

非線形振動場のダイナミクス

京都大学 理学部 蔵本由紀

非線形素子の代表的なものとして、振動素子と興奮素子がある。このような素子が多数寄り集まってできる場の性質の解明は、物性物理学においてのみならず生命科学や情報科学においても、近年ますますその重要性が高まっている。それに伴い、関連する研究も大いに活況を呈しつつあるように見える。しかしながら、非線形振動子の多体系について言えば、その数学的困難性のために研究は一貫した方法論を欠き、また興奮素子多体系については、素子が持つ位相情報を無視した扱い（極端な場合はそれを 2 値化＝スピン化した扱い）に研究は終始していた。しかるに、振動素子と興奮素子は、条件によって相互に転換しうる同根のユニットであり、したがってこれらはともに位相情報を担っている。事実、興奮系の位相情報が場のレベルにおいてはもとより、素子レベルにおいても重要な役割を果たすことを示唆する実験的証拠が最近視覚野の情報処理に関連して現れ始めている（後述）。

上に述べた事実は、これらの素子に対する統一的な力学モデルの必要性を強く示唆している。そうしたモデルは次の諸条件を充す必要がある。(a) モデル力学系に含まれるパラメータを変化させることによって、興奮性と振動性との相互移行が可能であり、したがって位相情報が保持されていること、(b) モデルは十分に単純で、多体系に対する大規模な計算機シミュレーションが可能であり、かつ特別の場合にはかなりの数学的解析も可能であること、(c) モデルの理論的基礎がしっかりしていること。

これらの条件を高いレベルで充すモデルとして、我々は以前「位相モデル」を提唱し、それに基づく研究を進めてきた。その結果、次第に明らかになってきたことは、振動・興奮場がいわゆる「相互引き込み」の機構によって、きわめて高度な情報処理能力を潜在的に有する系だということである。特に、「引き込み相転移」はその中核となる概念であり、我々の研究も主としてこのテーマをめぐってなされてきた。今後の具体的目標の一つとして、現在世界的に注目を浴びている、高等動物の視覚皮質野における引き込み的情報処理の問題があり、その理論的解明を目指したい。適切な素子モデルとともに、大規模シミュレーションがこうした研究に果たす決定的役割を考えると、今後数年間に研究の飛躍的進展が期待される。

以下では、本研究の基礎をなす位相モデルとはどういうものか、それはどのような特徴を持ち、どのような問題に適用できるかを述べる（文献 1）。

非線形振動とは、位相空間におけるリミットサイクル軌道 C 上の周期運動であるから、 C 上に適当な局所座標 ϕ を導入すれば、

$$\dot{\phi} = v(\phi) \quad (1)$$

によってその運動が記述される。 $v(\phi)$ の形は局所座標の選び方に依存し、最も簡単な選び方は $v(\phi) = \omega$ である。 ϕ を位相 (mod. 2π で定義) と呼ぶ。振動子は初期には C 上にあるとは限らず、また外部から力を受けると一般に C から外れるから、位相 ϕ の定義を C 外に拡張する必要がある。これは可能であり、各 ϕ に対する等位相面を適当に導入すれば、自由振動をいつでも (1) の形に表すことができる。2 個の弱結合振動子に対しては ($v = \omega$ として)、

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + \Gamma(\phi_1 - \phi_2) \quad (2)$$

及び、1 と 2 を交換した式が近似的に成り立つ。 $\Gamma(x)$ は x の 2π 周期関数であり、ひとつの簡単なモデルと

して、 $\Gamma(x) = -K \cdot \sin(x + \alpha)$ ($|\alpha| < \pi/2$) を採用することができる。したがって、振動子多体系のモデルとして、

$$(A) \quad \dot{\phi}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \cdot \sin(\phi_j - \phi_i + \alpha)$$

を考え、その性質を調べることは興味深い。系の次元や結合定数 K_{ij} の与え方、 α の値、また ω_i の分布如何によっていろいろな場合が考えられる。更に、系に外力やノイズが加わっている場合も、それらの効果を振動子間結合と同様に弱いと仮定して摂動的に扱えば、上式が拡張され、これらの効果を表す項が付加される。

振動素子の場合には(1)式の v が定符号であるために $v = \omega$ と置くことができたが、 v がある ϕ のところで符号を変えるとすると、それは興奮素子の最も簡単なモデルとなっている。一つの便利なモデルは、 $v = \omega - a \cdot \sin \phi$ である。そこで、振動興奮両素子を含む系に対しては、(A) の代わりに

$$(B) \quad \dot{\phi}_i = \omega_i - a \sin \phi_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \cdot \sin(\phi_j - \phi_i + \alpha)$$

を考えるのが適当であろう。

ニューロンは典型的な興奮素子である。したがって、(B) は神経場のモデルとしても用いることができよう。しかし、ニューロン間結合は、その他の生物振動子と呼ばれるものの多くにおいてと同様、(B) のような滑らかな結合ではなく、パルス的であることが多い。また、神経膜の脱分極 (= 発火) という特徴をより際立たせるために、integrate-and-fire 型の素子モデルを採用するのが一層望ましい。相互作用をデルタ関数によって表し、 $v = a - \phi$ ($0 < \phi < 2\pi$) を採用することによって、これらの特徴を持たせることが可能である。ここに、 $\phi = 0$ でニューロンは発火するものとし、その瞬間においてのみ、他のニューロンに作用を及ぼすことができる。例えば、視覚皮質のニューロン集団モデルとして我々が採用したものは(文献 2)

$$(C) \quad \dot{\phi}_i = a - \phi_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \cdot \text{sgn}(\dot{\phi}_j(t_j)) \delta(t - t_j) + \eta_i(t)$$

