

S^3 の種数 2 の Heegaard diagrams に 対応する基本群の表示について

筑波大 数学系 金戸 武司

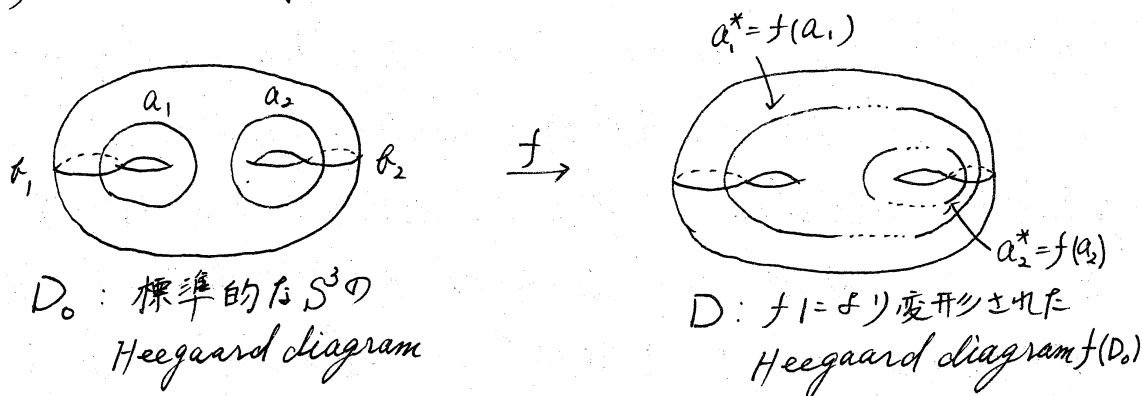
§1. 序

[1] で, S^3 の Heegaard diagrams に対応する基本群の表示についての一般性として, *relations* の相互代入による簡略化の可能性について, 一般の種数に関する報告をした。その結びに於いて, そこで得た結果を更に強い形に直せなつかという問題を提起した。これについて, 種数が 3 以上の場合は反例があり, 種数 2 の場合のみが問題として残った。(c.f. [2])。この報告では, この問題が種数 2 の Heegaard diagrams のある Class について, 肯定的に解けることを示す。

§2. 定義と結果

S^3 の種数 2 の Heegaard diagrams の次のような Class $\mathcal{D}_1$ を考える。 T を種数 2 の solid torus とし, D_0 を標準的な S^3 の種数 2 の Heegaard diagram

とする。(下左図参照)



$\mathcal{D}_f := \{ D = f(D_0) \mid f: \partial T \rightarrow \partial T \text{ は orientation preserving homeomorphism で } f|_{\partial T} = f \text{ をもつ} \}$ とする。(以下, このような f を「 f は条件 (*) を満たす」と言うことにする。) $\mathcal{D}_f$ に属する Heegaard diagram による基本群の reduced な表示について,

(1) relators の word としての一般化を与え, (定理 1)

の応用として, (2) 表示は“代入”による簡略化が可能であること (定理 2, その系) を示す。

便宜上, Heegaard diagrams に代えて, 基本群の reduced な表示を考える上では本質的に同じことであるから, Heegaard sewings を考えることにする。即ち, $\mathcal{D}_f$ に代えて, Heegaard sewings の class $\mathcal{S}_f := \{ \varphi = f\varphi_0 \mid f \text{ は条件 (*) を満たす} \}$ に二に, φ_0 は S^3 の種数 2 の標準的な Heegaard sewing とする。即ち,

$\varphi_0(b_1) = a_1$, $\varphi_0(b_2) = a_2$ を満たす。[3], [4] の記号で表わせば, $\varphi_0 = \mu_1 \mu_2$ である。) を考える。Heegaard sewing φ に対応する基本群の reduced な表示を $\pi_1(\varphi)$ で表わし, *relators* における i) 巡回置換 $(b_1 \cdots b_k \rightarrow b_k b_1 \cdots b_{k-1})$ 及び ii) 逆 $(b_1 \cdots b_k \rightarrow b_k^{-1} \cdots b_1^{-1})$ の操作による違いは無視することとし, それを「 $\equiv$ 」と書くことにする。($\pi_1(\varphi)$, $\equiv$ の正確な定義は, [1], [2] を参考。)

定理 1. $\mathcal{L}_1 \ni \forall \varphi = f \varphi_0$ による基本群の reduced な表示 $\pi_1(f \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ の *relator* r_i ($i=1, 2$) の一般形は次の通りである。

$$r_1 \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k} \cdots \text{type I}$$

$$\text{又は, } a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2 \cdots \text{type II}$$

a.t. i) $\varepsilon_j \neq 0$ ($j=1, \dots, k$) (但し, $k=0$ のときは, $r_1 = a_1$ 又は a_2 .)

$$\text{ii) 1) } |\varepsilon_s - \varepsilon_t| \leq 1 \text{ for } 1 \leq s, t \leq k$$

かつ 2) $k > 1$ のとき, $\varepsilon_s \neq \varepsilon_t$ となる $1 \leq s, t \leq k$ が存在する。

$$\text{iii) } k > 1 \text{ のとき, } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l_1}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} (\varepsilon_{l_m}) \text{ で, 各組は i), ii) を満たし, } l_j \geq 2 \text{ for } 1 \leq j \leq m-1, \text{ かつ, } l_m = 1.$$

ここに, 組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ に対する operation d は,

次のように定める。組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ は, i), ii) を満たし, $k > 1$ だから, ε_j ($j=1, \dots, k$) は丁度, 2つの値を取る。絶対値の大きいものにより, 組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ を絶対値の小さいものの幾つかのブロックに分けられる。(但し, ε_k と ε_1 は巡回的に継つてゐるとみなす。) 各ブロックに含まれる ε_j の個数を数え上げ, それに「1」を加えた値を, (右向き) 順に並べて新しい組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l_1})$ を得る。これを, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l_1})$ と書く。

