

Cuspidal automorphic representation に関する
Garrett の triple L-function の関数等式について

京大理 池田 保

(Tamotsu Ikeda)

P. B. Garrett [1], [2] は総実代数体上の weight の等しい 'new form' の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与えた。本稿では彼の結果を拡張し、 GL_2 の任意の cuspidal automorphic representation の3つ組に関する triple L-function の解析接続と関数等式を与える。詳しくは現在準備中の論文を参照していただきたい。

§1. 代数的準備

k を体とする。 k 上定義された次のような代数群を考える。

$$H = GSp_3, \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H : C = 0_3 \right\}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0_3 & D \end{pmatrix} \in P : A = D = \mathbb{1}_3 \right\}$$

$$G = \{ (g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}) \in (GL_2)^3 : \det g^{(1)} = \det g^{(2)} = \det g^{(3)} \}$$

Z を G の center における単位元の連結成分とする。 G の H へのうめこみ z を

$$z \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ & a_3 & & b_3 \\ \hline c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ & c_3 & & d_3 \end{array} \right).$$

と定義する。

P の rational character χ_0, χ_1 を

$$\chi_0 \left(\begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & A^{-1} \end{pmatrix} \right) = m, \quad \chi_1 \left(\begin{pmatrix} mA & * \\ 0_3 & A^{-1} \end{pmatrix} \right) = \det A.$$

と定義する。 P の modulus character δ は $\chi_0^6 \chi_1^4$ で与えられる。

§ 2. Eisenstein series.

k を global field とする。 k の各素点 v に対して、 H_v の極大 compact 部分群 K_v を

v が non-archimedean の時、 $K_v = GSp_3(\mathcal{O}_v)$.

v が real の時、 $K_v = GSp_3(\mathbb{R}) \cap O_6$.

v が complex の時. $K_v = \mathrm{GSp}_3(\mathbb{C}) \cap U_v$
 と定義する. $K = \prod_v K_v$ とおく. この時. $H_v = P_v K_v$, $H(A) = P(A)K$. がなりたつ.

ω を $A^\times/k^\times$ の任意の quasi-character とする時. $I(\omega, \lambda)$ を. $H(A)$ 上の $\mathbb{C}$ -valued function f で次の 1), 2) を満たすもののなすベクトル空間とする.

1) f は右 K 有限.

2) 任意の $p \in P(A)$ に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0 \chi_1(p)) |\delta(p)|_A^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}} f(h).$$

また. $\tilde{I}(\omega, \lambda)$ を 1), $\tilde{2}$) をみたすもののなすベクトル空間とする.

$\tilde{2}$) 任意の $p \in P(A)$ に対して

$$f(ph) = \omega(\chi_0^{-2} \chi_1^{-1}(p)) |\delta(p)|_A^{\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}} f(h).$$

k の各素点 v に対して. 上の定義において $A^\times/k^\times$, ω , $H(A)$, $P(A)$, K をそれぞれ $k_v^\times$, ω_v , H_v , P_v , K_v でおきかえて得られるものを $I(\omega_v, \lambda)_v$, $\tilde{I}(\omega_v, \lambda)_v$ とする. この時.

$$I(\omega, \lambda) = \bigotimes'_v I(\omega_v, \lambda)_v, \quad \tilde{I}(\omega, \lambda) = \bigotimes'_v \tilde{I}(\omega_v, \lambda)_v$$

がなりたつ.

$C(K, \omega)$ を K 上の右有限な $\mathbb{C}$ -valued function f で、任意の $p \in P(A) \cap K$ に対して

$$f(pk) = \omega(\chi_0 \chi_1(p)) f(k)$$

をみたすもののなすベクトル空間とすると、 K への制限により、 $I(\omega, \mathfrak{A}) \simeq C(K, \omega)$. $\tilde{C}(K, \omega)$ も同様に定義すれば、 $\tilde{I}(\omega, \mathfrak{A}) \simeq \tilde{C}(K, \omega)$.

$I_{w_3} : I(\omega, \mathfrak{A}) \longrightarrow \tilde{I}(\omega, 1-\mathfrak{A})$ を次のように定義する。 $f \in I(\omega, \mathfrak{A})$ に対して、

$$I_{w_3} f(k) = \int_{U(A)} f(w_3 u k) du.$$

ただし、 $w_3 = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ -I_3 & O_3 \end{pmatrix}$. $U(A)$ の Haar measure du は $\text{Vol}(U(A)/U(K)) = 1$. となるよう定める。

この積分は $\text{Re } \mathfrak{A} \gg 0$ の時、絶対収束し、 I_{w_3} は $C(K, \omega) \rightarrow \tilde{C}(K, \omega)$ という operator とみて全 $\mathfrak{A}$ -平面に解析接続できる。

また、 k の各素点 v に対して $I_{w_3, v}$ を同様の積分で定義すれば、 $I_{w_3} = \bigotimes_v I_{w_3, v}$ がなりたつようにできる。