なる形を持っている。ここに t_j は ϕ_j が発火する時刻、即ち $\phi_j = 0$ となる時刻を表し、 η_i は、個々のニューロンに独立に働くノイズの効果を表している。また、符号関数を挿入したのは、ノイズその他の存在によって、 ϕ_j が 0 位相点を逆方向に切る (つまり “逆発火”) の可能性を考慮したものである。

(A) (B) (C) は我々の研究の基礎となるモデルである。

上述のモデルに関しては、解析的結果も数多く見いだされているが、以下では計算機シミュレーションによって得られたいくつかの結果とその解釈を述べよう。

我々が興味を持つ問題の一つは、非線形振動子集団はどのような条件の下で引き込み相転移を示すか、そしてそれは平衡相転移とどのように異なるか、という問題である。図 1 はモデル (A) のシミュレーションの一例である(文献 3)。2 次元正方格子点上に N 個の振動子を配列し、最近接格子点間に対して $K_{ij} = K (> 0)$ 、それ以外は 0 とする。各自然振動数 ω_i は分散 1 のガウス分布に従うランダムな値を取る。相互作用によって各振動数は変わるから、それを $\tilde{\omega}_i$ で表す。 $\tilde{\omega}_i$ は $d\phi_i/dt$ の長時間平均によって定義する。図 1 は $\tilde{\omega}_i$ のパター

ンを示す。それはクラスター的な構造を示しており、一つのクラスターはほぼ同一の振動数を持つ。従って、最大の大きさをもつクラスターのサイズがオーダー N になれば、振動数の凝縮が起こったことになり、どのように離れた二つの振動子も同一の振動数を持ち得るという意味において、長距離秩序が現われたことになる。秩序パラメーターとして、

$$r = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_s}{N} \quad (3)$$

を取るのが適当であろう。ここに、 N_s は最大クラスターのサイズであるが、その定義の詳細は省略する。このような相転移はパーコレーションに似ているが、隣接対が互いに引き込まれるか否かが当該の対だけでなく、それを取り巻く環境全体に依存しているという点で異なる。

モデル(B)にしたがって、興奮素子を含む系に対して同様のシミュレーションを行なった(文献3)。そのパターンの一例を図2に示す。図1との定性的な違いは明白で、この場合引き込みによって振動数は平均よりもずっと高くなっている。

モデル(C)は、視覚情報処理の問題に関して最近我々が提出したものである。(文献2)この仕事はC.M. Gray 達(文献4)やR. Eckhorn 達(文献5)による生理学実験が直接の動機になっている。これらの実験によれば、適当な外部視覚刺激に対して特異的に応答する一群のニューロンは、単にその平均発火頻度が高いだけでなく、平均発火頻度自体が40~60ヘルツの振動数で振動する。我々はこれが集団内の相互引き込みによる集団振動であると考え、(C)のようにランダム力を含む位相モデルによってこのニューロン集団のダイナミクスを考察しようと考えた。実験によれば、空間的に隔たった集団間にも引き込みが起こることがわかっているが、モデル(C)をそのような場合へ拡張することは可能である。視覚野において、あるハイパーカラム内の特定の方向選択性を持つカラムがモデル(C)によって表されるとすれば、パラメーター a の値は外部刺激に依存し、カラムの方向選択性にマッチした刺激に対して最大の値を取ると考えられる。図3はこのモデルのシミュレーションにより得られた発火頻度の振動パターンである。パラメーターを変えてゆくと、非振動状態から振動状態へと転移してゆくことがわかるであろう。

モデル(C)をめぐる研究は、端緒についたばかりであり、大部分は今後に残されている。特に、異なるカラム間の引き込みによって、いわゆる feature linking がどのように実現されるか、またこれがより大域的な情報処理にどのように関わってゆくかは、今後に残された大きな問題である。

参考文献

- 1) Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984)
- 2) Y. Kuramoto, to be published in *Physica D* (1991)
- 3) T. Aoyagi and Y. Kuramoto, submitted to *Phys. Lett. A*
- 4) C.M. Gray and W. Singer, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **86**, 1698 (1988)
- 5) R. Eckhorn et al., *Biol. Cybern.*, **60** 121 (1988)

図1. モデル(A) ($\alpha = 0$) の計算機シミュレーション。

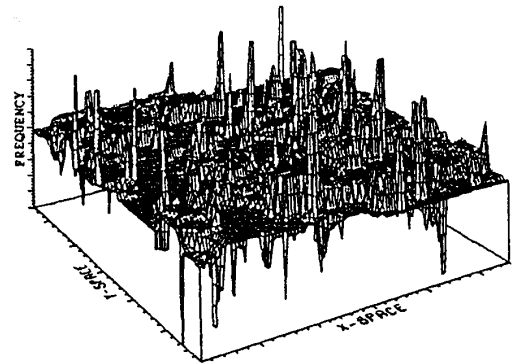


図2. モデル(B) ($\alpha = 0$) の計算機シミュレーション。

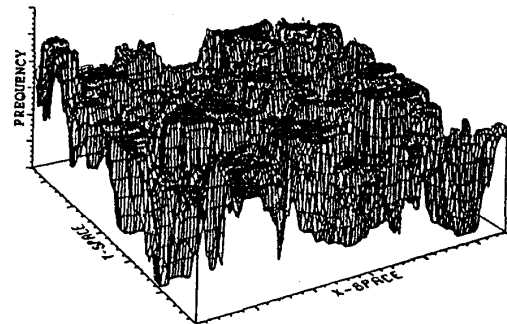


図3. モデル(C) の計算機シミュレーション。短時間にわたって平均した発火頻度の時間発展を示す。 α の増加(上 → 下)とともに、集団振動が顕著になる。

