

Yang-Mills 方程式 と Line Geometry

京大 数理解析 村瀬元彦

0°. $\mathbb{P}^1$ を含む多様体.

次のような 3 次元複素多様体を考える.

V : 3次元複素多様体

$\exists L \subset V$: 1次元複素部分多様体

s.t.h. $\begin{cases} \textcircled{1} L \cong \mathbb{P}^1 \\ \textcircled{2} L \text{ の } V \text{ での法束は } N_V(L) \cong \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \end{cases}$

但し $\mathcal{O}_L(1)$ は $L \cong \mathbb{P}^1$ 上の Hopf 束.

V の Douady space で, L に対応する点を含む連結成分を $\bar{X}$ とする. $\bar{X}$ の次元は小平の定理を用いて求められる;

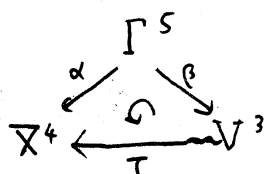
$$H^1(L, N_V(L)) \cong H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong 0,$$

$$H^0(L, N_V(L)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \mathbb{C}^4$$

であるから, $\dim_{\mathbb{C}} \bar{X} = 4$. (つまり, L は V の中で $H^0(L, N_V(L))$ でパラメータ化される分だけ動いてまわります.)

$\bar{X} \times V$ の subset Γ を

$\Gamma = \{ (l, z) \in \bar{X} \times V \mid l \in V \text{ の subspace と見たとき } z \in l \}$
 と定む. Γ から $\bar{X}$, V への natural proj. を α, β と書く.
 V から $\bar{X}$ への対応 $\alpha \circ \beta^{-1}$ を τ で表わす.



$\bar{X} \ni x$ に対し $\tau^{-1}(x)$ は, x に対応する V の subspace である.

$X = \{ x \in \bar{X} \mid \tau^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1 \}$ とおく. X は V の lines を 10 倍した空間である.

1°. General Line 上では自明な vector 束.

E を V 上の自明な vector 束で, 次の条件

(1) $G(E) = 0$ (E の Chern 類が消える.)

(2) $E|_L$ は $L = \mathbb{P}^1$ 上の自明束

を満たすものとする.

$$J(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X \mid E|_{\tau^{-1}(x)} \cong \text{自明束} \}.$$

$J(E)$ の元を E の jumping line と呼ぶ. $\text{rank}(E) = 2$ 或 3 のとき $J(E)$ は X の divisor になる. ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ の変形理論を用いて示される.) 以下 rank は 2 或 3 としよ.

問題 (i) E は $J(E)$ によってどのように特徴づけられるか?

例えは $J(E)$ の degree と E の Chern 類との関係は?

- (ii) $J(E)$ に singularity を持つ X 上の "函数" を作りそれによつて E を表示出来ないか?

2°. Yang-Mills 方程式とのつながり

M を oriented Riemannian manifold, g を M の metric とする. g は M 上で述べる self-duality condition を満たすものとする.

$\Lambda^2 = \Lambda^2(T^*M)$: M 上の 2-forms の bundle. g と M の orientation とによつて Hodge $*$ -operator が定義される. M は 4次元ゆゑ $*^2 = 1$. $*$ の固有値 ± 1 に属する固有空間 Λ の分解を $\Lambda^2 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ とする.

Λ^+ , Λ^- は rank 3 である. また, Λ^2 , Λ^+ , Λ^- は TM の Riemannian Connection から定まる canonical な connection を有する.

Λ^- の sphere bundle $S(\Lambda^-) \subseteq V$ と $\frac{3}{2} < \pi: V \rightarrow M$ は projection とする. V は M 上の S^2 -bundle として, g によつて定まる almost complex str. φ を持つ. ここでは, φ は各 $x \in V$ に対して $T_x V$ の complex str. φ_x を与え, φ_x によつて得られる;

V の connection に δ, τ $T_x V = \text{Vertical}_x \oplus \text{Horizontal}_x$
 なる直和分解がある。このとき $\text{Vertical}_x \cong T_x S^2$,
 $\text{Horizontal}_x \cong T_{\pi(x)} M$.

