

回転球面上の円領域における2次元流体運動

東大数理科学 谷口由紀 (Yuki Taniguchi)

山田道夫 (Michio Yamada)

石岡圭一 (Keiichi Ishioka)

Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

1 はじめに

回転球面上において2次元的な流体の乱流運動はどのようなものだろうか？これは、現実の大気や海洋の運動を考えるには単純すぎるが、もっとも簡単な状況における流体運動をきちんと理解することは複雑な現象を考察する上で重要なことと思われる。

回転球面上の流体運動の振る舞いについての研究は、まず、1978年に Williams によって強制乱流実験の数値実験が行われた。これは流れ場に強い制約のあるモデルでの数値実験であるが、球面上に縞状構造が出現することが明らかとなった。また、1993年に Yoden and Yamada が減衰乱流では自転速度が十分に速いと極に東風ジェットを形成すること、帯状の縞構造が出現することを示した。1996年には Cho and Polvani が浅水系では減衰乱流から帯状縞構造が出現することを、1997年に Nozawa and Yoden が2次元強制乱流においても帯状縞構造が形成されることを確認した。最近では1999年に、Ishioka, Yamada, Hayashi and Yoden が減衰系で球自転速度が速い場合に極で東風ジェットが出現するのは初期条件に依存しないことや、初期エネルギーを十分小さなスケールに与えておくと、減衰乱流でも帯状の縞構造が出現することを確認した。

これまでの研究は全て回転球面上の全領域における数値実験であった。それでは、回転球面上に例えば円い島があったら、その周りでの流れはどのように変化するのだろうか、という疑問が浮かぶ。そこで本研究は、回転球面上のある場所に、適当な大きさの円い島がある場合の数値実験を試みる。そうした時の島の周りの流体運動について、流れ関数や渦度の時間発展の変化を観測する。特に今回は円い島が半球である場合についての結果を報告する。

2 数値計算法

まず、本研究で用いた数値計算法について述べる。球面上の円い島の位置はいつも同じであるとは限らない。そこで、球面上の円い島の中心が北極の位置になるように移動す

る。そして、その点を基準として島の周りの領域を等角写像を用いて平面単位円板に写す。従って、回転球面上において円い島の周りの流れを数値計算することは、単位円内で Navier-Stokes 方程式を境界条件を満たすように解く問題に置き換えることができる。また、このような変数変換を行うと、基礎方程式を渦度方程式で書いた時の、非線形項とラプラシアンにかかるファクターが同じ形になるので、島の大きさを自由に変えることができるようになる。

そこで、以下に回転球面上全体の渦度方程式と変数変換を行った後の単位円板内の渦度方程式を示す。今回は、島の大きさが半球の場合についての数値実験を行ったので、その時の方程式形となっている。

- 全球:

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(\theta, \psi)} + 2\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} = \nu \Delta^2 \Psi$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$$

- 半球:(今回の数値計算で使用した方程式)

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{(1+r^2)^2}{4r} \frac{\partial(\Psi, \Delta \Psi)}{\partial(r, \psi)} + \Omega \left\{ -(1+r^2) \sin \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(2 \cos \Theta - \frac{1-r^2}{r} \sin \Theta \cos \psi \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \psi} \right\} = \nu \Delta^2 \Psi$$

$$\Delta = \frac{(1+r^2)^2}{4r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right)$$

ここで、 Ψ は流れ関数、 ψ は経度、 θ は $\frac{\pi}{2} - \text{緯度}$ 、 $r = \sin \theta / (1 - \cos \theta)$ は半径を表す。この基礎方程式を、境界条件が $\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$, ($r = 1$) のもとで解く。上の2式を比較すると、半球の方程式はコリオリ項が多少複雑になるが、残りは非線形項とラプラシアンに同じファクター $\frac{(1+r^2)^2}{4r}$ がかかるだけで同じ形になっていることがわかる。

本研究では、まず、流れ関数 $\Psi(r, \psi, t)$ を

$$\Psi(r, \psi, t) = \sum_n R_n(r) e^{-in\psi}$$

でフーリエ級数展開した。そして、境界条件を満たし $r = 0$ で特異性を持たないように $R_n(r)$ を半径方向にチェビシェフ多項式で展開した。この時の展開形は

$$\begin{aligned} R'_0(0) &= R_0(1) = R'_0(1) = 0 \\ R_1(0) &= R''_1(0) = R_1(1) = R'_1(1) = 0 \\ R_n(0) &= R'_n(0) = R_n(1) = R'_n(1) = 1 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