例。 1) $\Gamma_1 = a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3$ のとき,

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5) = (2, 2, 3, 2, 3)$ で i), ii) を満たし, 更に, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5) \xrightarrow{d} (3, 2) \xrightarrow{d} (2)$ で, iii) を満たす。

2) $\Gamma_1 = a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3 a_1 a_2^2 a_1 a_2^3$ のとき,

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) = (2, 2, 2, 3, 2, 3)$ で, i), ii) を満たすが, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_6) \xrightarrow{d} (4, 2)$ となり, $(4, 2)$ は ii) を満たさない。したがって, この Γ_1 は iii) を満たさない。

Remark 1. iii) の条件は, 組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, $(-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_k)$, $(\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_1)$ について同値である。又, $\forall \varepsilon_j \neq 1$ ならば, $(\varepsilon_1 - 1, \dots, \varepsilon_k - 1)$ と, $\forall \varepsilon_j \neq -1$ ならば, $(\varepsilon_1 + 1, \dots, \varepsilon_k + 1)$ とも同値である。

定理2. $f_i \in \mathcal{V}_2^\pm$ ($i=1, \dots, m$, $\mathcal{V}_2^\pm$ は Suzuki の generators c.f. 後述. 命題1.) は $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0)$ の minimal representation i.e. $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \pi_1(g_{m'} \cdots g_1 \varphi_0)$ ($g_j \in \mathcal{V}_2^\pm$, $j=1, \dots, m'$) ならば, $m \leq m'$ とする。このとき,

$$\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \xrightarrow{S_4} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$$

が成り立つ。ここに, $S_4 (= \mathcal{A}_4)$ は, $\langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ に おいて, $r_1 \equiv r'_1 r_2$ のとき, $\langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle \xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; r'_1, r_2 \rangle$ と書くの意。(c.f. [1], [2])

Remark 2. $m=1$ のときは, $\pi_1(f_1 \varphi_0) \xrightarrow{S_4} \pi_1(\varphi_0)$ の意とし, 定理2に含めるものとする。

系. $S_1 \ni \varphi = f \varphi_0$ に対し, $\pi_1(\varphi)$ は strongly simply trivial, i.e. $\pi_1(\varphi) \xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle (\xrightarrow{S_1} \langle a_1, a_2; \bar{r}_1, \bar{r}_2 \rangle)$, もし, r_1, r_2 が not reduced のとき。 S_1 は cyclic reduction c.f. [1], [2]. $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ は reduced.) $\xrightarrow{S_4} \cdots \xrightarrow{S_4 \text{ (or } S_1)} \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$.

系の証明. [3] 及 [4] により, f の $g_j \in \mathcal{V}_2^\pm$ ($j=1, \dots, m'$) による分解 $f \sim g_{m'} \cdots g_1$ ($\sim$ は isotopic) が存在する。reduced な表示は isotopy invariant だから, $\pi_1(\varphi) \equiv \pi_1(g_{m'} \cdots g_1 \varphi_0)$ 。よって, 定理2 のような $f_i \in \mathcal{V}_2^\pm$ ($i=1, \dots, m$) が存在し, $\pi_1(\varphi)$ の

minimal representation を与える。よって、定理2より、

$$\pi_1(\varphi) \equiv \pi_1(t_m \cdots t_1 \varphi_0) \stackrel{S_4}{\sim} \pi_1(t_m \cdots t_2 \varphi_0)$$

、 $m \geq 1$ ならば、右辺に対して、再び定理2の条件を満たす

$t_i \in \tilde{V}_2^\pm$ ($i=1, \dots, m$) がとれ、 $\pi_1(t_m \cdots t_2 \varphi_0)$ の

minimal representation を与えるから、再び定理2

が適用でき、 $\pi_1(t_m \cdots t_2 \varphi_0) \equiv \pi_1(t_{m_1} \cdots t_1 \varphi_0) \stackrel{S_4}{\sim} \pi_1(t_{m_1}$

$\cdots t_2 \varphi_0)$ 、以上下、これを繰り返せば、 $\pi_1(\varphi) \stackrel{S_4}{\sim} \cdots \stackrel{S_4}{\sim} \pi_1(\varphi_0)$

$\equiv \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ (なぜなら、§3の命題1より $\varphi_0(b_1) = a_1^{-1}$

$\equiv a_1$ 、 $\varphi(b_2) = a_2^{-1} \equiv a_2$ 、かつ定義より $\pi_1(\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; \varphi_0(b_1)$

$, \varphi_0(b_2) \rangle$) を得る。

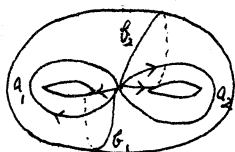
Note. 系の証明から、実際は、strongly simply trivial
を示す変換 S_4 (代入)、 S_1 (cyclic reduction) の系列
として、 S_1 を用いない S_4 のみのものが得られることがわかる。

§3. 定理の証明.

