

エルゴード理論の Review

名大 理 数 久 保 泉

§ 1. はじめに

最近の十年間に、統計力学の基礎に対する数学的な、裏付けが確率論の分野において本格的に扱われるようになったと思われる。即ち、(A) エルゴード仮説・・・Sinai, Anosov, Arnold, Avez 等 (B) Boltzmann 方程式を解くこと及び H-定理に関して・・・Kac, McKean, 等 (C) 極限 Gibbs 分布, 熱力学への移行・・・Minlos Sinai, 等 が調べられている。(B) に関しては、田中氏の報告を、(C) に関しては、Robinson, Ruelle の結果を言つて荒木氏の項を参照されたい)。

時間的母集団と位相的母集団の統計力学における同等性を主張するエルゴード仮説は、Birkhoff の個別エルゴード定理及び Neuman の平均エルゴード定理によって解決されたと言つて良いと思われる。系の時間平均は、その軌跡が到達し得る相空間内の領域に対しては (Liouville の定理に

る不変測度での) 相平均と一致することがわかり, 力学系をエルゴード部分に分解でき, その各部分の上ではエルゴード仮説が成立することがわかる。

しかしある具体的な力学系がエルゴード的かどうか, 或は, どんなにして, エルゴード部分に分解出来るかは, 困難な問題として残されていた。比較的早くから理解されたのは, 定曲率の空間上の測地的 flow だった。曲率が零又は正の場合にはエルゴード的ではなく, 負の定曲率を持つ compact Riemannian manifold の場合が最も興味深く, その測地的 flow がエルゴード的であり更に mixing であることは, すでに 1930 年代 Hopf, E. [16, 17], Hedlund, G. A. [13, 14] によって知られていた。

一方, Kolmogorov [19, 20] が 1958~9 年にエントロピー (エルゴード理論における単位時間当りのエントロピー) と K-system の概念を導入したのを契機として flow の理論の一般論 [1, 23, 24, 27, 30 等] が進歩し, それ等の概念との関連で, エルゴード性, Mixing 性も論じられるようになった。(§2 参照)。

Sinai [25, 26] は 1960~1 年に compact な負の曲率空間上の測地的 flow が K-system (従ってエルゴード的) であることを示し, 又そのエントロピーを計算した。

そこに用いられた基本的なアイデアは、かつて Hopf, Hedlund によって負定曲率空間の測地的 flow の研究に用いられた時間の指数函数的に遠ざかっていく(近づいていく)軌跡とそれに横断する曲面群の果たす役割を使うことだった。その方法を compact Riemannian manifold 上の滑かな flow に対して適用するため, Anosov [4, 5] は 1962~3 年 C -system ($\mathcal{V}$ -систем) の概念を定義し, C -system がエルゴード的であることを示した。更に C -system が K -system であることは, Sinai, Anosov, Arnold 等によって解決された。(§3 参照)

もっと物理的な, 統計力学に現われ得るような系については, 1963 年 Sinai が [28] で撞球問題と呼ばれる系のエントロピーが正であることを主張し, [29] でもっと一般的系; 箱に肉じ込められた多体の剛体, (もしくは作用距離の短い相互作用をもつ) 系の flow のエントロピーが正であること及びエルゴード性を主張した。(§5.6 参照)

その後, 彼は [31] で, 上の如き一般の力学系の flow が, C -system に要求される正則性を持たない場合も一般論を展開した。この報告で, この十年間に, 統計力学で要求されるエルゴード問題に, 数学者がいかに接近し得たか, まだいかに遠いか, を理解して頂ければ幸いである。

§ 2. 基礎的な事実

この§の内容に関しては [1][12][19, 20][23][24][32] を参照されたい。特に [32] は日本語で書かれ、すぐれた総合報告になっていて証明も詳しい。

個別エルゴード定理

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ をある測度空間とする。但し $P(\Omega) < \infty$.

定義 2. 1. Ω 上の変換 S の逆変換 S^{-1} が存在し共に可測で、保測 (i.e. $P(SB) = P(B)$, $B \in \mathcal{B}$) なとき, S を automorphism という。Automorphism の one-parameter group $\{S_t\}$ が $(t, \omega) \rightarrow S_t \omega$ の写像として可測なとき (可測な) flow と呼ぶ。両者に共通な名称として, system $\{S_t\}$ と言い, t が整数値だけをとるときをつかう。

定義 2. 2. System $\{S_t\}$ に対し, $S_t B = B$ が任意の t に対して成立するような可測集合 $B \in \mathcal{B}$ は, $P(B) = 0$ 又は $P(\Omega - B) = 0$ に限るとき $\{S_t\}$ は metrically transitive であるという。

定理 2. 1. (Birkhoff) $\{S_t\}$ を flow, $f(\omega)$ を可積分函数とするととき, 殆んど全ての $\omega \in \Omega$ に対し, 極限

$$\bar{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_t \omega) dt, \quad \underline{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(S_{-t} \omega) dt$$
 が存在し, $\bar{f}(\omega) = \underline{f}(\omega) = \underline{f}(S_t \omega)$ a.e. が成立する。

automorphism S に対しては $\int$ を Σ に置代えて成立する。

定義 2.3. System $\{S_t\}$ がエルゴード的 $\Leftrightarrow$
 $f(\omega)$ の時間平均 $\bar{f}(\omega) = \int f(\omega) dP$ が成立する。