$f \in I(\omega, \mathfrak{A})$ または $f \in \tilde{I}(\omega, \mathfrak{A})$ の時、Eisenstein series $E(k; f)$ は $\text{Re } \mathfrak{A} \gg 0$ の時、絶対収束する級数

$$E(k; f) = \sum_{r \in P(k) \setminus H(k)} f(rk).$$

で定義され、全 $\mathcal{A}$ -平面に解析接続される。また次の関数等式がなりたつ。

$$f \in I(\omega, \mathcal{A}) \text{ に対して, } E(k; I_{\omega} f) = E(k; f).$$

§ 3. Rankin-Selberg convolutions

k を global field, π_i ($i=1, 2, 3$) を $GL_2(\mathcal{A})$ の cuspidal automorphic representation, φ_i を π_i に属する cusp form, ω_i を π_i の central quasi-character, $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3$ とする。

$\mathcal{A}/k$ の additive character ψ を固定する。 π_i の ψ に関する Whittaker model を $\mathcal{W}(\pi_i, \psi)$ とする。

φ_i はある $W_i \in \mathcal{W}(\pi_i, \psi)$ を用いて

$$\varphi_i(g) = \sum_{\alpha \in k^x} W_i \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right).$$

と展開される。

$f \in I(\omega, \mathcal{A})$ または $f \in \tilde{I}(\omega, \mathcal{A})$ に対して Rankin-Selberg 型の積分

$$\int_{Z(A)G(\mathbb{R}) \backslash G(A)} E(z(g); f) \prod_{i=1}^3 \varphi_i(g^{(i)}) dg \quad (2.1)$$

を考える。

Lemma. 1. $P(\mathbb{R}) \backslash H(\mathbb{R}) / z(G(\mathbb{R}))$ の完全代表系として次の5個がとれる。

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \right), & \eta_1 &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & -1 \\ & 1 & \\ \hline & 1 & -1 \end{array} \right), \\ \eta_2 &= \left(\begin{array}{cc|c} & & -1 \\ & 1 & \\ \hline 1 & & -1 \end{array} \right), & \eta_3 &= \left(\begin{array}{cc|c} & 1 & -1 \\ & & \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right), & \eta_4 &= \mathbb{I}_6. \end{aligned}$$

$R_j = z^{-1}(\eta_j^{-1} P \eta_j)$, $(0 \leq j \leq 4)$. とおけば, $j=1, 2, 3, 4$ の時, R_j は G のある proper parabolic subgroup の unipotent radical を正規部分群にもつ.

この Lemma により, $\operatorname{Re} s \gg 0$ ならば,

$$(2.1) = \int_{Z(A)N_0(A) \backslash G(A)} f(\eta_0 z(g)) \prod_{i=1}^3 W_i(g^{(i)}) dg$$

がなりたつことが証明できる。ここで,

$$N_0 = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & m_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & m_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in G; m_1 + m_2 + m_3 = 0 \right\}.$$

$f = \prod_v f_v$, $W_i = \prod_v W_{i,v}$ であれば, この積分は次の無限積に等しい.

$$\prod_v \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\gamma_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

v が non-archimedean で, $\pi_{i,v}$ がすべて class 1 の時, $\varpi_v \in k_v^*$ の素元, q_v を剰余体の位数とし, $f_v \in I(\omega_v, \mathbf{1})_v$, $W_{i,v} \in W(\pi_{i,v}, \psi)$ を $f_v|_{K_v} \equiv 1$, $W_{i,v}|_{GL_2(O_v)} \equiv 1$ とする時,

$$\int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\gamma_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v$$

$$= (1 - \omega_v(\varpi_v) q_v^{-2d-1}) (1 - \omega_v^2(\varpi_v) q_v^{-4d}) L(\mathbf{1}, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v$$

ここで, $L(\mathbf{1}, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)_v$ は, $\pi_{i,v} = \pi(\mu_i, \nu_i)$, μ_i, ν_i は k_v^* の unramified character とする時,

$$\underbrace{(1 - \mu_1 \mu_2 \mu_3(\varpi_v) q_v^{-d})^{-1} \cdots (1 - \nu_1 \nu_2 \nu_3(\varpi_v) q_v^{-d})^{-1}}_{8 \text{ 個}}$$

で与えられる.

注意. Garrett は同様の結果を $GL_2(k)$ の cusp form $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ に対してだけでなく, 次の場合にも得ている.

- 1) $GL_2(F)$ の cusp form φ_1 と $GL_2(k)$ の cusp form φ_2 .
 ここで F は k の総実な 2 次拡大.
- 2) $GL_2(K)$ の cusp form φ_1 . ここで K は k の総実な 3 次拡大.

§ 4. 主定理.

k_v を local field, ψ_v を k_v の additive character, $\pi_{i,v}$ ($i=1,2,3$) を $GL_2(k_v)$ の既約な admissible representation, とする.