[3] or [4] により、(*) を満たす homeomorphisms の
isotopy classes のなす群は 5 個の classes で生成
され、その representative homeomorphisms の
induced π_1 -isomorphisms は次の通りである。

命題1. $\rho, \dot{\omega}_1, \dot{\epsilon}_1, \dot{\theta}_{12}, \dot{\epsilon}_{12}$ を [3] 又は [4] で定
められた ∂T 上の self-homeomorphisms とし、 $\pi_1(\partial T)$
の生成系を下図のようにとる。又、 $\tilde{V}_2^\pm = \{ \rho, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_1^{-1},$

$\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_1^{-1}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{12}^{-1}, \dot{\tilde{\tau}}_{12}, \dot{\tilde{\tau}}_{12}^{-1}$ } と書くことにする。



$\pi_1(\partial T)$ の生成系

table I) 1)

$$\dot{\rho}_{\#} = \dot{\rho}_{\#}^{-1} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_2 \\ a_2 \rightarrow a_1 \\ b_1 \rightarrow b_2 \\ b_2 \rightarrow b_1 \end{cases}$$

$$2) \quad \dot{\omega}_1_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 a_1 \\ b_1 \rightarrow a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \end{cases}$$

$$\dot{\omega}_1^{-1}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1^{-1} a_1^{-1} b_1 \\ b_1 \rightarrow b_1^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1 \end{cases}$$

$$3) \quad \dot{\tau}_1_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1^{-1} a_1 \end{cases}, \quad \dot{\tau}_1^{-1}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1 a_1 \end{cases}$$

$$4) \quad \dot{\theta}_{12}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 b_2^{-1} a_2^{-1} b_2 \\ b_2 \rightarrow a_2 b_2 b_1 a_2^{-1} \end{cases}, \quad \dot{\theta}_{12}^{-1}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1 a_1 a_2 b_1^{-1} \\ b_2 \rightarrow b_2 a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 \end{cases}$$

$$5) \quad \dot{\tilde{\tau}}_{12}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1 a_1 b_2^{-1} b_1^{-1} \\ a_2 \rightarrow b_2 a_2 b_1^{-1} b_2^{-1} \end{cases}, \quad \dot{\tilde{\tau}}_{12}^{-1}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow b_1^{-1} a_1 b_1 b_2 \\ a_2 \rightarrow b_2^{-1} a_2 b_2 b_1 \end{cases}$$

$$6) \quad \dot{\varphi}_0_{\#} : \begin{cases} a_i \rightarrow a_i^{-1} b_i a_i \\ b_i \rightarrow a_i^{-1} \end{cases} \quad (i=1,2)$$

$f_{\#}(a_i) = a_i$ のような自明なものも上の table I から省いた。

table II) とくに, $b_1 = b_2 = 1$ とすると,

$$1)' \quad \dot{\rho}_{\#}^{\pm} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_2 \\ a_2 \rightarrow a_1 \end{cases}$$

$$2)' \quad \dot{\omega}_1^{\pm}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1^{-1} \end{cases}$$

$$3)' \quad \dot{\tau}_1^{\pm}_{\#} = 1$$

$$4)' \quad \dot{\theta}_{12}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2^{-1} \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_{12}^{-1}_{\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2 \end{cases}$$

$$5)' \quad \dot{\tilde{\tau}}_{12}^{\pm}_{\#} = 1$$

table I と同じく, 自明なものは省いた。

Remark 3. $\mathcal{S}_1 \ni \forall \varphi = f \varphi_0$ に対し, $f \sim f_m \cdots f_1$
 $(f_i \in \tilde{\mathcal{V}}_2^+, i=1, \dots, m)$ とする。 $f_m \# \cdots f_1 \# \varphi_0(b_1) = A_1(a_1, a_2, b_1, b_2)$,
 $f_m \# \cdots f_1 \# \varphi_0 \# (b_2) = A_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ ($=1$ に,
 $A_1(a_1, a_2, b_1, b_2), A_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ は 文字 a_1, a_2, b_1, b_2 に係る
word) とするに, $r_1' = A_1(a_1, a_2, 1, 1)$, $r_2' = A_2(a_1, a_2, 1, 1)$ は a_1, a_2 に係る word r の cyclically reduced
words, $r_1 = \overline{r_1'}$, $r_2 = \overline{r_2'}$ により, reduced を表示
 $\pi_1(\varphi) \equiv \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ をうるが, $\tilde{\mathcal{V}}_2^+ \ni \forall g$ に対し
 $b_1 = 1$ かつ $b_2 = 1$ と, $g \# (b_1) = 1$ かつ $g \# (b_2) = 1$ は同値
であるから, table II を用いて, $r_1' \equiv f_m \# \cdots f_1 \# (a_1)$,
 $r_2' \equiv f_m \# \cdots f_1 \# (a_2)$ として, 得られる。以下, table II を用いる。

定理1の証明

[3] または [4] より $f \sim f_n \cdots f_1$ となる $f_i \in \tilde{\mathcal{V}}_2^+ (i=1, \dots, n)$ が存在する。合成の長さ n についての帰納法で示す。

Step 1. $n=0$ のとき, $f \sim 1$ だから, $\pi_1(f \varphi_0) \equiv \pi_1(\varphi_0)$
 $\equiv \langle a_1, a_2; \overline{\varphi_0 \# (b_1)}, \overline{\varphi_0 \# (b_2)} \rangle \equiv \langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$,
(ここに, 「 $\overline{\quad}$ 」は reduced の意) で成立。

Step 2. $n-1 (\geq 0)$ のとき成り立つと仮定して, n の
ときについて示す。仮定より, $\hat{f} = f_{n-1} \cdots f_1$ (但し, $n=1$ の
とき, $\hat{f} = 1$) とすると, $\pi_1(\hat{f} \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; \hat{r}_1, \hat{r}_2 \rangle$

は、次の条件を満たす。

$$\hat{r}_1 = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k} \cdots \text{ type I}$$

$$\text{又は } a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2 \cdots \text{ type II}$$

で、 i) $\varepsilon_j \neq 0$ ($j=1, \dots, k$) (但し, $k=0$ のとき, $\hat{r}_1 = a_1 a_2$)

ii) 1) $|\varepsilon_s - \varepsilon_t| \leq 1$ for $1 \leq s, t \leq k$

か 2) $k > 1$ のとき, $\varepsilon_s \neq \varepsilon_t$ とする $1 \leq s, t \leq k$ が存在する。

iii) $k > 1$ のとき, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l_1}) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} (\varepsilon_{l_m})$, 各組は i), ii) を満たし, $l_j \geq 2$ ($j \neq m$), $l_m = 1$ 。