又 $\{S_t\}$ が mixing であるとは $P(S_t A \cap B) \rightarrow P(A)P(B)$
 $(t \rightarrow \infty)$ が 任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対し成立するときをいう。

定理 2.2. 二乗可積分函数 $f(\omega) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ に対し
 $U_t f(\omega) \equiv f(S_t \omega)$ により, 強連続な one-parameter unitary
group が定義され, 次の三条件は同値である。(i) $\{S_t\}$
がエルゴード的。(ii) $\{S_t\}$ が metrically transitive.
(iii) $\{U_t\}$ が定数以外に固有値零の固有函数を持たない。

可測分割

定義 2.4. Ω の分割 $\xi = \{C\}$ とは, disjoint な集
合の集りで $\Omega = \bigcup_{C \in \xi} C$ を充すものをいう。分割 ξ がある
可算個の可測集合の系 $\{P_n\}$ から生成される (i.e. 二点 $\omega_1,$
 ω_2 が ξ の同じ要素に入るのは, ω_1, ω_2 が同時に P_n に入
っているか, 同時に入っていないかが 全ての n に対して成立
するとき限る) 場合に分割 ξ は可測であるという。

二つの可測分割 ξ, η が与えられたとき, ξ が η の細分な
らば $\xi \geq \eta$ と記し, ξ は η より粗いという。分割 ξ に
対し, ξ より粗い可測分割の内最も細い (上の不等号で大き
い) ものを ξ の可測被覆という。一般に可測分割の系 $\{\xi_\alpha\}$
が与えられたとき, $\bigvee_\alpha \xi_\alpha$ で全ての ξ_α より細い可測分割

の内、最も粗いものを、 $\bigwedge \xi_\alpha$ で 全ての ξ_α より粗い可測分割の内、最も細いものを表わす。

命題 2.1. Ω の trivial な分割 $\{\Omega\} = \mathcal{V}$, Ω の system $\{S_t\}$ の軌跡への分割の可測被覆を $\mathcal{V}_{\{S_t\}}$ と記すとき,
 $\{S_t\}$ が エルゴード的 $\iff \mathcal{V}_{\{S_t\}} = \mathcal{V}$.

命題 2.2. (Ω が Lebesgue space と呼ばれる自然な空間ならば) 可測分割 ξ に対し, ξ の各要素 C ($\in \xi$) の上に自然に測度 $P(\cdot | C)$ が導かれ, 又 ξ の各要素を一点とみなした空間 Ω_ξ の上にも自然に測度 $P_\xi(C)$ が導かれ

$$P(B) = \int_{\Omega_\xi} P(B \cap C | C) dP_\xi(C)$$

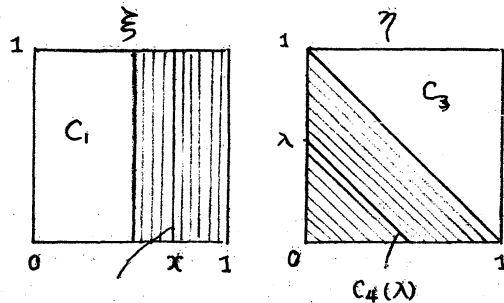
例 2.1. 右図の如く,

正方形の二種の分割 $\xi = \{C_1, C_2(x); \frac{1}{2} \leq x < 1\}$, $\eta = \{C_3, C_4(\lambda); 0 \leq \lambda < 1\}$ は可測分割である。

η の条件付測度は, $C_4(\lambda)$ 上のパラメーターとして, 直線の長さを取れば,

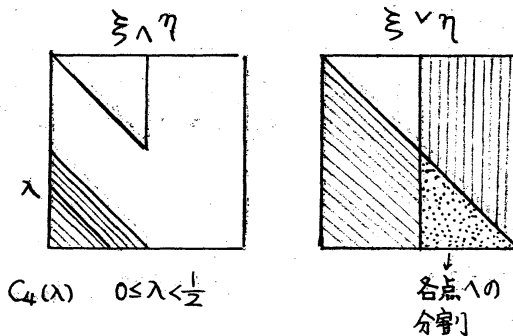
$$\begin{cases} P(dx dy | C_3) = 2 dx dy \\ P(du | C_4(\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} du \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_\eta(C_3) = \frac{1}{2} \\ dP_\eta(C_4(\lambda)) = \lambda d\lambda \end{cases}$$



$$C_2(x) = \{(x, y); 0 \leq y < 1\}$$

$$C_4(\lambda) = \{(x, y); x+y=\lambda, 0 \leq x, y < 1\}$$



エントロピー

Ω の分割 ζ に対して $S\zeta$ を $S\zeta = \{SC; C \in \zeta\}$ で定義する。

定義 2. 5. Ω の有限又は可算々の可測集合への分割 $\xi = \{D\}$ に対し分割のエントロピーを次式で定義する。

$$H(\xi) = - \sum_{D \in \xi} P(D) \log P(D).$$

Automorphism S に対し, α を有限分割とするとき極限

$$h(S, \alpha) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee S\alpha \vee \dots \vee S^{n-1}\alpha)$$