である。このように展開した展開係数は選点法を用いてきめた。また、時間積分については crank nicolson と 4 次の Runge-Kutta 法を用いた。

3 数値実験

3.1 実験の状況

本研究で用いた島の位置は、球を赤道に垂直な平面で2つ半球に分けてどちらか一方が島である場合(縦半球)と、北極を含むようにその島を 45° 傾けた場合(斜め半球)の2通りである。また、初期値については、流れ関数が同心円状のものと、Cho and Polvani(1996)が用いた乱流場に境界条件を満たすような関数を掛けたものを与えた。粘性係数 ν は 10^{-2} で、球自転角速度 Ω は 400(木星に相当する)とした。

3.2 縦半球

まず初めに島が縦半球の場合の結果を示す。縦半球については初期の流れ場が同心円状の場合について数値実験を行った。初期の流れ場の時間発展を流れ関数で求めた結果、南北対称の流れのパターンが時間と共に東から西に移動していく様子が観測された (Fig.1)。またその際、西側で流れが強くなる西岸強化流も確認できる。本研究では、流れ関数や渦度の時間発展の観測に加えて、基礎方程式を構成する拡散項、非線形項、コリオリによる項の各項について L^1 ノルムの時間発展についても調べた (Fig.2)。Fig.2 を見ると、円の全領域で積分をすると非線形項の効果は弱いことがわかる。また、ノルムの計算を円周付近を除いた残りの領域で求めたものと比較すると、拡散項の L^1 ノルムは全領域で求めた場合よりもはるかに小さな値となっている。このことから、拡散項の効果は境界で強く効くことがわかる。

3.3 斜め半球

斜め半球については、初期の流れ場が同心円状の場合と乱流場の場合の数値実験を行った。その結果、初期の流れ場によらず、最終的には南極付近に一方向の流れを示す渦が形成されることがわかった。本研究では、さらに初期の流れの向きを逆転させた実験も行った。

同心円状の初期値を与えた場合は、初期の流れの向きが逆になると最終的な渦の向きも逆転することがわかった (Fig.3)。これは、非線形項の効果が強いために、流れは線形的に求められるので、初期の流れの向きが決まれば最終的な流れの方向も決定されることを意味すると思われる。

また初期の流れ場が乱流場 (Fig.4) の場合は、その与え方で初期の流れの向きを逆にすると、最終的な渦の向きが逆転する場合と同じ場合の2通りがあることがわかった。そこ

で、初期の乱流場のエネルギーの分布を変化させて同じ実験を行った。今回の研究では初期のエネルギー分布が異なる3種類について、それぞれ6種のランダムな状況、つまり合計18種類の初期乱流場について実験を行った。その結果、18種類中12種類の初期乱流場については、初期の流れの向きを逆転しても最終的な流れの向きは同じである結果となった。残りの6種類については最終的な向きも逆転した。また、初期のエネルギー分布を変化させた場合に最終的な向きがどうなるかについてまとめた結果が表1である。表1から、小さなスケールにエネルギーが強く働く場合は初期の流れの向きを逆にしても最終的には同じ方向になる傾向が読み取れる。さらに特徴的なこととして、向きが一致する場合、その方向は東向きで、つまり最終的には南極付近で西風ジェットが形成されやすい傾向にあることがわかった (Fig.5)。

No	同じ西風	逆転
10	6/6	0/6
15	3/6	3/6
20	3/6	3/6

4 まとめ

以上の結果をまとめると次のようになる。

- 東から西へ流れが移動する様子が観測される。
- 斜め半球の場合は、初期の流れ場がランダムで非線形項効果が大きいと南極付近に西風ジェットを形成する傾向にある。
- 非線形項効果が弱いとほとんど線形と考えられるので、初期の流れの向きを反対にすると最終的な流れの向きも逆転する。

5 謝辞

本研究にあたり貴重なご助言をいただきました、岡山大の柳瀬眞一郎先生、東京農工大の佐野理先生、北大の林祥介先生、京大の余田成男先生、同じく京大の酒井敏先生に深く感謝申し上げます。なお、数値計算には京大の大型計算機 VPP800 を、またグラフには地球電脳倶楽部の DCL を使用しました。