$f_v \in I(\omega_v, \lambda)_v$, $W_{i,v} \in \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$ に対して

$$\Psi_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} f_v(\eta_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

$$\tilde{\Psi}_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) = \int_{Z_v N_{0,v} \backslash G_v} I_{W_{3,v}} f_v(\eta_0 z(g_v)) \prod_{i=1}^3 W_{i,v}(g_v^{(i)}) dg_v.$$

と定義する.

定理 1. $\Psi_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$, $\tilde{\Psi}_\lambda(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})$ は $C(k_v, \omega_v) \times \prod_{i=1}^3 \mathcal{W}(\pi_{i,v}, \psi_v)$ の上の 4 重線型形式として全 λ -平面に meromorphic に解析接続される。 $\pi_{1,v}$, $\pi_{2,v}$, $\pi_{3,v}$, ψ_v のみに依存する λ の有理型関数 $\mathcal{E}(\lambda, \pi_{1,v}, \pi_{2,v}, \pi_{3,v}, \psi_v)$ があって

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_A(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v}) &= \varepsilon'(2A-2, \omega_v, \psi_v)^{-1} \varepsilon'(4A-3, \omega_v^2, \psi_v)^{-1} \\ &\quad \times \varepsilon'(A, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &\quad \times \Psi_A(f_v; W_{1,v}, W_{2,v}, W_{3,v})\end{aligned}$$

かなりたつ.

ここで 右辺の最初の2つの ε' は k_v^* の quasi-character に対する ε' 因子で, χ を k_v^* の quasi-character とする時, k_v 上の任意の Schwartz-Bruhat function Φ に対して

$$\int_{k_v^*} \widehat{\Phi}(x) \chi^{-1}(x) |x|_v^{1-A} d^*x = \varepsilon'(A, \chi, \psi_v) \int_{k_v^*} \Phi(x) \chi(x) |x|_v^A d^*x.$$

かなりたつものとして定義される。ただし, $\widehat{\Phi}$ は Φ の ψ_v に関する Fourier 変換.

定理2. k_v^* の quasi-character μ_v, ν_v があって, $\pi_{1,v}$ が $\pi(\mu_v, \nu_v)$ の subquotient になっている時.

$$\begin{aligned}\varepsilon'(A, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) &= \varepsilon'(A, (\mu_v \otimes \pi_{2,v}) \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &\quad \times \varepsilon'(A, (\nu_v \otimes \pi_{2,v}) \times \pi_{3,v}, \psi_v).\end{aligned}$$

かなりたつ. ここで右辺の ε' は Jacquet [3] の定義した GL_2

$\times GL_2$ の ε' 因子。

k を global field, π_i を $GL_2(A)$ の既約な cuspidal automorphic representation とする。

k の素点の有限集合 S を

- 1) S は archimedean place をすべて含む。
- 2) $v \notin S$ ならば, $\pi_{i,v}$ は class 1.
- 3) $v \notin S$ ならば, ψ_v は order 0.

が満たされるように定める。

$$L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3) = \prod_{v \notin S} L(\lambda, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v})_v \text{ と定義する。}$$

π_i の contragredient representation を $\tilde{\pi}_i$ とする。

定理3. $L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3)$ は全 λ -平面に有理型関数として解析接続され、次の関数等式をみたす。

$$\begin{aligned} & L_S(1-\lambda, \tilde{\pi}_1 \times \tilde{\pi}_2 \times \tilde{\pi}_3) \prod_{v \in S} \varepsilon'(\lambda, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) \\ &= L_S(\lambda, \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3). \end{aligned}$$

例 $k_v = \mathbb{R}$. $\psi_v(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$. $\pi_{i,v}$ を weight k_i の holomorphic cusp form から生成される automorphic rep

resentation の $\mathbb{R}$ -component とすると.

$$\xi(s, \pi_{1,v} \times \pi_{2,v} \times \pi_{3,v}, \psi_v) = (-1)^{k_1+k_2+k_3+1} (2\pi)^{8s-8-4(k_1+k_2+k_3)}$$

$$\times \frac{\Gamma(k_1+k_2+k_3-2-s) \Gamma(k_2+k_3-1-s) \Gamma(k_1+k_3-1-s) \Gamma(k_1+k_2-1-s)}{\Gamma(s) \Gamma(s+1-k_1) \Gamma(s+1-k_2) \Gamma(s+1-k_3)}.$$

References.

1. P. B. Garrett, Decomposition of Eisenstein series; Rankin triple products, Univ. of Minnesota Math. Report.
2. ———, Integral representation of certain L-functions, attached to one, two, and three modular forms, to appear.
3. H. Jacquet, Automorphic forms on GL_2 . II, LN 278
4. R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, LN 544.
5. I. I. Piatetski-Shapiro and S. Rallis, L-functions for classical groups, to appear.
6. T. Satoh, Some remarks on special values of triple L-functions, to appear.
7. T. Ikeda, in preparation.