が存在する。 $h(S) = \sup_{\alpha: \text{有限分割}} h(S, \alpha)$ を automorphism S の (単位時間当りの) エントロピーと呼ぶ。

命題 2. 3. System $\{S_t\}$ に対し $h(S_t) = |t| h(S_1)$ 。

定義 2. 6. 可測分割 $\zeta = \{C\}$, $\xi = \{D\}$ に対して,
 $H(\xi | \zeta; \omega) = - \log P(D \cap C | \zeta; C) \quad \omega \in D \cap C$ で

$$H(\xi | \zeta) \equiv \int H(\xi | \zeta; \omega) dP$$

を分割 ξ の条件 ζ の下での条件付エントロピーと呼ぶ。

命題 2. 4. $h(S, \alpha) = H(\alpha | \bigvee_{k=1}^{\infty} S^{-k}\alpha)$

K-system

定義 2. 7. System $\{S_t\}$ が K-system であるとは, ある可測分割 ζ が存在して次の三条件を満たすときに言う。

(K. 1) $S_t \zeta \geq \zeta \quad t \geq 0$, (K. 2) $\bigvee_t S_t \zeta = \varepsilon$

(但し ε は各一点一点への分割), (K. 3) $\bigwedge_t S_t \zeta = \zeta$ 。

定理 2.3. $\{S_t\}$ が K-system ならば, $\{S_t\}$ に対し次のことが言える. (i) $\{S_t\}$ はエルゴード的, (ii) (全ての位数の) mixing, (iii) S_1 のエントロピー $h(S_1) > 0$, (iv) $\{U_t\}$ のスペクトルは, σ -ルベグ" スペクトル.

automorphism S に対し, 下の式で可測分割 π を定義する.

$$\pi = \pi(S) = \bigvee_{\alpha: \text{有限分割}} \bigwedge_{k \leq n} S^k \alpha.$$

定理 2.4. 任意の automorphism S に対して次の条件を充す可測分割 ξ が存在する. (i) $S\xi \geq \xi$, (ii) $\bigvee_n S^n \xi = \varepsilon$, (iii) $\bigwedge_n S^n \xi = \pi(S)$, (iv) $h(S) = H(S\xi|\xi)$.

定理 2.5. automorphism S に対し次のことが成立.

1°. $\pi(S) = \varepsilon \iff S$ は K-system.

2°. $S\xi \geq \xi, \bigvee_k S^k \xi = \varepsilon \implies \pi(S) \leq \bigwedge_k S^k \xi$

更に $H(S\xi|\xi) = h(S) < \infty \implies \pi(S) = \bigwedge_k S^k \xi$.

上で述べた定理は, §3,4 で述べられる事実の証明に非常に大きな役割をはたす. 定理2.3により, K-system であることを示せば, エルゴード性が示される.

例 2.2. 2-shift

テクニカルではあるが, 単純で, 確率論的な意味も大きく, 荒木氏の項の一次元 Ising モデルに關係の深い例について記しておこう. 上の議論の理解の助けにして頂きたい.

$[0, 1] \times [0, 1)$ の正方形を考えその上の automorphism S を $S(x, y) = (x', y')$

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases} \text{ if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \quad \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ if } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

で定義する。分割 $\alpha = \{[0, 1) \times [0, \frac{1}{2}), [0, 1) \times [\frac{1}{2}, 1)\}$

という二つの集合への分割を考えよう。

分割 $\alpha \vee S\alpha \vee \dots \vee S^{n-1}\alpha$ は

$$= \{[0, 1) \times [\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}}); k=1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$$

だから、エントロピーは、 $\frac{1}{n} H(\alpha \vee S\alpha \vee \dots \vee S^{n-1}\alpha)$

$$= -\frac{1}{n} \frac{1}{2^{n-1}} \log \frac{1}{2^{n-1}} \times 2^{n-1} \rightarrow \log 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