6 参考文献

- G.P.Williams, 1978, “*Planetary circulations: 1.Barotropic representation of Jovian and terrestrial turbulence*”, J. Atmos. Sci., 35, 1399-1426.
- S.Yoden and M.Yamada, 1993, “*A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere*”, J. Atmos. Sci., 50, 631-643.
- J.Y-K.Cho and L.M.Polvani, 1996, “*The emergence of jets and vortices in freely evolving, shallow-water turbulence on a sphere*”, Phys. Fluids, 8, 1531-1552.
- T.Nozawa and S.Yoden, 1997, “*Spectral anisotropy in forced two-dimensional turbulence on a rotating sphere*”, Phys. Fluids, 9, 3834-3842.
- 石岡圭一, 山田道夫, 林祥介, 余田成男, 1999, “回転球面上の減衰性2次元乱流からのパターン形成”, ながれマルチメディア 99.

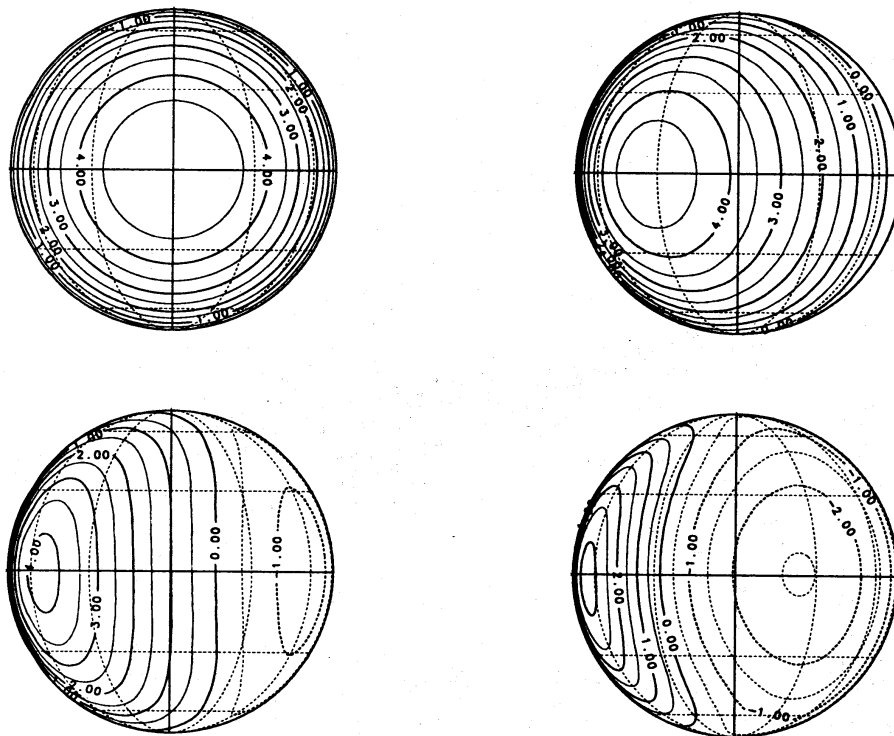


図 1: 島が縦半球で初期値が同心円状で与えた時の流れ関数の時間発展の様子. 左上, 右上, 左下, 右下の順に, $t = 0.0, 0.003, 0.006, 0.009$.

