

二値画像に対する並列形処理と逐次形処理

豊橋技術科学大学

山下雅史

本多波雄

北橋忠宏

名古屋大学工学部

稲垣康善

1. まえびき 画像を局所的な演算を用いて処理する場合, その処理方法には, 画像上の各点を同時に処理する並列形と, 画像上の各点とある定まり順序で順に処理する逐次形とがある. 従来から, 画像, 特に二値画像に対する種々の並列形あるいは逐次形処理アルゴリズムが提案されてきたが, 両者の間の関係に対する一般論はほとんど展開されていない. そこで我々は, 二値画像に対する並列形処理と逐次形処理の関係を考察し, いくつかの結果を得たので報告する.

2. 諸定義と準備 [記法1] i) 整数の集合を $\mathbb{Z}$, 非負整数の集合を $\mathbb{N}$, 自然数の集合を $\mathbb{N}^+$, $[n] = \{1, \dots, n\}$, $B = \{0, 1\}$, によつて表わす.

ii) 領域 X から値域 Y への全域関数の集合を $[X \rightarrow Y]$, によ

て表わす. $\square$

[定義1] 大きき n の 二値画像 は関数 $X: [n]^2 \rightarrow B$ である.
 $X(i, j)$ を X_{ij} , $(X)_{ij}$ などと書く. $B_n = [[n]^2 \rightarrow B]$,
 $B = \bigcup_n B_n$. $\square$

[定義2] 位数 m の 近傍形 は m 項組 $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$ である.
 ここで, $p_i \in \mathbb{Z}^2$, $p_i \neq p_j$ ($i \neq j$), $p_i \neq (0, 0)$. 近傍位数 m の近傍形の集合を $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P} = \bigcup_m \mathcal{P}_m$ とする. $\square$

[記法2] 零ベクトルを 0 , 特く $p_0 = (0, 0)$ と表わす. $\square$

[定義3] 近傍位数 m の 局所関数 の集合 $\mathcal{F}_m$ を $\mathcal{F}_m = [B^{m+1} \rightarrow B]$ とする. $\mathcal{F} = \bigcup_m \mathcal{F}_m$. $\square$

[定義4] 走査 とは関数 $S: \mathbb{N}^+ \rightarrow [\mathbb{N}^+ \rightarrow (\mathbb{N}^+)^2]$ である.

ここで, $S(n): [n]^2 \rightarrow [n]^2$ は全単射である. $\square$

[定義5] 走査 S が近傍 $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$ に対して 正則 であるとは, 次の条件を満くすることである.

$$\begin{aligned} & \text{『 } \exists M (\subseteq [m]) \forall n (\in \mathbb{N}^+) \forall i (\in [n]^2) \forall j (\in [m]) [\\ & S(n)(i) + p_j \in [n]^2 \Rightarrow (j \in M \Leftrightarrow S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_j) \\ & < i)] \text{』} \quad \square \end{aligned}$$

本稿では, 走査は近傍に対して正則なものだけを考察の対象とする. 近傍 P に対して正則な走査の集合を $\mathcal{S}(P)$ と表わす.

[記法3] 近傍 $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$, $S \in \mathcal{S}(P)$ とする.

$$\text{pre}(P, S) = \{ p_k \mid S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_k) < i \},$$

$$\text{post}(\mathbb{P}, S) = \{ p_k \mid S(n)^{-1}(S(n)(i) + p_k) > i \}, \quad \text{と} \quad \forall 3. \quad \square$$

【定義6】 $f \in \mathcal{F}_m$, $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$ によつて定義される画像の並列変換 $\text{Par}(f, P)$ は次のように定義される.

$$\forall x \in B_n \text{ 可 } \exists z, Y = \text{Par}(f, P)(x). \quad z \in K,$$
$$Y_{ij} = f(X_{ij}, X_{i+\mu_1, j+\nu_1}, \dots, X_{i+\mu_m, j+\nu_m}), \quad p_k = (\mu_k, \nu_k),$$
$$\forall k (\in [m]) [(i + \mu_k, j + \nu_k) \notin [n]^2 \Rightarrow \sum (i + \mu_k, j + \nu_k) = 0] .$$

又, $\tau_{\text{Par}}^m = \{ \text{Par}(f, P) \mid f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m \}$, $\tau_{\text{Par}} = \bigcup_m \tau_{\text{Par}}^m$,
 とする. $\square$

[定義7] $f \in \mathcal{F}_m$, $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$, $S \in \mathcal{S}(P)$ によって定義される画像の 逐次変換 $\text{Seq}(f, P, S)$ は次のように定義される. $\forall x \in \mathcal{B}_n$ に対して, $Y = \text{Seq}(f, P, S)(x)$ には、 Y は以下の手続によって定義される.

```

for i := 1 until n^2 do
    Xsen(i) := f(Xsen(i), Xsen(i) + p1, ..., Xsen(i) + pm);
Y := X ;

