

双曲型有理関数のジュリア集合上の 位相的ダイナミクスについて

木村 耕人 (Kouji Kimura)

1. Introduction

今回は、hyperbolic rational map f を Julia set J 上に制限したものの dynamics について調べた。

ある dynamics $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ から $f: J \rightarrow J$ への semi-conjugacy φ を構成する。更に、 φ が単射となる十分条件を調べた。また、 Γ を一点集合とすると $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は full shift となるが、この時の φ についても調べた。

2. semi-conjugacy の構成

今回の話ではずっと $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を hyperbolic rational map で $\deg f = d \geq 2$ となるものとする。

postcritical set を $P = \overline{\{f^n(c) ; c: \text{critical point}, n \geq 1\}}$ とする。この時、open set $U \subset \bar{\mathbb{C}} - P$ を $\#(\bar{\mathbb{C}} - U) \geq 3$ となるように選ぶ。また、open set V を $\overline{f^{-1}(V)} \subset V$ となるように選び、

$V' = f^{-1}(V)$ と定義する。そして、表記の都合で $V_0 = V, V_1 = V'$ とも書くことにする。また、 V 上の paths γ, γ' が V_k 上で homotopic になるときに $\gamma \sim \gamma'$ と書く。(k=0, 1)

こうした時に、 U 上に Poincaré metric を考える。(Montel の定理より定義できる。) そして、滑らかな path γ に対して、この metric に関する長さを $\text{length}(\gamma)$ として、二点の距離は $d(\cdot, \cdot)$ とする。

すると、 $\overline{V'}$ 上の path γ に対して、ある $\lambda > 1$ が存在して、

$$\text{length}(f(\gamma)) \geq \lambda \text{length}(\gamma)$$

となることが知られている。よって、任意の $k \geq 1$ に対して、

$$\text{length}(f^k(\gamma)) \geq \lambda^k \text{length}(\gamma) \quad (1)$$

となる。

また、任意の $z \in F$ に対して $f^n(z)$ は attracting cycle に収束するので十分大きな n に対して $f^n(z) \notin V_1$ となる。

ここで、compact set $\Gamma \subset V$ をとって、 $\Gamma' = f^{-1}(\Gamma)$ とする。更に、次の条件を満たす continuous map $H: \Gamma' \times I \rightarrow V$ が存在することを仮定する。

$$H(\cdot, 0) = id_{\Gamma'}, H(\cdot, 1) = r \text{ として、 } r: \Gamma' \rightarrow \Gamma \text{ となる。}$$

また、任意の $y \in \Gamma'$ に対し、 $l(y)(t) = H(y, t)$ として V 上の path $l(y)$ を定義できるが、 $\text{length}(l(y))$ が定義でき、

ある $C_1 > 0$ が存在して、任意の $y \in \Gamma'$ に対して

$$\text{length}(l(y)) \leq C_1 \quad (2)$$

を満たす。

そこで、 $\Sigma = \{y \in \Pi\Gamma'; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, y_n \in \Gamma', f(y_n) = r(y_{n+1})\}$ と定義する。そして、 $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を shift map とする。つまり、

$$(\sigma(y))_n = y_{n+1}$$

とする。

このように定義したときに次の定理を示す。

[Theorem 1]

$\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ から $f: J \rightarrow J$ への semi-conjugacy $\varphi: \Sigma \rightarrow J$ が存在する。

[outline of proof]

$z_n = f^n(z)$ と書いて、 φ を $\varphi(y) = z$ となるための必要十分条件が次のようになるように定義する。

(a) z_n から y_n への paths $\gamma_n \subset \overline{V'}$ が存在して次を満たす。

ある $C_2 > 0$ が存在して、任意の $n \geq 0$ に対して、

$$\text{length}(\gamma_n) \leq C_2 \quad (3)$$

を満たし、更に、

$$f(\gamma_n) \approx \gamma_{n+1} \cdot l(y_{n+1}) \quad (4)$$

も満たす。

この時に、 φ が map になる、即ち、任意の $y \in \Sigma$ に対して唯

一つ $z \in J$ で $\varphi(y) = z$ となるものが存在することを示す。

その後この map が continuous で surjective であることを示す。

このために、制限した map $f: V' \rightarrow V$ が covering map になっていることに注意する。

任意の $y \in \Sigma$ に対して、 $\varphi(y) = z$ となる $z \in J$ が存在することを示す。このために、 $\zeta_{n,0} = y_n$, $\gamma_{n,0} = l(y_n)^{-1}$ として、更に帰納的に $\gamma_{n,k+1}$ を $\gamma_{n+1,k}$ の f による $\zeta_{n,k}$ を始点とする lift とし、その終点を $\zeta_{n,k+1}$ とする。