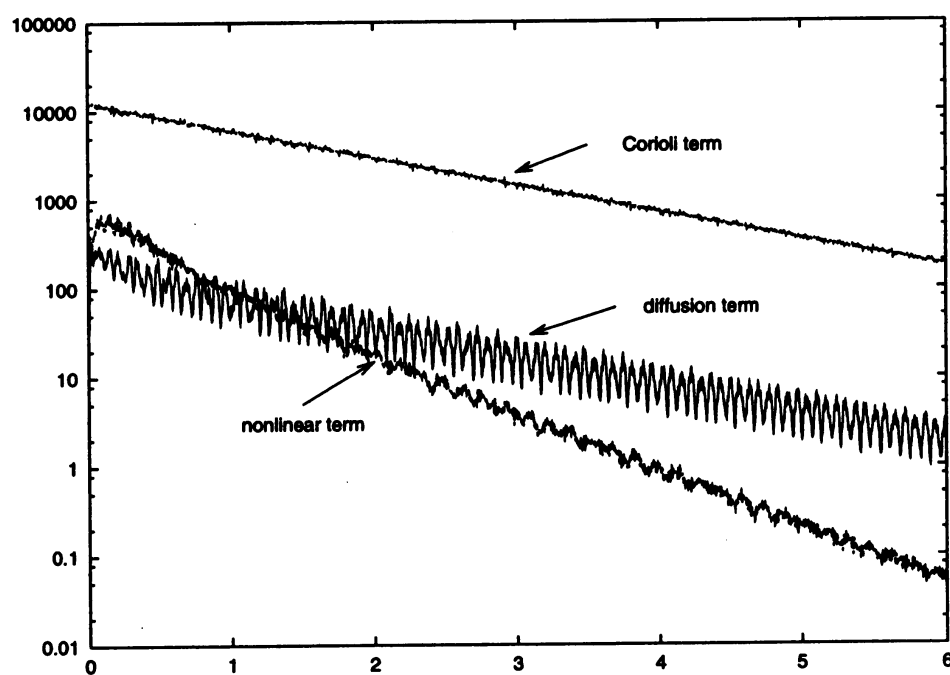
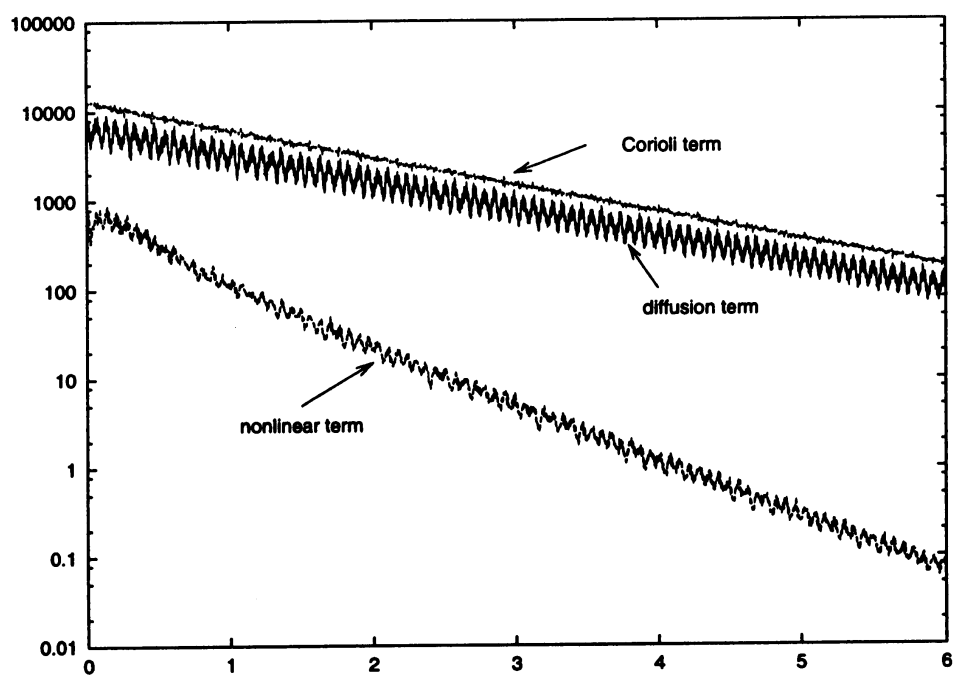


図 2: 拡散項, 非線形項, コリオリによる項それぞれの L^1 ノルム. 上は円領域全体で積分をし, 下は円周付近を除いて積分を行った.