である。さて, $\pi_1(f\varphi_0) \equiv \pi_1(f_n \hat{f}\varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; \overline{f_{n\#}}(\hat{r}_1), \overline{f_{n\#}}(\hat{r}_2) \rangle \equiv \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ であるから, 命題1の table II より, $f_n = \dot{p}, \dot{\omega}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{12}^{-1}$ の場合のみ考えればよい。以下, $\hat{r}_1$ の type に分けて考える。

(1) $k=0$ のとき, i.e. $\hat{r}_1 = a_1$ 又は a_2 のとき, table II より, $r_1 \equiv a_1, a_2$ 又は $a_1 a_2^{\pm}$ で成立。

(2) $k \geq 1$ のとき,

(I) type I のとき, i.e. $\hat{r}_1 = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ のとき,

(a) $f_n = \dot{p}, \dot{\omega}$ のとき, 性質 i), ii), iii) は巡回置換及び逆によって不変だから, 成立。(但し, $\dot{p}$ では type I から type II へ変わる。)

(b) $f_n = \dot{\theta}_{12}$ のとき, table II より $f_{n\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2^{-1} \\ a_2 \rightarrow a_2 \end{cases}$

だから, $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1-1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k-1}$. したがって, $\forall \varepsilon_j \neq 1$ のとき, $(\varepsilon_1-1, \dots, \varepsilon_k-1)$ は i), ii) を満たし, 更に, Remark 1 より iii) も満たす。又, もし $\exists \varepsilon_{j_0} = 1$ ($1 \leq j_0 \leq k$) ならば $k=1$ のときは明らかだから, $k > 1$ とすると, i), ii) より $\varepsilon_j = 1, 2$, 即ち, $\varepsilon_j - 1 = 0, 1$ である。iii) における $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (1\varepsilon_1, \dots, 1\varepsilon_k)$ を, $\varepsilon_k = 2$ として (必要なら巡回置換を施す。), $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ の左端から, 1 の個数を数えて得られたものとする。 $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1-1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k-1} = a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ (なぜなら, $\cdots a_1 a_2^1 (a_1 a_2^0 \cdots a_1 a_2^0) a_1 a_2^1 \cdots = \cdots a_1 a_2 a_1^{\varepsilon+1} a_2 \cdots$ であり, これは operation d に対応するから。) を得る。ところで, iii) より組 $(1\varepsilon_1, \dots, 1\varepsilon_k)$ は条件 i), ii), iii) を満たす。

(C) $f_n = \theta_{12}^{-1}$ のとき, table II より, $f_{n\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2 \\ a_2 \rightarrow a_2 \end{cases}$ だから, $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_1+1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k+1}$. $\forall \varepsilon_j \neq -1$ ならば, $(\varepsilon_1+1, \dots, \varepsilon_k+1)$ は条件 i), ii), iii) を満たす。 $\exists \varepsilon_{j_0} = -1$ ($1 \leq j_0 \leq k$) ならば, $k=1$ のときは $r_i = a_1 a_2^{\varepsilon_0+1} = a_1$ で明らか。 $k > 1$ とする。 i), ii) より $\varepsilon_j = -1, 2$, 即ち, $\varepsilon_j + 1 = 0, -1$ である。 (B) におけると同様にして, $r_i \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1+1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k+1} \equiv a_1^{\varepsilon_1} a_2^{-1} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2^{-1} \equiv a_1^{-\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{-\varepsilon_k} a_2$ であり, 組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすことと Remark 1 より, 組 $(-\varepsilon_k, \dots, -\varepsilon_1)$ は, i), ii), iii) を満たす。

(II) type II, 即ち, $\hat{r}_i = a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ のとき。

(a) $f_n = \rho, \omega$, のときは, 前と同様にして成立。

(b) $f_n = \theta_{1,2}$ のとき, table II より $f_{n+1} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2^{-1} \\ a_2 \rightarrow a_2 \end{cases}$ だから, $r_i = \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k} a_2\}$ 。

① $\forall \varepsilon_j > 0$ とすると, $r_i = \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1-1} a_1\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k-1} a_1\}$ a_1 について, (1) $\exists \varepsilon_{j_0} = 1$ ($1 \leq j_0 \leq k$) のとき, $k=1$ ならば, $r_i = (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_{j_0}} a_2 = a_1$ である。 $k > 1$ とする。

i), ii) より $\varepsilon_j = 1, 2$, 即ち, $\varepsilon_j - 1 = 0, 1$ より,

$$\begin{aligned} r_i &= (a_1^{\varepsilon_1-1} a_2^{-\varepsilon_1+1} a_1) \cdots (a_1^{\varepsilon_k-1} a_2^{-\varepsilon_k+1} a_1) \\ &\equiv a_1^{\varepsilon_1} a_2^{-\varepsilon_1+1} a_1^{\varepsilon_2} a_2^{-\varepsilon_2+1} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2^{-\varepsilon_k+1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{巡回置換} \\ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \xrightarrow{d} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \text{ の定義より} \end{array} \right\} \\ &\equiv a_1^{\varepsilon_1+1} a_2^{-1} \cdots a_1^{\varepsilon_k+1} a_2^{-1} \\ &\equiv a_1^{-\varepsilon_k-1} a_2 \cdots a_1^{-\varepsilon_1-1} a_2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{逆と巡回置換} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすこと及び Remark 1 より,