そして、 $\gamma_n = (\prod_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k})^{-1}$ と定義する。

すると、(1), (2) から (3) が分かり、定義から (4) が示せるので、このように存在を示すことができる。

次に、一意性については (4) から lift を十分な回数繰り返すことにより (a) のような paths は存在の証明の時に構成したものと homotopic となることが分かり、よって一意性が示せる。

これで、 φ が map であることが示された。

$y \in \Sigma$ どうしが近ければ、上で構成したような paths もある意味で近くなることを示すことができる。

このことから φ の連続性が示せる。

また、全射性については、対角線論法を使って候補を選び、

上のことからそれが (a) を満たすことを示した。

そして、 $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ については (a) から明らか。 $\square$

3. φ の単射性

ここでは φ が単射となるための十分条件について述べる。

まず、lemma を示す。

[Lemma]

$y, y' \in \Sigma$ に対して、 $\varphi(y) = \varphi(y')$ となるための必要十分条件は、長さ有界の y_n から y_n' への paths $\eta_n \subset \overline{V'}$ 存在して、

$$f(\eta_n) \gamma_l(y_{n+1})^{-1} \cdot \eta_{n+1} \cdot l(y_{n+1}') \quad \text{for any } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (5)$$

を満たす。

証明は (a) のような paths をつないだものを考えれば良い。

[Theorem 2]

次の条件 (i) ~ (vi) を満たす時に、 φ は単射となる。

(i) V を $\bar{U}$ から有限個の topological closed disks を除いたものとする。

(ii) Γ を V と homotopy equivalent で、有限個の simple arcs の和集合として書けるとする。この時、 Γ' についても V' と homotopy equivalent であり、有限個の simple arcs の和集合として書ける。

そこで、 $\Gamma' = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$, $\Gamma = \bigcup_{\beta \in B} \beta$ と表わす。但し、 A, B は simple arc からなる有限集合で A, B それぞれで、異なる二つの元は端点以外では交わらない様なものとする。そして、 G を A の元の端点全体の集合とし、 $A' = \{\alpha^{-1}; \alpha \in A\}$ $B' = \{\beta^{-1}; \beta \in B\}$ とする。

(iii) 任意の $\alpha \in A$ に対して、 $r(\alpha)$ については次のうちのいずれか一方のことが言える。

(1) $r(\alpha)$ は B の元の一 endpoint となる。

(2) ある $\beta \in B$ が存在して、 $r \circ \alpha = \beta$ となる。

(iv) 任意の $\alpha \in A$ に対して、 $B(\alpha) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\} \subset B \cup B'$ が存在して、 $f \circ \alpha = \prod_{j=1}^q \beta_j$ となる。

(v) 任意の $\alpha \in A$ に対して、次のいずれかが成り立つ。

(1) $r^{-1}(f(\alpha(I))) \subset G$ となる。

(2) 任意の $\beta \in B(\alpha)$ に対して、ある $\alpha' \in A \cup A'$ があって、 $r(\alpha') = \beta$ となる。

(vi) $\alpha_j \in A \cup A'$ ($0 \leq j \leq k$) で $\alpha_0 = \alpha_k$ かつ $f(\alpha_{j-1}) = r(\alpha_j)$ となるものは存在しない。

この定理の証明には、lemma の paths が Γ' 上のある形の paths になることを示して、その paths にある"長さ"を定義する。そして、 $f(\eta) = r(\eta')$ となるときこの"長さ"は η よ

り η' の方が 1 より大きな定数倍以上長くなることを示した。このことから (5) のような paths η_n の"長さ"は n に関して指数関数的に増加する。よって、長さが有界である事からこれらがすべて一点となることがわかる。このようにして証明ができる。

4. Γ が一点集合の場合

この節では、 V を $\bar{C}$ から有限個の topological disks を除いたものであって、 Γ が一点集合の場合について述べる。ここで、 $\Gamma = \{x_0\}$ とする。

この時、 Γ' は d 個の点からなる集合となり、任意の $y, y' \in \Gamma'$ で $f(y) = x_0 = r(y')$ となる。よって、 (Σ, σ) が full shift となることが定義からわかる。そこで、 $\varphi(y) = \varphi(y')$ となる条件を調べる。