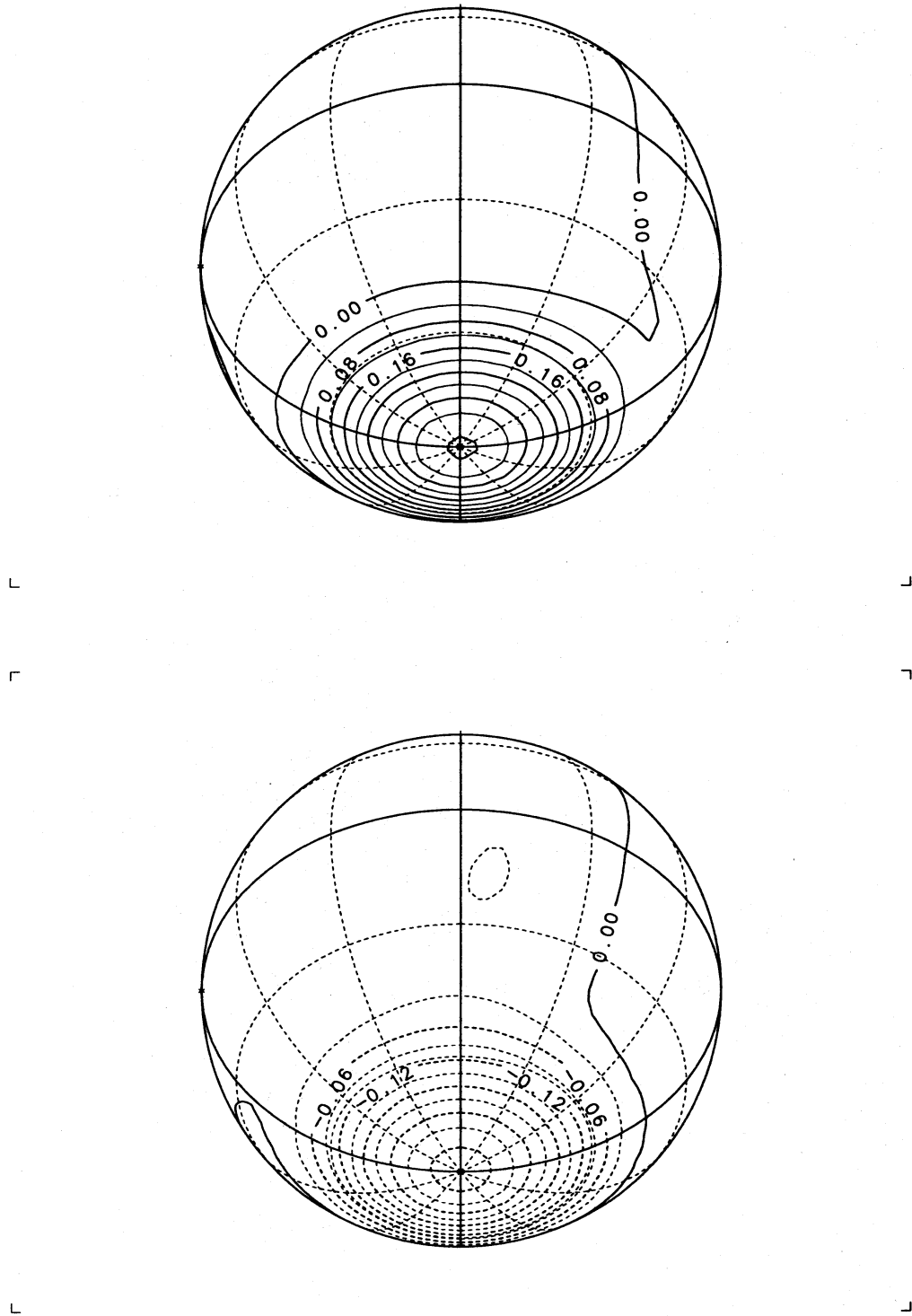


図 3: 島が斜め半球で初期値が同心円の時の時刻 $t = 6.0$ における流れ関数のグラフ. 上と下では初期の流れの方向が逆になっている.