組 $(-\varepsilon_k-1, \dots, -\varepsilon_1-1)$ も i), ii), iii) を満たす。

(ロ) $\forall \varepsilon_j \neq 1$ のとき, $\forall \varepsilon_j \geq 2$ であり, したがって,

$$\begin{aligned} r_i &\equiv \{a_1^2 a_2^{-1} (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_1-2}\} \cdots \{a_1^2 a_2^{-1} (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k-2}\} \\ &\equiv \{(a_2 a_1^{-1})^{\varepsilon_k-2} a_2 a_1^{-2}\} \cdots \{(a_2 a_1^{-1})^{\varepsilon_1-2} a_2 a_1^{-2}\} \\ &\equiv \{(a_1^{-1} a_2)^{\varepsilon_k-2} a_1^{-2} a_2\} \cdots \{(a_1^{-1} a_2)^{\varepsilon_1-2} a_1^{-2} a_2\} \end{aligned}$$

であるから, $a_1^{\bar{\varepsilon}_1} a_2 \cdots a_1^{\bar{\varepsilon}_k} a_2$ の形で表わすと $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_k) = (\underbrace{-1, \dots, -1}_{\varepsilon_k-2}, -2, \dots, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\varepsilon_1-2}, -2)$ となり, i), ii) を満たす。更に, $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_k) \xrightarrow{d} (\varepsilon_k-1, \dots, \varepsilon_1-1)$ だから,

組 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ が iii) を満たすこと及び Remark 1 より,
組 $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_k)$ も iii) を満たす。

② $\forall \varepsilon_j < 0$ とすると, $r_i = \{(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_k} a_2\}$
 $\equiv \{a_2^2 a_1^{-1} (a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_1-1}\} \cdots \{a_2^2 a_1^{-1} (a_2 a_1^{-1})^{-\varepsilon_k-1}\}$
 $\equiv \{(a_1 a_2^{-1})^{-\varepsilon_k-1} a_1 a_2^{-2}\} \cdots \{(a_1 a_2^{-1})^{-\varepsilon_1-1} a_1 a_2^{-2}\}$ である
 から, $a_1 a_2^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots a_1 a_2^{\bar{\varepsilon}_k}$ の形で表わすと, $(\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_k) =$
 $(\underbrace{-1, \dots, -1}_{-\varepsilon_k-1}, -2, \dots, \underbrace{-1, \dots, -1}_{-\varepsilon_1-1}, -2)$, よって, 前 (①の(i)) と
 同様に, i), ii), iii) を満たすことがわかる。

(c) $f_n = \dot{\theta}_{12}^{-1}$ のとき, table II より $f_{n*} : \begin{cases} a_1 \rightarrow a_1 a_2 \\ a_2 \rightarrow a_2 \end{cases}$
 だから, $r_i = \{(a_1 a_2)^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_1 a_2)^{\varepsilon_k} a_2\}$ 。よって,

$$r_i \equiv \{(a_2 a_1)^{\varepsilon_1} a_2\} \cdots \{(a_2 a_1)^{\varepsilon_k} a_2\} \cdots \textcircled{1}'$$

$$\equiv \{(a_1 a_2)^{-\varepsilon_k} a_2^{-1}\} \cdots \{(a_1 a_2)^{-\varepsilon_1} a_2^{-1}\} \cdots \textcircled{2}'$$

に注意すれば, $\forall \varepsilon_j > 0$ のとき, r_i を ①' とみなせば, (b) の
 ①と, $\forall \varepsilon_j < 0$ のとき, ②' とみなせば, (b) の ②と同様
 にして, 成り立つことが示めされる。

定理2の証明

m についての帰納法で示す。 $\pi_1(f_m \cdots f_1 y_0) \equiv \langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$ とする。

Step I $m=1$ のとき, $f_1 = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ (なぜなら, $f_1 \in \dot{\mathcal{C}}_2^{\pm}$
 は $\pi_1(f_1 y_0)$ の minimal representation だから。) だか
 ら, table II より, $\pi_1(f_1 y_0) \equiv \langle a_1, a_2; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle \xrightarrow{S_4}$

$\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle \equiv \pi_1(Y_0)$ で成立。

Step II. $m-1 (\geq 1)$ 以下のとき, 成り立つと仮定して, m のときについて示す. $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{V}_2^\pm$ は $\pi_1(f_m \cdots f_1 Y_0)$ の *minimal representation* だから, $f_1, \dots, f_{m-1} \in \mathcal{V}_2^\pm$ も $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 Y_0)$ の *minimal representation* (なぜなら, 一般に $\pi_1(Y_1) \equiv \pi_1(Y_2)$ ならば $\pi_1(f Y_1) \equiv \pi_1(f Y_2)$, ことに f は任意の *homeomorphism*.) よって, 仮定から, $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 Y_0) \stackrel{S_4}{\sim} \pi_1(f_{m-1} \cdots f_2 Y_0) \cdots$ ① である. 今, $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 Y_0) \equiv \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$, $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_2 Y_0) \equiv \langle a_1, a_2; \hat{r}_1, \hat{r}_2 \rangle$ とし, ① の代入 S_4 は r_2' の r_1' への代入 (これを $r_1' > r_2'$ と書くことにする.) としてよい. このとき, $r_2' \equiv \hat{r}_2$ である. table II より, $f_m = \tau_1^\pm, \tilde{\tau}_{1,2}^\pm, \rho^\pm, \omega_1^\pm$ のときは明らかだから, $f_m = \theta_{1,2}^\pm$ のときについて考えれば十分. 定理 I により, r_1', r_2' の word としての type に分けて考える.

Case 1. $r_1' \equiv a_1 a_2^{\epsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\epsilon_k}$ (type I) とすると, $r_1' > r_2'$ 及び *homology group* ($= \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$ のアーベル化群) $= 0$ より, $k \geq 1$ である. 以下, r_2' の word の形により場合に分けて考える.