```

$$= 0, \forall k (k \in [m]) [S(n)(i) + p_k \in [n]^2 \Rightarrow X_{S(n)(i) + p_k} = 0], \text{ 2' あり.}$$
$$\text{又, } \tau_{\text{Seq}}^m = \{ \text{Seq}(f, P, S) \mid f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m, S \in \mathcal{S}(P) \}, \tau_{\text{Seq}} = \bigcup_m \tau_{\text{Seq}}^m, \text{ 从而有. } \square$$

$\text{Seg}(f, P, S)(X)$ は, X の各要素 x に対して S に従って, 次々と更新していくことにより定義される. 今, X_{ij} は更新

する直前の $X \in \text{Seq}(f, P, S)_{(i,j)}(X)$ と表わす.

[性質] i) $\forall X_1, X_2 (\in B_n) [\text{Seq}(f, P, S)_{(i,j)}(X_1) = \text{Seq}(f, P, S)_{(i,j)}(X_2) \Rightarrow \text{Seq}(f, P, S)(X_1) = \text{Seq}(f, P, S)(X_2)]$.

ii) $\forall S_1, S_2 (\in \mathcal{S}(P)) [\text{pre}(P, S_1) = \text{pre}(P, S_2) \Rightarrow \text{Seq}(f, P, S_1) = \text{Seq}(f, P, S_2)]$. $\square$

性質 (ii) から, 逐次変換を決定する上で重要な役割を演ずるのは, 走直 S の形ではなく, S によって決定される $\text{pre}(P, S)$ であることが理解される. そこで, 以下では, 近傍 P とその部分集合 L とを与えたとするに, $\text{pre}(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するかどうかを決定する手順を与える.

[補題 1] $P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$, $L \subseteq P$ とする. $\text{pre}(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するかどうかは可解である.

(略証) $L = \{p_1, \dots, p_t\}$ とする. x_i に関する 3 つの方程式

$$\text{と,} \quad \sum_{i=1}^t p_i x_i = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$\sum_{i=t+1}^m p_i x_i = 0 \quad \text{—— (2)}$$

$$\sum_{i=1}^t p_i x_i = \sum_{i=t+1}^m p_i x_i \quad \text{—— (3) , とするとき,}$$

$\text{pre}(P, S) = L$ となる $S \in \mathcal{S}(P)$ が存在するための必要十分条件は, 方程式 (1) ~ (3) が自明でない非負整数解を持つことである.

必要性の証明は容易であるので, 十分性だけを証明する.

P と L が与えられ、 $S(n)$ を以下のように構成する。
 集合 $[n]^2$ 上に半順序 $<_{\text{pre}}$ と $<_{\text{post}}$ と $\forall j_1, j_2 \in [n]^2$ $[(j_1 <_{\text{pre}} j_2 \Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_t) \in \mathbb{N}^t - \{0\}) [j_1 = j_2 + \sum_{i=1}^t p_i x_i]]$
 $\wedge (j_1 <_{\text{post}} j_2 \Leftrightarrow \exists (x_{t+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{N}^{m-t} - \{0\}) [j_2 = j_1 + \sum_{i=t+1}^m p_i x_i]]$ によって定める。(1), (2) が非負整数解を持つ場合、半順序集合 $([n]^2, <_{\text{pre}})$, $([n]^2, <_{\text{post}})$ は矛盾なく定まる。又、(3) が非負整数解を持つ場合、 $(j_1 <_{\text{pre}} j_2) \wedge (j_2 <_{\text{post}} j_1)$ となる j_1, j_2 は存在しない。そこで、 $S(n)$ と、 $\forall j_1, j_2 \in [n]^2$ $[(j_1 <_{\text{pre}} j_2) \vee (j_1 <_{\text{post}} j_2) \Rightarrow S(n)^{-1}(j_1) < S(n)^{-1}(j_2)]$ を満足するように構成できる。
 S が $\text{pre}(P, S) = L$ を満たすことは明らかである。

(1) ~ (3) が自明でない非負整数解を持つ場合は可解である。□

3. 結果 [命題 1] i) $\mathcal{L}_{\text{Seq}}^0 = \mathcal{L}_{\text{Par}}^0$.

ii) $\forall m \in \mathbb{N} [\mathcal{L}_{\text{Seq}}^1 \subsetneq \mathcal{L}_{\text{Par}}^m]$.

iii) $\forall m \in \mathbb{N} [\mathcal{L}_{\text{Par}}^m \subsetneq \mathcal{L}_{\text{Par}}^{m+1}]$.