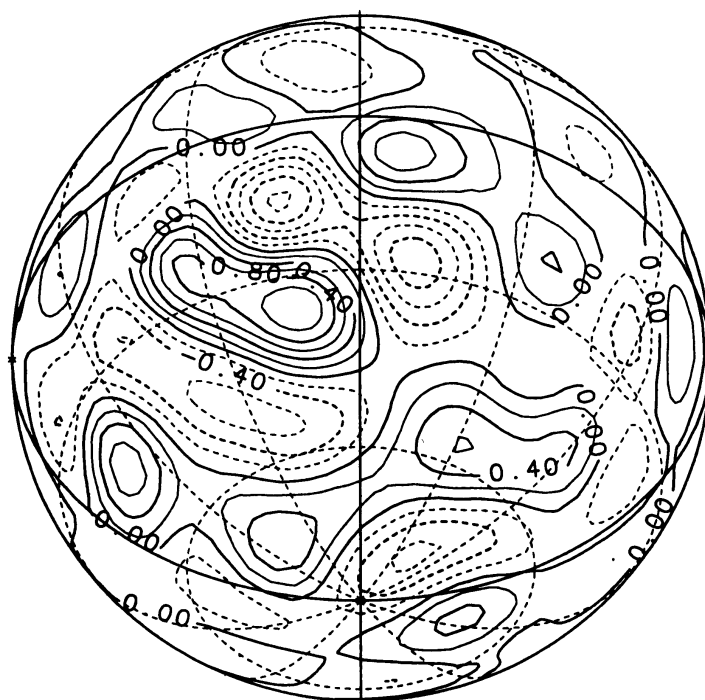


図 4: 初期値が乱流場であるときのグラフ

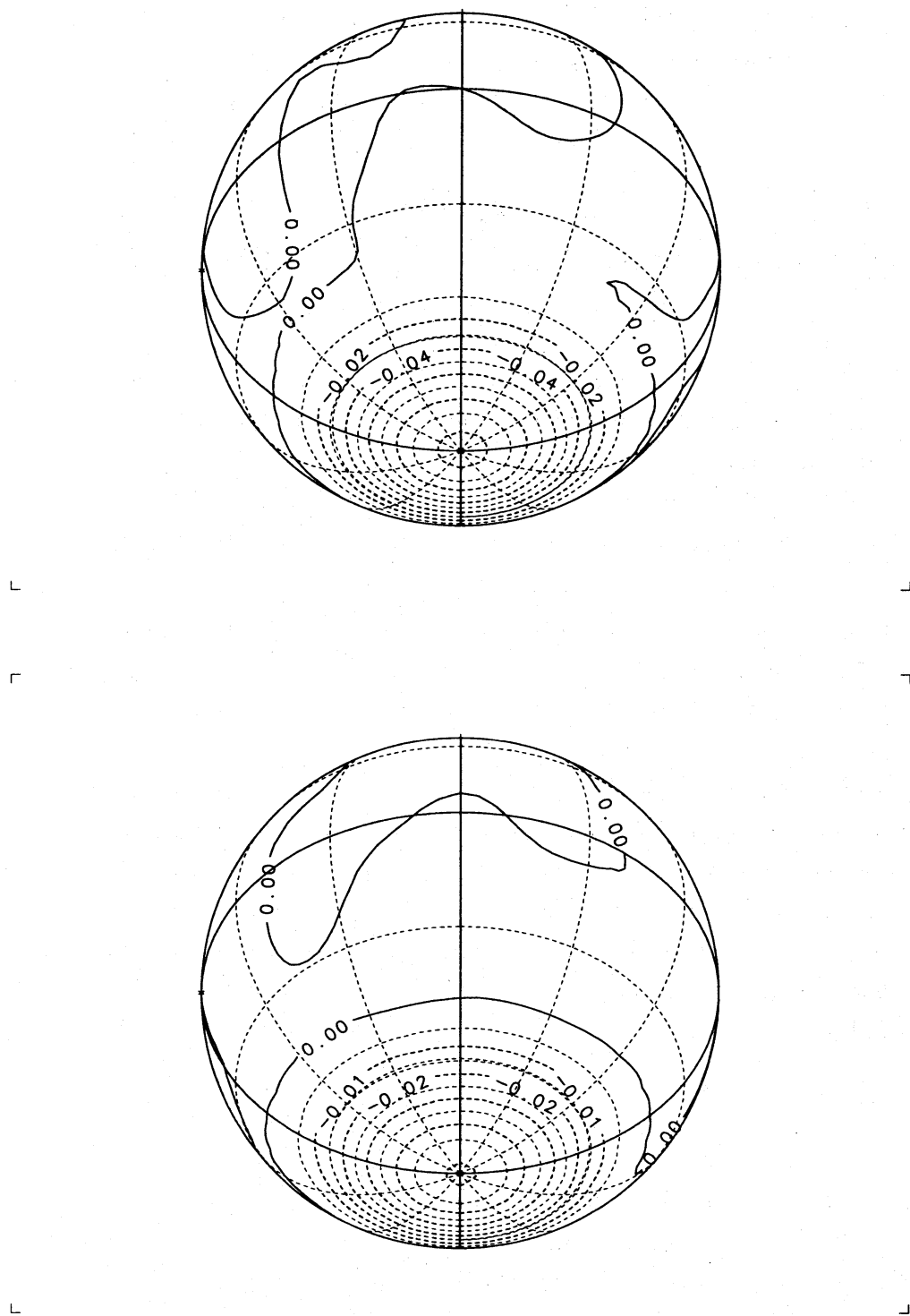


図 5: 初期乱流場を時間発展した場合で時刻が $t = 6.0$ での流れ関数のグラフ. 上の下では初期の流れの方向が逆になっているが最終的には同じ西風を示す.