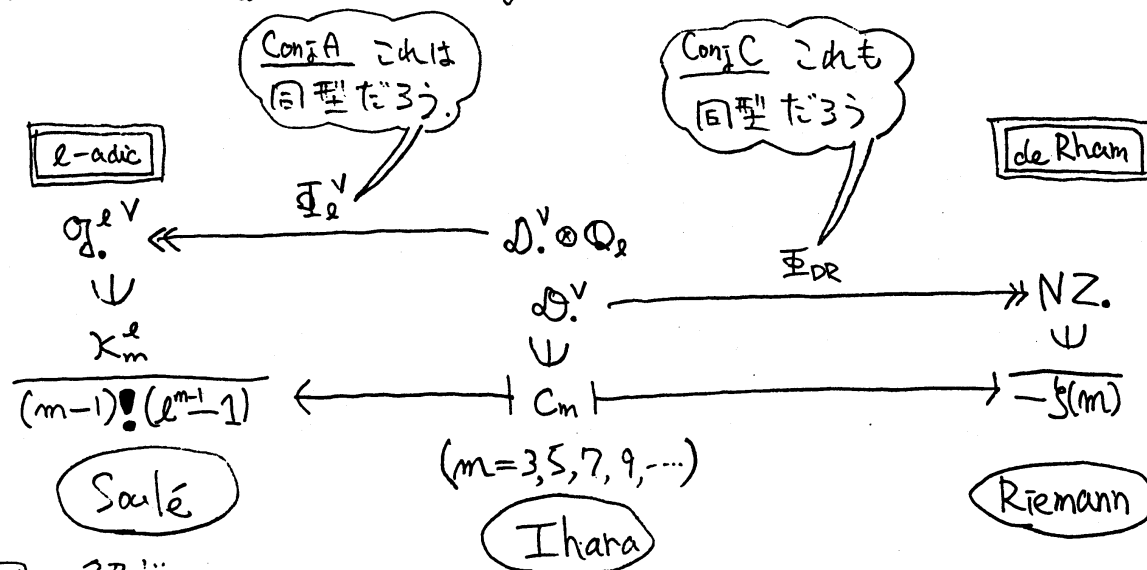
$\mathcal{D}^{\vee}$ の元に対し、reduction Drinfel'd association $\overline{\Phi}_{k2}$ で取る値を対応させる射が先の構成した射 Φ_{DR} です。(実はこの'DR'は de Rham と Drinfel'd の 2人をかけています!!) これが全射になっていることもすぐ確認できます。 $\square$

問題

さて Ch2. Prop よりもし $\text{Conf } B'$ が正しくさらに MZV の次元予想 (即ち $\dim Z_w \stackrel{?}{=} dw$) も正しいとすると MZV の関係式は Drinfel'd association $\overline{\Phi}_{k2}(X, Y)$ の関係式 (0) ~ (iii) から得らる MZV の関係式だけで全て尽くしていることになります。(実は (iii) から (i) が導けます。) ということは、(0) ~ (iii) だけから今まで発見されている MZV の既存の関係式 (duality relation, double shuffle relation, Ohno relation, ...) が全て導けることになるはずです。本当でしょうか? ちなみにあの Euler の公式 $\zeta(2n) = \frac{(-2\pi i)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$ は (0) ~ (iii) を使って示せます。([De])

Ch4. Comparison

今までの Galois Side と Hodge Side の話を比べてみましょう。



図の解説

① $m=3,5,7,\dots$ に対して. $C_m: D_m \longrightarrow \mathbb{Q}$ という D_m^V の canonical な元が伊原先生によって構成されています ([Ih99]).