(略証) i), iii) は明らか、ii) について証明する。次のように $\text{Seq}(f, P, S) \in \mathcal{L}_{\text{Seq}}^1$ と考える。 $f(x, y) = x \vee y$, $P = \langle (0, -1) \rangle$, $S: T \nabla$ 式走査とする。このとき、 $\text{Seq}(f, P, S) = \text{Par}(g, P')$ となる g, P' は存在しないことを示す。
 今、 $\text{Seq}(f, P, S) = \text{Par}(g, P')$ と仮定する。明らかに、

$g(0) = 0$ である. $P' = \langle p_1, \dots, p_m \rangle \in \mathcal{L}$, $n = \max_i \{ |p_i| \}$

とする. $X \in \mathcal{B}_{n+1}$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j = 1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{と定める. } \quad \square$$

$(\text{Seq}(f, P, S)(X))_{1, n+1} \neq (\text{Par}(g, P'))_{1, n+1}$. これは、矛盾である. $\square$

[命題 2] i) $\mathcal{L}_{\text{Par}}^1 \subseteq \mathcal{L}_{\text{Seq}}^1$.

ii) $\forall m (\in \mathbb{N}) [\mathcal{L}_{\text{Par}}^2 \subseteq \mathcal{L}_{\text{Seq}}^m]$.

iii) $\forall m (\in \mathbb{N}) [\mathcal{L}_{\text{Seq}}^m \subseteq \mathcal{L}_{\text{Seq}}^{m+1}]$.

(略証) i) 容易.

ii) 並列変換 $\text{Par}(f, P)$ を次のように与える. $f(x, y, z) = x \wedge y \wedge z \in \mathcal{F}_2$, $P = \langle (-1, 0), (1, 0) \rangle \in \mathcal{P}_2$. このとき, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P', S)$ となる g, P', S は存在しないことを示す. 今, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P', S)$ を仮定する. $X_1, X_2 \in \mathcal{B}_{2n-1}$ と,

$$(X_1)_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i, j) = (n, n), (n \pm 1, n) \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases},$$

$$(X_2)_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i, j) = (n, n), (n+1, n) \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}, \quad \text{と定める.}$$

$S(2n-1)$ は, (n, n) を走査した後 $(n \pm 1, n)$ を走査しなければならない. なぜならば, 今, $(n-1, n)$ は

(n, n) より先に走査されると仮定すると, $\text{Seq}(g, P', S)_{(n, n)}(X_1) = \text{Seq}(g, P', S)_{(n, n)}(X_2)$. 従って, $\text{Seq}(g, P', S)(X_1) = \text{Seq}(g, P', S)(X_2)$. これは, $\text{Par}(f, P)(X_1) \neq \text{Par}(f, P)(X_2)$ に矛盾する. $(n+1, n)$ より先に走査される場合も同様に矛盾が導かれる. 従って, $(n+1, n)$ は (n, n) を走査した後で走査される. 以上, この場合も, 上の議論の簡単な変形により, 矛盾を導くことが出来る.

iii) $f(x_0, \dots, x_m) = \bigwedge x_i \in \mathcal{F}_m, P = \langle p_1, \dots, p_m \rangle \in \mathcal{P}_m$ ($p_i = (1, i-1)$), $S: T \cup$ 式走査, とする. $\text{Seq}(f, P, S) \in T_{\text{Seq}}^{m-1}$ を示す. 今, $f' \in \mathcal{F}_{m-1}, P' \in \mathcal{P}_{m-1}, S' \in \mathcal{S}(P')$ が存在して, $\text{Seq}(f, P, S) = \text{Seq}(f', P', S')$ であると仮定する. 今, P' に含まれない P の要素を p_t とする.

$X_1, X_2 \in \mathcal{B}_m$ と

$$(X_1)_{ij} = \begin{cases} 1 & : (i, j) = (1, 1), (2, k) (k \in [m]) \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases},$$

X_2 : X_1 の $(2, t)$ 要素を 0 に置換えた画像, と定義する.

