

脈波のソリトン模型

横浜国大・工 長谷容子, 渡辺慎介

群馬大・工 坂西明郎

国立循セ研 長谷川正光

血液は絶えず体内を循環し、我々の生命を維持している。ところでこの循環には、心臓の収縮・弛緩のポンプ作用と血管の弾力性による補助ポンプ作用が重要な働きをしている。その結果、心臓から送り出された血流は心臓の拍動に対応する周期で時間的に変化する拍動流となる。故に血圧、血流速度、血流量の拍動が波として末梢まで伝播していく。この波を脈波と呼んでいる¹⁾。

大動脈・動脈中の脈波について、D. A. McDonald²⁾はその波形を図1のように報告している。この図から、圧力脈波についてはpeaking現象と呼ばれる振幅の増加とSteepening 現象と呼ばれる波形の急峻化が認められる。又、血流速度の脈波については、やはりSteepening 現象が起こるが振幅は逆に減少しているのがわかる。こうした現象は線形波動では説明できず、非線形波動としての解析を要する。

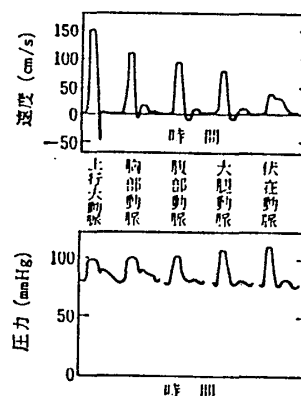


図1. 圧力脈波と血流速度の脈派

そこで我々は、近似的に現象を記述するモデルを考え、圧力脈波、及び血流速度の脈波の伝播を記述する方程式の導出を行なった。

まず、基礎方程式として血流について非圧縮性で粘性を無視した準一次元の流体方程式³⁾連続の式

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial (su)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

及び Navier-Stokes の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

を用いる。

ただし, s, u, ρ_0 は血管の断面積, 血流速度, 血流の密度であり, t は時間, z は血管軸方向を表わしている。

又, ここで準一次元とは, 動脈管のような細長い管の中の流れについては管の半径方向の加速度や圧力勾配は無視でき, 管の軸方向の加速度や圧力勾配, 管の断面積の変化のみ考慮するという考え方である。

次に, 血管壁については血管壁の子午線方向の軸を l , 厚み方向の軸を h , 血管の中心から円周方向の角度を θ とし, 子午線方向に $d\ell$, 円周方向に $d\theta$ の微小要素を考え, 血管が末梢にいくに従って細くなる効果 (taper) 等, 血管の不均一性を考慮すると, 運動方程式

$$\begin{aligned} & \int_{\ell}^{\ell+d\ell} \left(\int_{-\frac{d_0}{2}}^{\frac{d_0}{2}} \rho_R dh \right) r d\theta \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} d\ell \\ &= \int_{\ell}^{\ell+d\ell} p r d\theta \cos \theta d\ell - 2 \int_{\ell}^{\ell+d\ell} T_{\theta} \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right) d\ell \\ &+ \int_{\ell}^{\ell+d\ell} \frac{\partial}{\partial \ell} (T_{\ell} \cdot \sin \theta \cdot r) d\theta d\ell \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。

ここで r, d_0, ρ_R はそれぞれ血管の中央面 (middle surface) までの半径, 血管壁の厚み, 密度であり, p, T_{θ}, T_{ℓ} は血管壁の中央面に働く内側と外側の圧力差, 円周方向及び子午線方向の張力である。

又, t は時間, θ は微小要素が子午線の軸方向となす角である。

ただし, 血管の変形は軸対称と仮定し, 血管壁の厚みは, 血管の半径に比べて小さいとしている。

ところで, 血管壁の応力-歪関係は図 2⁴⁾ のように非線形であることが報告されている。

そこで, この血管壁の非線形性を取り入れ, 又,

流体方程式に合わせて (3) 式を血管の断面積 s

と z 軸で書き直す。(1), (2) 式と連立させ,

速さ $C_0(z)$ で進む座標への変数変換 $\eta = \varepsilon^{1/2}$

$$\left(t - \int^z \frac{dz}{C_0} \right), \quad \xi = \varepsilon^{3/2} \int^z \frac{dz}{C_0} \quad \text{を行ない,}$$