② うめこみ $\Phi_l: g_l^e \hookrightarrow D_l \otimes \mathbb{Q}_l$ の dual をとけば
全射 $\Phi_l^V: D_l^V \otimes \mathbb{Q}_l \longrightarrow g_l^{eV}$ が得られます。

これが「同型だ3う」というのが Conj A でした。さて。

$$H_{\text{ét}}^1(\text{Spec } \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_l(m)) = \begin{cases} \mathbb{Q}_l & m=3,5,7,9,\dots \\ 0 & m: \text{other } (\geq 1) \end{cases}$$

です。Soulé 指標 K_m^l ($m=3,5,7,\dots$) とは、この生成元になっており、具体的に以下のようにかけます。

$$K_m^l: \underset{\sigma}{\text{Gal}}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu_{l^{\infty}})) \longrightarrow \mathbb{Z}_l$$

$$\zeta_{l^n} = \exp\left(\frac{2\pi i}{l^n}\right)$$

$$\text{st. } \zeta_{l^n}^{K_m^l(\sigma)} = \left[\prod_{a \in (\mathbb{Z}_{l^n})^\times} \left(\zeta_{l^n}^a - 1 \right)^{\langle a^{m-1} \rangle} \right]^{\frac{1}{l^n}} \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}$$

$\langle a^{m-1} \rangle$ とは $(0, l^n)$ 内で
 $\langle a^{m-1} \rangle \equiv a^{m-1} \pmod{l^n}$
を満たす自然数のこと

Σ_m^e により誘導される射が $\chi_m^e: \mathcal{G}_m^e \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$ のことだす。

この χ_m^e は C_m の Φ_ℓ^V による像になっていました。

$$\Phi_\ell^V(C_m) = \frac{\chi_m^e}{(m-1)! (\ell^{m-1} - 1)}$$

(N2.) 一方、 C_m の Φ_{DR} による像は Riemann ζ 値になっていました。

$$\Phi_{DR}(C_m) = -\zeta(m)$$

最後に 実は D. と N2. には depth filtration という更なる付加構造が

入っていて、 Φ_{DR} はこの付加構造も込みできれいに対応しています。し

かし紙面の都合上割愛しました。くれしくは[F]を見て下さい。

REFERENCES

- [Be] Belyi, G. V.; Galois extensions of a maximal cyclotomic field. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 43 (1979), no. 2, 267–276, 479.
- [De] Deligne, P.; Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. *Galois groups over $\mathbb{Q}$* (Berkeley, CA, 1987), 79–297, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 16, Springer, New York-Berlin, 1989.
- [Dr] Drinfel'd, V. G.; On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. ; *Leningrad Math. J.* 2 (1991), no. 4, 829–860
- [F] Furusho, H.; The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra; available from <http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.NT/0011261>
- [Gon] Goncharov, A. B.; Multiple polylogarithms at roots of unity and motivic Lie algebras; MPI-preprint 97-62, 1997
- [HM] Hain, R., Matsumoto, M.; Weighted Completion of Galois Groups and Some Conjectures of Deligne; available from <http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/math.AG/0006158>
- [Ih90] Ihara, Y.; Braids, Galois groups, and some arithmetic functions. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II* (Kyoto, 1990), 99–120, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 1991.
- [Ih91] ——— Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations. *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, 353–373, *Progr. Math.*, 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Ih92] ——— On the stable derivation algebra associated with some braid groups. *Israel J. Math.* 80 (1992), no. 1–2, 135–153.
- [Ih99] ——— Some arithmetic aspects of Galois actions on the pro- p fundamental group of $P^1 - \{0, 1, \infty\}$. RIMS-1229 preprint
- [Kan] Kaneko, M.; Introduction to multiple zeta values. *Algebraic number theory and related topics* (Japanese) (Kyoto, 1996). *RIMS-kokyuroku* No. 1097 (1999), 50–68.
- [Kas] Kassel, C.; Quantum groups. *Graduate Texts in Mathematics*, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Nak] Nakamura, H.; Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 1 (1994), no. 1, 71–136.
- [Tsu] Tsunogai, H.; On ranks of the stable derivation algebra and Deligne's problem. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 73 (1997), no. 2, 29–31

E-mail address: furusho@kurims.kyoto-u.ac.jp