$\text{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_1)$ と $\text{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_2)$ を比較する. $\text{Seq}(f, P, S)$ の定義から, $\text{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_1)$ と $\text{Seq}(f', P', S')_{(1,1)}(X_2)$ は $(2, t)$ 要素を除いて等しい. 又, $(1, 1)$ 要素に注目しているとき, $(2, t)$ 要素はその近傍

に入らばいい。従って, $(\text{Seq}(f', P', S')(X_1))_{11} = (\text{Seq}(f', P', S')(X_2))_{11}$. これは, $(\text{Seq}(f, P, S)(X_1))_{11} \neq (\text{Seq}(f, P, S)(X_2))_{11}$ に矛盾する. $\square$

次に, 並列変換と逐次変換の間の等価変換について考察する. 即ち, $f \in \mathcal{F}_m$ と $P \in \mathcal{P}_m$ を与えたとし, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P, S)$ を満たす g, S が存在するための条件を求めよう. P とその部分集合 L を与えたとし, 補題 1 より, $\text{pre}(P, S) = L$ となる S が存在するかどうかは可解であるので, 考察は S を固定して行なえば十分である.

[補題 2] $f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m, S \in \mathcal{S}(P)$ を与えたとし, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P, S)$ となる g が存在するかどうかは可解である.

(略証) $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P, S)$ となる g が存在するための必要十分条件を与える. $\text{pre}(P, S) = \emptyset$ ならば容易. 従って, $\text{pre}(P, S) = \{p_1, \dots, p_t\} \neq \emptyset$ とする.

$\alpha = \{l \in \mathbb{Z}^2 \mid l = x + y, x \in \text{pre}(P, S), y \in P\} \cup \text{pre}(P, S), \beta = \text{post}(P, S) \cup \{0\}, \gamma = \alpha \cup \beta$, とする.

又, $I = \{(h, i, k, j) \in \mathbb{Z}^4 \mid h, i > 0, k, j < 0, h - k = i - j\}$ とする. $\xi \in I$ に対して, $w(\xi) \subseteq$

$w(h, i, k, j) = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}^2 \mid h > \mu > k, i > \nu > j\}$ とする. $W = \bigcup_{\xi \in I} w(\xi)$.

$\square (\in [Y \rightarrow B])$, $\ell (\in \text{pre}(P, S) \cup \{0\})$ に対して,
 $\square(\ell) = (u_0, \dots, u_m) (u_i = \square_{\ell + p_i})$ とする.

今, $w (\in W)$ と $A (\in [\beta \rightarrow B])$ を固定する. このとき,
 $C(A, w) (\subseteq [Y \rightarrow B])$ と,

$C(A, w) = \{c \mid (\ell \notin w \Rightarrow c_\ell = 0) \wedge (\ell \in \beta \Rightarrow c_\ell = A_\ell)\}$
 と定める. ($C(A, w) = \emptyset$ かもしれない). 更け,

$R_b(A, w) = \{(b_1, \dots, b_t) (\in B^t) \mid \exists c \in C(A, w),$
 $f(c(\ell)) = b, \forall i (\in [t]) [f(c(p_i)) = 1 \wedge p_i \in w$
 $\Leftrightarrow b_i = 1] (b \in B)\},$

$R_b(A) = \bigcup_{w \in W} R_b(A, w),$ と定める.

このとき, g が存在するための必要十分条件は,

『 $\forall A (\in [\beta \rightarrow B]) [R_0(A) \cap R_1(A) = \emptyset]$ 』, — (4)

である.

(必要性) 命題 2 (ii) の証明で用いた手法を一般化して適用
 することにより証明される.

(十分性) (4) を満たす f から g を以下のように構成する.

$\forall B = (b_0, \dots, b_m) (\in B^{m+1})$ に対して, $A (\in [\beta \rightarrow B])$
) と $A_{p_i} = b_i (i = 0, t+1, t+2, \dots, m)$ かつ, と定める.

このとき, $g(B)$ の値は,

$g(B) = \begin{cases} 0 : (b_1, \dots, b_t) \in R_0(A) \\ 1 : (b_1, \dots, b_t) \in R_1(A), \end{cases}$ とする.

このとき, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P, S)$ であることは, $R_b(A)$ の定義より明らかである. $\square$

[命題3] $f \in \mathcal{F}_m, P \in \mathcal{P}_m$ と与えらるるとき, $\text{Par}(f, P) = \text{Seq}(g, P, S)$ となる g, S が存在するかどうかは決定可能である. $\square$

4. あとがき 本稿では, 二値画像に対する並列処理および逐次処理により, 引起される並列変換と逐次変換の関係を一般的に考察し,

(i) 近傍位数により分類される, 種々の並列変換および逐次変換の族の間の包含関係,

(ii) 並列変換と等価な逐次変換が存在するための必要十分条件, と与えらる.

残された問題としては, 逐次変換の等価性判定, 多値画像に対する本稿と同様の考察, などがある.

最後に, 名古屋大学福村晃天教授, 豊橋技術科学大学鳥脇純一郎教授, 平田富天助手, 並びに名古屋大学オートマツン・グループ, パターン認識グループの皆様への御討論に感謝する.