変数を ε の巾で展開して整理すると, 圧力脈波の伝播を表わす空間発展で記述された K-dV 系の方程式

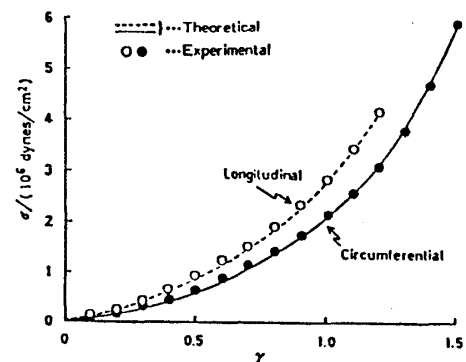


図 2. 大動脈における血管壁の応力-歪関係

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} - A(\xi) p_1 \frac{\partial p_1}{\partial \eta} - B(\xi) \frac{\partial^3 p_1}{\partial \eta^3} + \nu'(\xi) p_1 = 0 \quad (4)$$

が得られる。ここで、 p_1 は圧力の一次の摂動量で、 A, B, ν' は血管の平衡時半径や厚み等で表わされる場所の関数である。更に変数変換 $\bar{p} = \frac{A}{B} p_1$, $\tau = \int^\xi B d\xi$ を行なうと、(4) は不均一効果が一つにまとまった形の不均一系の K-dV 方程式⁵⁾

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau} - \bar{p} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \eta} - \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial \eta^3} + \nu(\tau) \bar{p} = 0 \quad (5)$$

となる。尚 $\bar{p}$ は無次元化された圧力である。

又、血流速度についても同様に得られる。

これらの不均一系の K-dV 方程式から得られた結果を簡単にまとめると次のようになる。

- (i) 脈波の波形は、同じ振幅をもつソリトン波形に比べて非常に幅が広いことがわかり、故に非線形性に比べて分散性はほとんど波形の伝播に影響しない。
- (ii) 非線形性は、波形の伝播に伴ってその波形を急峻にさせる効果がある。これは、脈波の Steepening 現象の原因となっている。
- (iii) 不均一性は、波形が伝播するに従い波の振幅を変化させる効果がある。振幅が増加するか、減少するかは不均一項の大きさに依るもので、圧力脈波ではその振幅が増加する値をとり、血流速度の脈波ではその振幅が減少する値をとる。又、その際、円周方向のヤング率が大動脈から動脈へといくに従い増加することが大きく影響していることがわかる。

我々は更に (i) ~ (iii) を計算機シミュレーションによって確めた。(図 3)