即ち $h(S, \alpha) = \log 2$. 実は $h(S) = \log 2$ が成立。

$\xi = \bigvee_{n \geq 1} S^{-n}\alpha$ は右図の如き縦線への分割となる。 $\xi = \{C(x) = \{x\} \times [0, 1)\}$ とおくと

$$dP_\xi(C(x)) = dx, \quad P(dy|C(x)) = dy, \quad \text{である。}$$

$S\xi$ は、 ξ の縦線を二等分して出来る分割だから、

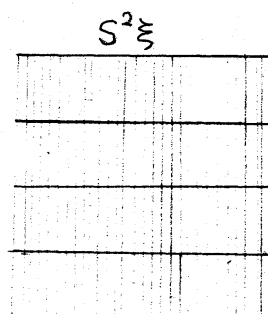
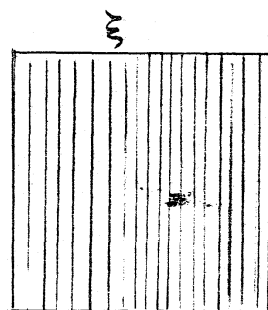
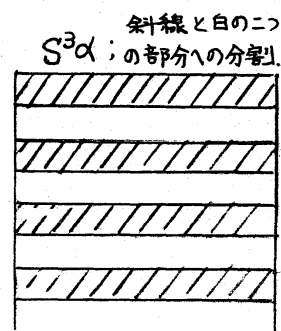
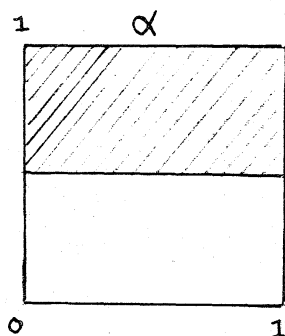
$$H(S\xi|\xi) = H(\alpha|\xi)$$

$$= - \int \log \frac{1}{2} dP_\xi = \log 2$$

又、 $S^n\xi$ は、 ξ の縦線を更に 2^n 等分して得られる分割だから $\bigvee_n S^n\xi = \varepsilon$ を得る。又

$\bigwedge S^n\xi = \nu$ もわかり、 S が K-system

であること、従ってエルゴード的なことがわかった。



§ 3. C -system

この § に関しては, [6], [7], [10], [11], [33] 等が
総合報告的なものであり [4], [5], [8], [9], [22] 等が
それ等の内容を構成している論文である。

この § では, *compact, connected, smooth Riemannian manifold* M 上の滑らかな変換の作る flow, 例えば, 滑らかな Hamiltonian から決まる力学系, 測地的 flow, のエルゴード性に関する定理を述べる。

定義 3. 1. C^2 -differentiable な diffeomorphism の
one-parameter group $\{S_t\}$ が C -flow $\Leftrightarrow$

(i) $\frac{d}{dt} S_t m \big|_{t=0}$ non-vanishing

(ii) M の tangent plane の field X_m, Y_m, Z_m が存在し,

$TM_m = X_m \oplus Y_m \oplus Z_m$, $\dim X_m, \dim Y_m \geq 1$ である。但し

Z_m は $\{S_t\}$ の点 m における測度 vector の張る一次元 space.

(iii) 任意の $t > 0$ に対し, 次の式が成立する,

$$\|S_t \xi\| \geq a e^{\lambda t} \|\xi\|, \|S_{-t} \xi\| \leq b e^{-\lambda t} \|\xi\| \quad \xi \in X_m$$

$$\|S_t \xi\| \leq b e^{-\lambda t} \|\xi\|, \|S_{-t} \xi\| \geq a e^{\lambda t} \|\xi\| \quad \xi \in Y_m.$$

C -diffeomorphism S は同様に定義される。即ち, (i) は不要, (ii) は $TM_m = X_m \oplus Y_m$ に直す, (iii) は整数 $t > 0$ に対して要求する。

定理 3.1. . C -system はエルゴード的。

定理 3.2. C -diffeomorphism は K -system.

定理 3.3. C -flow に対しては次のいづれかが成立,

(i) K -system である,

(ii) non-constant な固有函数をもつ。

以上が C -system における重要な結果である。次に、測地的 flow における定理をあげよう。

定理 3.4. M はトーラス T^2 でも Klein の壺でもなく $\dim M \geq 2$ であって、測地的 flow がエルゴード的ならば
 $\Rightarrow$ 唯一つ連続な固有函数は定数である。

定理 3.5. 負曲率空間の測地的 flow は C -flow である。従って定理 3.4 により、 K -flow である。

次にエントロピーの上からの評価を与える定理を述べよう。 S を diffeomorphism とし、 $\lambda_m = \sup_{w \in TM_m} \frac{\|*S_m w\|}{\|w\|}$

$\lambda = \max_{m \in M} \lambda_m$ とおく。

定理 3.6. S のエントロピーは、 $R(S) \leq \dim M \cdot \log \lambda$

上の六つの定理の陰にかくれた重要な定理がある。それは、 C -system の foliation の絶対連続性に関する定理と、その foliation の果す役割に関する定理である。次の §4 の Sinai の考え方は、後者の部分の一般化をすることである。

§ 4. Sinai の formulation — Transversal field.