(1) $r_2' = a_1 \cdots a_2^\pm$ の形するとき, 必要なら r_1' に巡回置換

を施すことにし、 $r_2' = a_1 a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k-1}} a_1 a_2^{\varepsilon_k - \varepsilon}$ ($\varepsilon = 1$,
 $|\varepsilon| < |\varepsilon_k|$, $\varepsilon \varepsilon_k \geq 0$) としてしよ。即ち, $r_1' = (a_1 a_2^{\varepsilon_1}$
 $\cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k-1}}) a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k} = r_2' a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ 。

したがって, $f_m = \dot{\theta}_{12}^{\pm}$ のとき, table II より $f_{m\#} : \begin{cases} a_1 \rightarrow \\ a_2 \end{cases}$
 $a_1 a_2^{\mp}$ だから, $r_1 = f_{m\#}(r_1') = (a_1 a_2^{\varepsilon_1 \mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k - \varepsilon \mp 1}) a_2^{\varepsilon}$
 $a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1} \mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1} \mp 1}$ である。したがって, $\langle a_1, a_2; r_1, r_2 \rangle$
 $\xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; a_2^{\varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1} \mp 1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1} \mp 1}, r_2 \rangle = \langle a_1, a_2; f_{m\#}(\hat{r}_1)$
 $, f_{m\#}(\hat{r}_2) \rangle \equiv \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ で成立。

(1)' $r_2' = a_2^{\pm} \cdots a_1$ の形のとき, r_1' が type I だから,
 巡回置換により, $r_2' \equiv \cdots a_1 a_2^{\pm}$ として代入 S_4 を行っても同
 じことだから, (イ) 又は (ii)' (後述) に帰着される。

(ii) $r_2' = a_1$ のとき, homology group = 0 より, $k=1$ か
 っ $\varepsilon_1 = \pm 1$ 。したがって, $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; a_1 a_2^{\pm 1}$
 $, a_1 \rangle \equiv \pi_1(\dot{\rho} \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$ だから, $m=3$ で, $f_1 = \dot{\theta}_{12}^{\mp}$, f_2
 $= \dot{\rho}$ 。又, $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{V}_2^{\pm}$ は $\pi_1(f_3 f_2 f_1 \varphi_0)$ の minimal
 representation だから, $f_3 = \dot{\theta}_{12}^{\mp}$ (複号同順)
 のみ可。(なぜなら, $\pi_1(\dot{\rho} \dot{\rho} \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$,
 $\pi_1(\dot{\omega}_1 \dot{\rho} \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\rho} \dot{\theta}_{12}^{\pm} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\pm} \dot{\rho} \dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0)$
)。よって, $\pi_1(f_3 f_2 f_1 \varphi_0) \equiv \langle a_1, a_2; a_1 a_2^{\pm 2}, a_1 a_2^{\pm} \rangle$
 $\xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; a_2^{\pm}, a_1 a_2^{\pm} \rangle \equiv \langle a_1, a_2; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle \equiv \pi_1$
 $(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \varphi_0) \equiv \pi_1(\dot{\theta}_{12}^{\mp} \dot{\rho} \varphi_0) \equiv \pi_1(f_2 f_1 \varphi_0)$ である。

(D)' $r_2' = a_1 \cdots a_1$ の形のとき, *homology group* = 0 より $\cdots \supset a_2^{\pm}$ である。(1)と同様に, $r_2' = a_1 a_2^{\epsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\epsilon_k} a_1$, $r_1' = r_2' a_2^{\epsilon_{k+1}} \cdots a_1 a_2^{\epsilon_k}$ としてよい。こゝに, $1 \leq k' < k \cdots$ (A) である。実際にはこの場合が生じないことを, $m-1$ についての帰納法で示す。 $m-1=1$ のとき, $\pi_1(f_1, y_0) \equiv \langle a_1, a_2; a_1 a_2^{\pm}, a_2 \rangle$ だから, 明らかに生じない。 $m-2 (\geq 1)$ 以下で生じないものとする。 $m-1$ のときについて考える。もし, 生じたとすると, $\pi_1(f_{m-1} \cdots f_1, y_0) \equiv \langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle$
 $\searrow^S \langle a_1, a_2; \hat{r}_1, r_2' \rangle \equiv \pi_1(f_{m-1} \cdots f_2, y_0)$ (こゝに, $\hat{r}_1 = a_2^{\epsilon_{k+1}} \cdots a_1 a_2^{\epsilon_k}$)。ところが, 右辺の *minimal representation* の長さは $(m-2)$ 以下でかつ (A) より 2 以上, よって, Step 2 の仮定より $\hat{r}_1 > r_2'$ 又は $r_2' > \hat{r}_1$ 。(D)' の帰納法の仮定から前者は生じない。後者についても, 定理 1 を r_2' に適用すると, a_1^2 の項を含むことから, $\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_k = \pm 1$, 又 r_1' において, もし, $k - k' = 1$ ならば $\hat{r}_1 = a_2^{\epsilon_k}$, よって, *homology group* = 0 より $\epsilon_k = \pm 1$, 即ち, $\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_k = \pm 1$ となり, (A) より $k > 1$ だから, 条件 ii) $\exists \epsilon_{j_0} = \pm 2$ ($k'+1 \leq j_0 \leq k$) に反する。 $k - k' > 1$ とする。 $\hat{r}_1 \equiv a_1 a_2^{\epsilon_{k'+2}} \cdots a_1 a_2^{\epsilon_k + \epsilon_{k'+1}}$ だから, もし, $j_0 = k$ 又は $k'+1$ ならば $|\epsilon_k + \epsilon_{k'+1}| \geq 3$ で, 又, $k'+1 < j_0 < k$ ならば, $|\epsilon_{j_0}| = 2$, $|\epsilon_k + \epsilon_{k'+1}| \geq 2$ である。