以上、脈波の伝播に関して簡単なモデルからではあるが、その特徴を定性的に説明することができた。

今後は、より現実に近いモデル、例えば血管の枝分かれの効果や、血流の粘性等を取り入れたモデルを考えることが課題である。

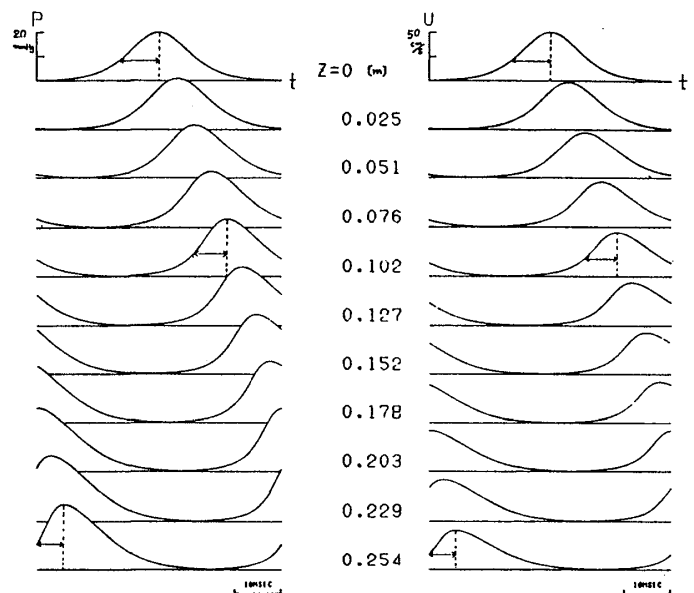


図 3. 不均一な血管中を伝播する波
(初期波形には、ソリトン解よりも幅の広いものを選んでいく。)

文 献

- 1) 岡 小 天, 物理科学選書 7 「バイオレオロジー」, 裳華房 (1984)
- 2) D. A. Mc Donald, *Blood flow in arteries* (2nd ed.), Edward Arnold, London (1974)
- 3) 菅原基晃, 桜井靖久, 井街 宏, 藤正 巖, 医用電子と生体工学 11 (1973) 180
- 4) 坂西明郎, 長谷川正光, 物性研究 42 (1984)
- 5) K. Muroya and S. Watanabe, J. Phys. Soc. Jpn., **50** (1981) 3159.

太い動脈中の脈波のソリトン理論

梶山女学園大学 右衛門佐 重雄

動脈中の流れと圧力の波の形については多くの測定がなされてきた。^{1,2)} 圧力脈波には伝播に伴う波面の突っ立ち (steepening) と山の高なり (peaking) がみられる。脈波の伝播については運動方程式における非線形対流項を省略した多くの線形理論³⁻⁶⁾が提出された。然し、非線形項を省略しうる条件は十分にととのっていない。血流速度が零から最大値 $(v_z)_m$ まで達するまでの時間を τ , 脈波の速度を V とすると、犬の大動脈の場合 $(v_z)_m \simeq 1$ m/s, $V \simeq 5$ m/s とし、非線形項 $v_z \partial v_z / \partial t \sim (v_z)_m^2 / V \tau$ と流速の時間変化の項 $\partial v_z / \partial t \sim (v_z)_m / \tau$ との比は 0.2 程度となるからである。一方、大動脈においては粘性の影響は小さい。粘性項 $(\eta / \rho) (1/r) \partial v_z / \partial r \sim (\eta / \rho) (v_z)_m / R_0^2$ からの寄与は、 $\eta = 0.04$ P, $\rho = 1.05$ g/cm³, $R_0 = 0.3$ cm とし、非線形項の 1/10 程度である。これまで非線形対流項の効果を考慮した多くの理論が提出されている。⁷⁻¹¹⁾ 断面積および弾性率が一定の管の中の流れについて⁷⁾、或いは管の弾性率の軸に沿っての変化も考慮して⁸⁾、さらには、動脈の枝分かれによる分流を洩れと考えると連続の式の中に洩れの項を入れたり、管の圧力と断面積の関係を脈波の伝播速度の実測値から求めるようにしたりしている⁹⁾。これらの非線形理論では解を得るのに特性曲線法に従い、繰り返し計算をコンピューターによって行っている。菅原ら¹¹⁾はできるだけ解析的な方法によって見通しのよい結果をうるために、圧力と断面積との間には管壁の弾性法則に従う関係が成り立つとして、特性曲線法にもとづく定式化を行い伝播速度や突っ立ち現象など脈波の振舞いをより解析的に説明している。これらの非線形理論においては、圧力と断面積の関係が管壁の運動方程式と関連して与えられていない。また、理論の結果として、脈波を支配する方程式が圧力或は流速に関する一つの非線形波動方程式の形では表現されていない。一方坂西ら¹²⁾は動脈壁