実際の物理系に現われる flow は, § 3 で論じられたほど十分な正則性を持って居るとは限らない。物理系にも適用し得るよう考える。この § の内容は, [31] を参照されたい, [33] の押川氏の報告 (1-33) は簡潔にその内容が紹介されておりわかりやすい。

M を連結な orientable な C^∞ -Riemannian manifold で境界を持ち得る。境界はいくらかの特異性を許した正則性を要請する。 M 上の flow $\{S_t\}$ は, 境界 ∂M に到達するまでは, 特異性を持たないベクトル場により定まる微分方程式系に従って運動し, ∂M に到達すると, ∂M から ∂M への滑らかな変換で他の ∂M 上の点に移りそこから内部に向けて運動するものとする。

定義 4. 1. U を M の可測な部分集合, ξ を U の可測分割で, その要素 C_i は k -次元南球に同相な, M の区分的に滑らかな k -次元南局所部分多様体であり, C_i 上の Riemann 計量から決まる体積要素 $d\sigma_{C_i}$ により, 条件付測度が

$$P(A|C) = \int_{A \cap C} P(y|C) d\sigma_C(y)$$

と密度函数 $P(y|C) > 0$ で表わされるものとする。このとき, ξ を U における局所的な可測ファイバー構造と呼ぶ。

このような, 局所的な可測ファイバー構造の族 (U_α, ξ_α)

が次の条件を充すとき可測ファイバー構造 Z が与えられたという。(i) $\{U_\alpha\}$ が M の局所基, i.e. 任意の B , $P(B) > 0$, $P(M-B) > 0$ に対し, U_α が存在し $P(U_\alpha \cap B) \cdot P(U_\alpha \cap (M-B)) \neq 0$ を充し, $\{U_\alpha\}$ は M の各点への分割 ε を生成する。

(ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ のとき, 殆んど全ての $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対し, $C_{\xi_\alpha}(x) \cap U_\beta = C_{\xi_\beta}(x) \cap U_\alpha$ であり*, これ等が, R -次元の区分的に滑らかな局所的部分多様体である。

このとき, (ii) の関係で接続されて出来る連結な R -次元多様体を Γ とし, かかる Γ の全体を $Z = \{\Gamma\}$ と記す。

定義 4. 2. 二つの可測ファイバー構造 Z_1 と Z_2 において, Z_2 が Z_1 に絶対連続とは $\iff P(U_\beta^2 | C_{\xi_\alpha}^1) > 0$ なる U_β^2 に対し, $\mu(A) = P(\bigcup_{x \in A} C_{\xi_\beta}^2(x))$ によって定まる $A \subset C_{\xi_\alpha}^1 \cap U_\beta^2$ の測度と, $P(A | C_{\xi_\alpha}^1)$ が互に絶対連続であり, $\{\bigcup_{x \in C_{\xi_\alpha}^1 \cap U_\beta^2} C_{\xi_\beta}^2(x); C_{\xi_\alpha}^1, \beta, \alpha\}$ が M の局所基をなす。

命題 4. 1. Z_2 が Z_1 に絶対連続ならば, $\mathcal{V}_{Z_1} \wedge \mathcal{V}_{Z_2} = \mathcal{V}$. **

S をある M 上の automorphism とする。もしある可測ファイバー構造 $Z = \{\Gamma\}$ に対して, $S\Gamma(x) = \Gamma(Sx)$ が成立す

* $C_{\xi_\alpha}(x)$ で点 x を含む分割 ξ_α の要素を表わす。

** 可測ファイバー構造 Z に対し, $\Gamma(x)$ で x を含む sheet を表わす又 $\mathcal{V}_Z$ で M の各 Γ への分割の可測被覆を表わす。

れば, Z を S の transversal field と呼ぶ。

S が Riemannian manifold Γ から $S\Gamma$ への変換として, $S\Gamma$ の接空間に引起す作用素 $*S$ の作用素ノルム $\|*S\|$ が全ての点 $x \in M$ で $\|*S\| < 1$ ならば, Z は拡大しているといい, $\|*S^{-1}\| < 1$ ならば縮小しているという。

$\text{flow } \{S_t\}$ に対しても同様に定義される。

定理 4. 1. System $\{S_t\}$ の拡大している transversal field Z が存在するならば, M の可測分割 ζ で次の三条件を充すものが存在する。

(i) $S_t \zeta > \zeta, t > 0$, (ii) $\bigvee_t S_t \zeta = \varepsilon$ (iii) $\bigwedge_t S_t \zeta = \nu_Z$ 。
従って, $\nu_{\{S_t\}} \leq \nu_Z$ が成立する。又 $\nu_Z = \nu$ が成立するならば, $\{S_t\}$ はエルゴード的である。

定理 4. 2. automorphism S の transversal field で拡大する Z_1 と縮小する Z_2 が存在して, 互に絶対連続ならば, 定理 4. 1 で構成される ζ は, $h(S\zeta|\zeta) = h(S)$ を充し, $\pi(S) = \nu_{Z_1} = \nu_{Z_2} = \nu$ 。

従って, S は K-system であり, エルゴード的である。

定理 4. 3. $\text{flow } \{S_t\}$ の transversal field で拡大する Z_1 と縮小する Z_2 が存在し, $\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge \tilde{Z}$ と $\tilde{Z}_2 = Z_2 \wedge \tilde{Z}$ が互に絶対連続ならば, $\pi\{S_t\} = \nu_{Z_1} = \nu_{Z_2}$ 。