$\pi^{-1}(\pi(x)) \cong S^2$ は oriented

であり, δ は g に δ, τ

metric を与えているから

δ canonical complex str.

と入れて $\mathbb{P}^1$ と見做せる。従って

$x \in \pi^{-1}(\pi(x))$ から $T_{\pi(x)} M$ は complex str. を定めて
 いる。 $T_{\pi(x)} M$ の orthonormal base e_1, e_2, e_3, e_4
 をとり、 x から、

$x = \lambda (e_1^* \wedge e_2^* - e_3^* \wedge e_4^*)$ と表わされるように
 出来る。(但し λ は適当な constant, e_j^* は e_j の $T_{\pi(x)}^* M$
 の dual base.) このとき x は

$$x : \begin{cases} e_1 \longmapsto e_1 \\ e_2 \longmapsto -e_1 \\ e_3 \longmapsto -e_4 \\ e_4 \longmapsto e_3 \end{cases} \quad \text{この complex str. を} \\ \text{定めている。}$$

したがって $\varphi_x : T_x V \xrightarrow{\sim} T_x \mathbb{P}^1 \oplus T_{\pi(x)} M$
 とすると, φ_x は $T_x V$ に complex str. を定めている。
 この φ_x が integrable になるための条件は g に課す。それは

self-duality condition と呼ぶ。

このようにして得られた V は 0 で考えた条件を満たしている。例之は L としては, π の fibre E とおけばよい。また, M 上の Yang-Mills 方程式の「解」として, V 上の vector bundle E が得られるが, それは 10 で与えた条件を満足している。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(n) & \longrightarrow & P \\ & \downarrow & \\ & M & \end{array} \quad : \quad \begin{array}{l} M \text{ 上の principal } \mathrm{SU}(n)\text{-bundle} \\ (n=2 \text{ or } 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}(n) & \longrightarrow & \mathcal{O}_P \\ & \downarrow & \\ & M & \end{array} \quad : \quad \begin{array}{l} \mathrm{SU}(n) \text{ の adjoint 表現に associate した } \mathfrak{su}(n)\text{-bundle} \end{array}$$

P 上で定義される connection form ω , curvature form Ω は, それぞれ

$$\omega \in \Lambda^1(M, \mathcal{O}_P)$$

$$\Omega \in \Lambda^2(M, \mathcal{O}_P)$$

と思うことが出来る。 $\Lambda^2(M, \mathcal{O}_P)$ には $*$ -operator が自己同型として作用するから, $*\Omega \in \Lambda^2(M, \mathcal{O}_P)$ 。方程式

$$(*) \quad *\Omega = -\Omega, \quad \Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

を anti-self-dual Yang-Mills 方程式と云う。これは, ω の

$$\text{norm} \quad \|\omega\|^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \int_M \text{trace}(\Omega \wedge *\Omega)$$

	M	g	V	$\bar{X}$	Γ
1.	$\mathbb{R}^4$	flat	$V_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$	$\mathbb{C}^4$	$\mathbb{C}^4 \times \mathbb{P}^1$
2.	S^4	canonical	$\mathbb{P}^3$	$\text{Gr}(1,3)$	$\text{Fl}(0,1,3)$
3.	T^4	flat	$V_3 = V_1/\mathbb{Z}^4$	$(\mathbb{C}^*)^4$	$(\mathbb{C}^*)^4 \times \mathbb{P}^1$
4.	$\mathbb{CP}^2$	canonical Kähler	$\text{Fl}(0,1,2)$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*}$	Γ_4

V_1 は, $\mathbb{P}^1$ 上の bundle $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ の total space のことである. 例 1 ~ 4 のいずれの場合も π の表示, 定義はやかひである. X は, 1 ~ 3 では $\bar{X}$ に等しく, 4 では

$$X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2*} - \text{Fl}(0,1,2) \quad (\text{3次元の flag variety})$$

である. $\text{Gr}(1,3)$ は $\mathbb{P}^3$ の line を Π として $\mathbb{P}^3$ 上の Grassmann manifold.