にせよ, $r_2' > \hat{r}_1$ とはならない。よって (ロ)' の場合は生じない。

(イ) $r_2' = a_2^{\pm}$ のとき, homology group = 0 より $k=1$, 更に, $f_1, \dots, f_{m-1} \in \dot{V}_2^{\pm}$ 及び $f_1, \dots, f_m \in \dot{V}_2^{\pm}$ はそれぞれ, $\pi_1(f_{m-1} \dots f_1, \mathcal{Y}_0)$, $\pi_1(f_m \dots f_1, \mathcal{Y}_0)$ の minimal representation だから, $f_1 = \dots = f_m = \theta_{1,2}^{\pm}$ となり, 直接, 確かめられる。

(イ)' $r_2' = a_2^{\pm} \dots a_2^{\pm}$ の#のとき, homology group = 0 より $\dots \rightarrow a_1$, 又, $\hat{r}_1 (= r_1' - r_2') \ni a_1$ としてよい。(もし, $\hat{r}_1 \not\ni a_1$ ならば, $r_1' \equiv a_1 a_2^{\varepsilon_1}$, $r_2' \equiv a_2^{\varepsilon_2} a_1 a_2^{\varepsilon_1'}$ ($\varepsilon \varepsilon' > 0$, $|\varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon_1| = 1$) となり, $r_2' \equiv a_1 a_2^{\varepsilon + \varepsilon'}$ とみなせるから, (イ) に帰着される。) (イ) と同様に, $r_2' = a_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon} a_1 a_2^{\varepsilon_2} \dots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'} - \varepsilon'}$ ($1 < k' \leq k$, $|\varepsilon| < |\varepsilon_1|$, $\varepsilon \varepsilon_1 \geq 0$, $|\varepsilon'| < |\varepsilon_{k'}|$, $\varepsilon' \varepsilon_{k'} \geq 0$), $r_1' = a_1 a_2^{\varepsilon} r_2' a_2^{\varepsilon_1'} a_1 a_2^{\varepsilon_{k+1}} \dots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ としてよい。更に, $\varepsilon' = 0$ としてよい。(なぜなら, 巡回置換により $r_2' \equiv a_2^{\varepsilon_1 - \varepsilon \pm 1} a_1 a_2^{\varepsilon_2} \dots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'} - \varepsilon' \mp 1}$ とみなしても, r_1' への代入 S_4 の効果は同じだから, これを繰り返せばよい。もし, 途中で, $\varepsilon_1 - \varepsilon \pm 1 = 0$ になったら, これは (イ) の場合に帰着される。) 又, もし, $\varepsilon \neq 0$ ならば, $f_m = \theta_{1,2}^{\pm}$ に対し, $\pi_1(f_m \dots f_1, \mathcal{Y}_0) \equiv \langle a_1, a_2; f_{m\#}(r_1'), f_{m\#}(r_2') \rangle \xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; f_{m\#}(\hat{r}_1)$

$f_{m\#}(r_2') > \equiv \pi_1(f_m \cdots f_2 g_0)$ が直接, 確かめられるから, 成立。よって, $\varepsilon = 0$ とする。この場合は実際には生じないことを示す。もし, 生じたとすると, $r_2' = a_2^{\varepsilon_1} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_{k'}}$, $r_1' = a_1 r_2' a_1 a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ である。もし, $k' = k$ ならば $\langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle \stackrel{S_4}{\sim} \langle a_1, a_2; a_1, r_2' \rangle$ だから, $\text{homology group} = 0$ より, $k' (=k) = 1$ から $\varepsilon_1 = \pm 1$ 。ところが (i)' の最初に触れたように, $\cdots \ni a_1$ だから, $k \geq 2$ でなければならず, 矛盾を生ずる。よって, $k - k' > 1$ とする。定義から $\hat{r}_1 \equiv a_1^2 a_2^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1 a_2^{\varepsilon_k}$ となり, Step 2 の仮定より $\hat{r}_1 > r_2'$ 又は $r_2' > \hat{r}_1$ 。ところが, 前者は (ii)' と同様にして (即ち, 定理 1 より $\varepsilon_{k'+1} = \cdots = \varepsilon_k = \pm 1$, かつ $\exists \varepsilon_{j_0} = \pm 2$ 等を用いる。), 不可。又, 後者も, (ii)' により生じない。故に, (i)' における不都合な場合, 即ち, $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ の場合は生じない。

Case 2. $r_1' = a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ (type II) のとき, $\text{homology group} = 0$ より, $k \geq 1$ 。Case 1 と同様に r_2' の word としての形により場合に分ける。

(i) $r_2' = a_2 \cdots a_1^{\pm}$ の形のとき, 前と同様に, $r_2' = a_2 a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_1^{\varepsilon_k}$, $r_1' = a_1^{\varepsilon_1} r_2' a_1^{\varepsilon_{k+1}-\varepsilon} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ ($|\varepsilon| \leq |\varepsilon_k|$, $\varepsilon \varepsilon_k > 0$, $1 < k' \leq k$) としてよい。 $\forall \varepsilon_j < 0$ のとき, 代入 $r_1' > r_2'$ は $f_{m\#} = \theta_{12}^{\pm\#}$ による変形でも, $f_{m\#}(r_2')$

の両端で新たな reduction を生じなかつから, そのまま保たれ, $r_1 = f_{m\#}(r'_1) > f_{m\#}(r'_2) = r_2$ であるから,
 $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \xrightarrow{S_4} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ をうる。 $\forall \varepsilon_j < 0$ のときも, $\theta_{12\#}(r'_2) = a_2 (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_2} \cdots (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_k} \equiv (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_2} \cdots (a_1 a_2^{-1})^{\varepsilon_{k-1}} a_1$, に注意すれば, 同様に $\pi_1(f_m \cdots f_1 \varphi_0) \xrightarrow{S_4} \pi_1(f_m \cdots f_2 \varphi_0)$ をうる。