但し, $\tilde{Z}$ は $\{S_t\}$ の軌跡のなす一次元可測ファイバー構造,

$Z_i \wedge \tilde{Z} = \tilde{Z}_i$ は Z_i と $\tilde{Z}$ から構成される $1 + \dim Z_i$ 次元の可測ファイバー構造を意味する。

例 §3 の例を再び考えてみよう。Riemannian manifold

ではないが本質的に変らない。右図の

グラフで定義される $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ の写

像 φ を考える。 $V_1 = [0, 1] \times ((0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, 1))$

の分割 ξ_1 $C_{\xi_1}(x) = \{x\} \times (\frac{2}{3}, 1) \cup \{\varphi(x)\} \times (0, \frac{1}{3})$,

及び有理点を端点とする長方形とその縦

線への分割を考えれば、可測ファイバー構

造が出来る。その一つの sheet $\Gamma(x, y)$ は、

$\{\dots \varphi^{-1}(x), x, \varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$ における縦線を連結

して出来る集合である。今 $S\Gamma(x, y) =$

$\Gamma(S(x, y))$ であることと $\|S^{-1}\| = 2$ であ

ることは容易にわかる。従って $\{\Gamma\} = Z$ は、拡大する trans-

versal field である。定理 4.1 によって与えられる増加分

割は自身である。同様に正方形の横線への分割を

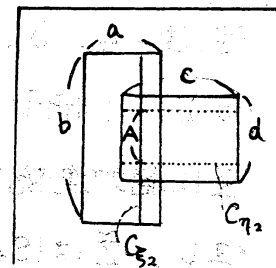
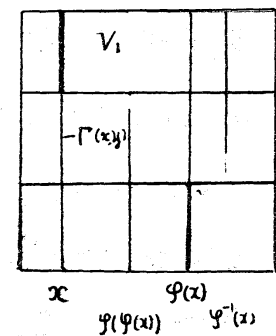
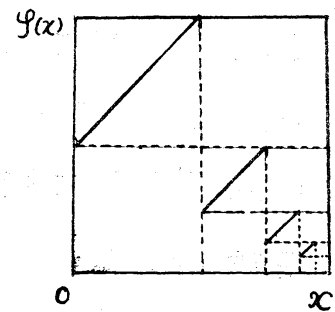
考えることにより縮小する transversal

field Z' が構成出来る。 Z と Z' は互に

絶対連続、(例えば右図で、 $P(\bigcup_{(x,y) \in A} C_{\eta_2}(x, y)) = C \times \text{Lebesgue 測度 } A$

$= a P(A | C_{\xi_2})$ が成立するから明らか) として 定理 4.2 により

S は K -system であり、 $h(S) = \log 2$ である。



§ 5. ある簡単なモデル

この § で [28] で扱われている問題に [29] 及び § 4 の方法を適用することを考えてみよう。

図 1 の如く、二次元の箱 L の中に、滑らかな境界 Γ で囲まれた凸領域 D があり、箱の内部 (D の外部) で質量 1 の質点が速さ 1 で慣性運動をし、 Γ と箱 L の壁で完全弾性衝突をしながら運動しているとしよう。

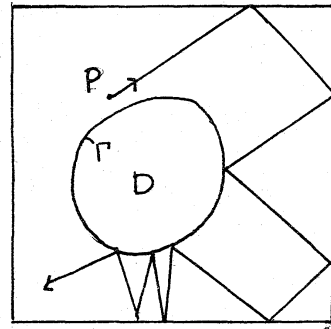


図 1

(本質的ではないが Γ の曲率は零にならないと仮定する。又、 L の壁は二次元トーラスとしてつながっているとしてもよい)。

1°. 衝突

点 P から微小角 $d\theta$ だけ異なった角度で出発した二つの軌跡を考え、夫々点 A, B で Γ と衝突し、時刻 t における位置を P_t, Q_t とする。距離 AP を τ 、 A における反射角を ψ 、 ρ を点 A における Γ の曲率半径とする。又直線 AP_t, BQ_t の交点を P' と置くと高次の微少量を無視して

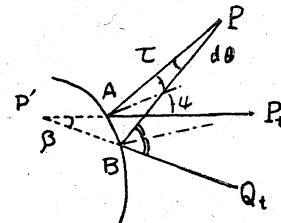


図 2

$$\angle AP'B = \left(\frac{2\tau}{\rho \cos \psi} + 1 \right) d\theta$$

$$\overline{P'A} = 1 / \left\{ \frac{2}{\rho \cos \psi} + \frac{1}{\tau} \right\}$$

$$\overline{P_t Q_t} = \left\{ t + \frac{2\tau}{\rho \cos \psi} (t - \tau) \right\} d\theta$$

が成立する。この事実から、一点 P から各方向に出発した軌跡の時刻 t における集合が作る波面を考えれば、同一の波面上の二点の波面に沿っての距離は時刻 t の指数函数的に増加することがわかる。そのことを使って Sinai [28] はここで考える flow のエントロピーが正であることを証明しようとしたが、証明は完全ではない。

2°. 測度空間と flow.