そのために、有向グラフ $(V, \mathcal{E})$ を構成する。

この構成には Lemma を使うのだが、有向グラフを構成する前に Lemma について少し述べる。まず、この Lemma に出てきた η_n が二つあればそれらは $\bar{V}'$ 上で homotope となる。また、この Lemma に出てくる η_n の homotopy class は有限個しか出てこない。この二つはすぐにわかる。

そこで、Lemma の η_n として現れるような path の $\bar{V}'$ 上で

の homotopy class 全てに対して、それぞれの代表元を集めた集合を ν と定義し、この集合の元を vertex と呼ぶ。また、 $\mathcal{E} \subset \nu^2$ を Lemma で現れる (η_{n-1}, η_n) の組全体の集合とし定義し、この集合の元を edge と呼ぶ。更に、 $(\eta, \eta') \in \mathcal{E}$ の時に、 $\eta \rightarrow \eta'$ と書くことにする。こうした時に ν は有限集合となり、 $(\nu, \mathcal{E})$ は有向グラフとして定義できたことになる。更に、 ν の元で始点が a であって終点が b の元全体の集合を $\nu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。また、 $\nu(a) = \bigcup_{b \in \Gamma'} \nu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と定義する。つまり、 $\nu(a)$ は ν の元で始点が a のものすべての集合である。

また、 $W = \{ \underline{1} \in \Gamma' \cup \{0\} ; \eta_{n-1} \rightarrow \eta_n \}$ と定義する。

この様な有向グラフに対して次の定理が言える。

[Theorem 3]

$a, b \in \Sigma$ に対して、 $\varphi(a) = \varphi(b)$ となるための必要十分条件は、 $\underline{1} \in W$ で $\eta_n \in \nu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となるものが存在することである。

この定理から、上のような有向グラフが書ければ、 φ によって同じ点に移す Σ の元が具体的にわかる。

このグラフを考察することによって次の Proposition を示すことができる。

[Proposition]

任意の $z \in J$ に対して、

$$\#\varphi^{-1}(z) \leq \max\{\#\nu(a); a \in \Gamma'\} < \infty$$

となる。

この Proposition は、このグラフの vertex set ν が有限集合であることから示される。

ここで、任意の $y \in \Sigma$ に対して、

$$M(y) = \{y' \in \Sigma; \varphi(y) = \varphi(y')\}$$

と定義することにする。

$M(y) = \{y\}$ となるような $y \in \Sigma$ がどの程度あるか調べるために次の条件を用意する。

任意の $\eta \in \nu$ に対して、ある $m \in \mathbb{N}$, $\eta_j \in \nu$ ($0 \leq j \leq m$) があり
 η_0 は 0-homotope であり、 $\eta_0 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \eta_m$ となる。 } (6)

[Theorem 4]

(I) (6) を満たしていなければ、 $y \in \Sigma$ で $M(y) = \{y\}$ となるようなものは存在しない。

(II) (6) を満たしていれば、generic な $y \in \Sigma$ で $M(y) = \{y\}$ となる。

[outline of proof]

まず、(I) については (6) を満たしていない時には、このようにならないような $\eta \in \nu$ の lift に対して対角線論法を

使うことによって示すことができる。

次に、(II) を示すのに次の記号を定義する。

$${}_n\langle \underline{y} \rangle_m = (y_n, y_{n+1}, \dots, y_m)$$

$S = \{ (y_0, \dots, y_m) ; m \in \mathbb{N}, y_j \in \Gamma' \text{ であって、}$

$\eta_j \in \mathcal{V}(y_j) \text{ s.t. } \eta_{j-1} \rightarrow \eta_j \text{ ならば } \eta_0 \text{ は } 0\text{-homotope} \}$

$$S_n = \{ \underline{y} \in \Sigma ; \text{ある } m \in \mathbb{N} \text{ で } {}_n\langle \underline{y} \rangle_m \in S \}$$

この記号を使って (II) を示す。

まず、(6) を満たしていることと $S \neq \emptyset$ であることが同値であることを示す。

そして、

$$\{ \underline{y} \in \Sigma ; M(\underline{y}) = \{ \underline{y} \} \} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

となり、この S_n が open dense であることが示される。

このように (II) も示して、この定理の証明が終わる。 $\square$