(1)' $r'_2 = a_1^{\pm} \cdots a_2$ の形のとき, $r'_2 = a_1^{\varepsilon_1} a_2 \cdots a_1^{\varepsilon_{k'}} a_2$,
 $r'_1 = a_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon} r'_2 a_1^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ ($|\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$ $\in \varepsilon_1 > 0$)
 としてよく, (1) と同様に直接確かめられる。

(ロ) $r'_2 = a_2$ のとき, homology group = 0 より,
 $k=1$, $\varepsilon_1 = \pm 1$ だから, $r'_1 \equiv a_1 a_2^{\mp}$ で, case 1 に帰着される。

(ロ)' $r'_2 = a_2 \cdots a_2$ の形のとき, homology group = 0 より $\cdots \ni a_1$ である。前と同様にして, $r'_2 = a_2 a_1^{\varepsilon_2} \cdots a_1^{\varepsilon_{k'}} a_2$ ($1 < k' \leq k$), $r'_1 = a_1^{\varepsilon_1} r'_2 a_1^{\varepsilon_{k'+1}} \cdots a_2$ としてよく, Case 1 の (ロ)' と同様に考えれば, この場合が実際には生じなかつことが示めされる。

(ハ) $r'_2 = a_1^{\pm}$ のとき, homology group = 0 より,
 $k=1$ 。 $|\varepsilon_1| = 1$ のとき, case 1 の (ロ) に帰着される。
 $|\varepsilon_1| > 1$ のとき, $r'_2 = a_1^{\varepsilon}$ ($\varepsilon = \pm 1$) とすると,
 $r'_1 \equiv a_1^{\varepsilon} a_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon} a_2 \equiv a_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon} a_1^{\varepsilon} a_2$ だから, $\varepsilon > 0$ のとき, 前者

と, $\varepsilon < 0$ のとき後者とみなせば, 直接確かめられる。

(ii)' $r_2' = a_1^{\pm} \cdots a_1^{\pm}$ の形のとき, *homology group* = 0 より, $\cdots \rightarrow a_2$ である。又, 前と同様に, $r_2' = a_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon} a_2 \cdots a_2 a_1^{\varepsilon_{k'} - \varepsilon'}$ ($\cdots \rightarrow a_2$ だから, $k' > 1$), $r_1' = a_1^{\varepsilon} r_2' a_1^{\varepsilon'} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$ ($|\varepsilon| < |\varepsilon_1|$, $\varepsilon \varepsilon_1 \geq 0$, $|\varepsilon'| < |\varepsilon_{k'}|$, $\varepsilon' \varepsilon_{k'} \geq 0$) としてよく, 更に, Case 1 の (ii)' と同様に考えて, $\varepsilon' = 0$ としてよい。もし, $\varepsilon > 0$ ならば, $r_2' = a_1^{\varepsilon_1 - \varepsilon + 1} a_2 \cdots a_2 a_1^{\varepsilon_{k'} - 1}$ とみなし, $\varepsilon < 0$ ならば, そのままで, 直接, $\pi_1(t_m \cdots t_1 \varphi_0) \xrightarrow{S_4} \pi_1(t_m \cdots t_2 \varphi_0)$ が確かめられる。残りは $\varepsilon = 0$ の場合であるが, この場合は実際には生じないことを示す。仮定より, $\langle a_1, a_2; r_1', r_2' \rangle \xrightarrow{S_4} \langle a_1, a_2; \hat{r}_1, r_2' \rangle$ (ここに, $\hat{r}_1 = a_2 a_1^{\varepsilon_{k'} + 1} \cdots a_1^{\varepsilon_k} a_2$) であるが, $k' = k$ のとき, $\hat{r}_1 = a_2$ となり, *homology* = 0 に反する。 $k - k' \geq 1$ とする。Step 2 の仮定より, $\hat{r}_1 > r_2'$ 又は $r_2' > \hat{r}_1$ が成り立つ。ところが, 前者は Case 1 の (ii)' と同様にして不可, 後者も Case 2 の (ii)' で不可であるから, 矛盾が生じた。よって, (ii)' における不都合な場合 (i.e. $\varepsilon = \varepsilon' = 0$) は生じない。

§ 4. 検討.

すべての S^3 の種数 2 の Heegaard sewings の集合 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S} = \{ \varphi = t \varphi_0 \mid t, \varphi \text{ は条件 } (*) \text{ を満たす} \}$ で与えら

れる。もちろん、我々の究極の目標は、

問題1. 「 $\mathcal{L} \ni \varphi$ に対して、 $\pi_1(\varphi)$ は *strongly simply trivial* か。」

であるが、 $\mathcal{L}_1$ について解決できた現段階では、次の step として、

問題2. 「 $\mathcal{L}_2 := \{ \varphi = \varphi_0 \varphi_1 \mid \varphi_i \text{ は条件 } (*) \text{ を満たす} \}$ に対して、定理1, 2 及び 系 のような議論はできないか。」は、自然である。この場合、Remark 3. のことが有効でなくなり、したがって、table I しか使えないという困難がある。問題2から問題1はそう遠くないように思われる。

References.

- [1] 金戸武司, S^3 の Heegaard 分解による π_1 の表示について, 数理研講究録 297 (1977), 69-84.
- [2] ———, On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan (to appear).
- [3] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. 29 (1977), 111-124.
- [4] ———, 閉曲面の写像類群, 数理研講究録 297 (1977), 1-21.