$\Omega = \{\omega = (p, \vec{v}) = (x, y, \theta) ; p = (x, y) \in L-D, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ とおく。 $\vec{v}$ は点 p を足に持つ単位速度ベクトルで、ある固定方向となる角度 θ を径数にとる。 Ω 上の測度 P を

$$dP(\omega) = dP(x, y, \theta) = dx dy d\theta$$

で定義すれば、 $S_t \omega = (p_t, \vec{v}_t)$, (但し $\omega = (p, \vec{v})$), p_t は点 p から速度 $\vec{v}$ で出発した軌跡の時刻 t における位置 $\vec{v}_t$ をその時点の速度とする), によって定まる $\{S_t\}$ は flow になる。我々はこの flow を問題の対象とする。

3°. flow の表現, ... パラメーターの変換

Γ 上の点の径数として、その点における法線方向をとる。 $\rho(y)$ はその点における Γ の曲率半径、 $\tau(y, \psi)$ は点 y から法線との角 ψ で出発した軌跡が Γ に衝突するまでの時間とする。 $\omega \in \Omega$ の径数として、 $t \leq 0$ で $S_t \omega$ が最後に Γ に衝突した点 $q(\omega) = y$, その点での反射角 $\psi = \psi(\omega)$,

今、波面 $\tilde{R}_t^\pm(\pi(S_t\omega))$ を考えれば、
 $t \rightarrow \infty$ のとき $\pi(\omega)$ の近傍で、ある区
 分的に滑らかな (C^2 -級) の曲線に収束
 する。それを $\tilde{R}^\pm(\omega)$ で表わし、対応
 する $R^\pm(\omega)$ を考える。(図の中で、 $R_t^\pm(\pi(S_t\omega))$ が $R^\pm(\omega)$ に収束する。)

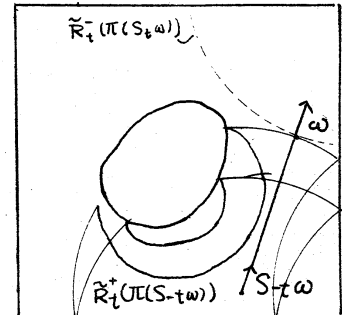


図 4.

命題 5. 1. $\omega' \in R^\pm(\omega) \Rightarrow \omega \in R^\pm(\omega')$,

$$R^\pm(S_t\omega) = S_t R^\pm(\omega).$$

もし、上のようにして構成された、 $Z^+ = \{R^+\}$ 、 $Z^- = \{R^-\}$
 なる波面の集合が、可測ファイバー構造の条件を充つならば、
 §4 の定理が適用出来るわけである。 $Z^+ = \{R^+\}$ が縮小する
 $Z^- = \{R^-\}$ が拡大する性質を持つことが、1° の事実から容
 易にわかる。従って、我々は少くとも次のことは言える。

命題 5. 2. 与えられた力学系の flow $\{S_t\}$ のエントロ
 ピー $h(S_t)$ は 正であり 次の評価が成立する。

$$h(S_t) \geq t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \log \left(1 + \frac{2}{K(\varphi, \psi) p(\varphi) \cos \psi} \right) p(\varphi) \cos \psi d\varphi d\psi$$

ここで、 $K(\varphi, \psi)$ は、 $K(S(\varphi, \psi)) = \left\{ \tau(\varphi, \psi) + (K(\varphi, \psi) + \frac{1}{p(\varphi) \cos \psi})^{-1} \right\}^{-1}$
 で定まる連分教から決る。

(もし、 $\tilde{Z}^+$ 、 $\tilde{Z}^-$ が互に絶対連続なことが示されれば、
 上の不等号は、等号となり、 $\{S_t\}$ がエルゴード的であり、
 K -system なことがわかる。)

§ 6. 具体的な力学系の例

この § は [10] [28] [29] [31] 等を参照されたい
しかし報告者はその完全な証明を知らないままここにあげら
れた事例を紹介することをお許し願いたい。

例 1. 定理 3.5 で負曲率空間の測地的 flow は K -
system 従ってエルゴード的であることが分かった。この
ような運動は、ユークリッド空間の中に、曲面 V^2 を置き
その近くに、引力と斥力の中心を配置して V^2 上にポテンシ
ヤルを引おこし、このポテンシャルの下での慣性運動と同値
である。 c.f. [18] .