V_3 は次のようにして作る. $\lambda_1, \lambda_2 \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1))$ を, 共通 0 でない i の一対独立 sections とする. $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\text{とし, } G = \mathbb{Z} \cdot \lambda + \mathbb{Z} \cdot e_1 \lambda + \mathbb{Z} \cdot e_2 \lambda + \mathbb{Z} \cdot e_3 \lambda$$

と定む. $G \cong \mathbb{Z}^4$ であり, G は V_1 に加法により作用し

ているから $V_1/G = V_3$ をつくることが出来る. V_1 は $\mathbb{P}^1$

上の $\mathbb{C}^2$ -bundle であるが, V_3 は $\mathbb{P}^1$ 上の $T_{\mathbb{C}^2}$ (2次元 Torus) の family になり, ている. $\mathbb{P}^1 \ni t$ に対し, t の

上の fibre は 周期 $\lambda(t), e_1 \lambda(t), e_2 \lambda(t), e_3 \lambda(t)$ を持つ.

V_3 の Douady space $\bar{X}$ が $(\mathbb{C}^*)^4$ になるから, 藤木の定理によつて V_3 は Kähler になることが判る.

V 上の vector bundle $E(\omega)$ の jumping lines $\in J(\omega)$ で表わす. $J(\omega)$ は X の divisor. このとき,

「例 2, 4 に対しては $\text{degree } J(\omega) = c_2(E(\omega))$ 」が成立する.

$\hat{E}_\omega = \alpha_* \beta^* E(\omega) \big|_{X-J(\omega)}$ は $X-J(\omega)$ 上の vector bundle of rank n であり, ω, Ω はそれぞれ type $(1,0), (2,0)$ の meromorphic form とし $X-J(\omega)$ に (ω より $\hat{E}_\omega$ に) 拡張出来る. このとき,

例 1, 2, 3 に対しては,

(i) $*\Omega = -\Omega \iff$ (ii) $\hat{\Omega} \big|_{\tau(\zeta)} \equiv 0$ for $\forall \zeta \in V$ が成立する. 但し $\hat{\Omega}$ は Ω の解析接続, $\tau(\zeta)$ は, ζ を通る line 全体を X の中で集めたもので, ζ 近接ある. $\hat{\Omega} \big|_{\tau(\zeta)}$ は, form としての制限.

例 4. これは (ii) $\hat{\Omega} \big|_{\tau(\zeta)} \equiv 0$ for $\forall \zeta \in V$ の方が $*\Omega = -\Omega$ より強い. 以下では Yang-Mills 方程式のかわりに (ii) の条件を満たす ω, Ω を考へる.

命題. ω は $X-J(\omega)$ 上 holomorphic であり, その singularity が $J(\omega)$ に一致する. 例 1, 2, 4 では bundle automorphism で動かすことによつて ω を rational にと

れ子。

例 2 に関しては, ω の具体的な形が判るというので色々なことがいえる。しかし例 3, 4 に対しては解は一つも知られていないたの, あまりよく判らない。

例 3 は, Yang-Mills 方程式の periodic instanton solution に対応しているが, それは non-Kähler 多様体上の vector bundle であるから, かなり複雑な函数になるのかも知れない。最も興味深いのは $M = K3$ -surface のときである。これは重力場が外場としてある場合の Yang-Mills 方程式の研究にあたるが, V, X がどんなものになるか, すらよく判らない。

Compact な M から出てくる V は, compact 3-fold で, $K(V) = -\infty$ なるものである。例 2 の場合に instanton 解が作られたのは $V = \mathbb{P}^3$ だったからで, これは例外的に易しかった訳である。他の V になると, その上の vector bundle の研究はほとんど進んでいないように思われる。

1979 年 8 月 17 日。

文献

Atiyah - Hitchin - Singer : Self-Duality in four-dim.
Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. Lond. A. 362,
425 - 461 (1978).