例 2. L を中心の座標 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 辺長 1 の正方形. $V(r)$
を単調減少函数で $V(r)=0 \quad r \geq r_0$ がある $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ に
対して成立するものとする. $U(p_1, p_2) = V(r); \quad r = \sqrt{(p_1 - \frac{1}{2})^2$
 $+ (p_2 - \frac{1}{2})^2}$ をポテンシャルとする力を受けて、質量 m の質
点が運動している力学系を考えよう。

Case 1. L の壁で反射角と入射角が等しいように、完全
弾性衝突をしている。

Case 2. L の両側を二次元トーラスになるように identify
してある。

定理. $|V'(r)| > b_1, |V''(r)| < b_2$ ならば、上の二つの
系はエルゴード的で、エントロピーは正。

例 3. L の中を例 1. の如きポテンシャルを持つ二つの粒子が運動している系の $flow$ のエントロピーは正。

例 4. Q を三次元ユークリッド空間の単位立方体とする。その中に直径 d 質量 m の球体が n 個入っており全エネルギー H で、互に、並に壁で、弾性衝突しながら運動している。この $flow$ のエントロピーは正であり、エルゴード的である。

例 5. §5. で論じた場合に、除外領域 D の数を増したり、 L の両側をトーラスになるように *identify* しても同じ議論が出来る。

REFERENCE

- 1 Abramov, L.M. ; The entropy of a flow, Dokl. Mat. A.N. SSSR 128 No. 5. (1959) 873-876.
- 2 Ambrose, W. ; Representation of ergodic flows, Ann. Math. 43 (1941) 723-729.
- 3 Anosov, D.V. ; Определённых циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, Mat. Sbor. 7, 50 299-334.
- 4 Anosov, D.V. ; Roughness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature, Soviet Math. Dokl. 3 (1962) 1068- .
- 5 Anosov, D.V. ; Ergodic properties of geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature, Soviet Math. Dokl. 4 (1963) 1153- .
- 6 Anosov, D.V. ; Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Trud. Mat. Inst. V.A. Steklova (1967).
- 7 Anosov, D.V.- Sinai, Y.G. ; Некоторые гладкие эргодические системы, Uspehi Mat. Nauk 22 No.5 (1967) 107-172.
- 8 Arnold, V.I. ; Remarks on rotation numbers, Sibirskii Mat. Zhurnal 2 No.6 (1961) 807-813.
9. Arnold, V.I. ; Some remarks on flows of line elements and frames, Soviet Math. Dokl. 2 (1961) 562-564.
- 10 Arnold, V.I. - Avez, A. ; Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Paris (1966).

- 11 Avez, A. ; Ergodic theory of dynamical systems, Vol.1. (1966)
Vol.2. (1966)
Univ. Minnesota Inst. : Technology School of Math..
- 12 Halmos, P.R. ; Lectures on ergodic theory, New York (1958).
- 13 Hedlund, G.A. ; Fuchsian groups and mixtures, Ann.Math. 40
No.2 (1939) 370-383.
- 14 Hedlund, G.A. ; The dynamics of geodesic flows, Bull. Amer. Math.
Soc. 45 No.4 (1939) 241-260.
- 15 Hopf, E. ; Ergoden Theorie.
- 16 Hopf, E. ; Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten
negativer Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig
91 (1939) 261-304.
- 17 Hopf, E. ; Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom
unstabilen Typus II, Math. Ann. 117 (1940) 590-608.
- 18 Kolmogorov, A.N. ; Общая теория динамических систем и
классическая механика, Proc. International Congress
Math. 1 (1954) 315-333.
- 19 Kolmogorov, A.N. ; A new metric invariant of transitive systems
and automorphisms of Lebesgue space, D.A.N. 119 (1958)
861-864.
- 20 Kolmogorov, A.N. ; On the entropy per time unit as a metric
invariant of automorphisms, D.A.N. SSSR 124 (1959) 754-755.
- 21 Krylov, N.S. ; Works on the foundations of statistical mechanics,
Izdat. Akad. Nauk. SSSR (1950).
- 22 Kuchinireenko, A.G. ; An estimate from above for the entropy of
a classical system, Sov. Math. Dokl. 6 No.2 (1965) 360-362.

- 23 Rohlin, V.A. : On the fundamental ideas of measure theory, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10 (1962) 1-54.
- 24 Rohlin, V.A. - Sinai, Ya.G.; Construction and properties of invariant measurable partitions, Sov. Math. Dokl. 2 No.6 (1961) 1611-1614.
- 25 Sinai, Ya.G. ; Geodesic flows on manifolds of negative constant curvature, Sov. Math. Dokl. 1 No.2 (1960) 335-339.
- 26 Sinai, Ya.G. Geodesic flows on compact surfaces of negative curvature, Sov. Math. Dokl. 2 No.1 (1961) 106-109.
- 27 Sinai, Ya.G. ; Dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectra, A.M.S. Transl. (2) 39 (1961) 83-110.
- 28 Sinai, Ya.G. ; On some "Physical" system with positive entropy, Vest. Moscow. Univ. 5 (1963) 6-12.
- 29 Sinai, Ya.G. ; On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics, Sov. Math. Dokl. 4 No.6 (1963) 1818-1822.
- 30 Sinai, Ya.G. ; A weak isomorphism of transformations with an invariant measure, Mat. Sbornik 63 (105) No.1 (1964) 23-42.
- 31 Sinai, Ya.G. ; Classical dynamical systems with countably multiple Lebesgue spectra II , Izvestiya Akad. Nauk SSSR 30 (1966) 15-68.
- 32 Totoki, H. ; Flow と エントロピー , Seminar on Probability 20.
- 33 定常過程研究会報告集, 数理論講究録 20.