

線形履歴減衰を有する建物の ARX モデルを用いた減衰同定法

正会員 ○南 良忠* 同 吉富信太* 同 竹脇 出*

2. 構造—2. 振動

システム同定, 構造ヘルスマニタリング, ARX モデル, 剛性・減衰同定, 地震観測記録

1. 序

建築構造分野においてシステム同定は、実際の建物と解析モデルとの対応を明らかにする技術として用いられ、建物動特性の推定を行うことで建物の耐震性能評価への応用が期待されている。

これまでに限定された層の観測データに基づいて層の剛性、減衰係数、線形履歴減衰を同定する手法が提案されている¹⁾。一般には同定に用いる観測記録には不可避免的にノイズが含まれ、文献 1) の手法もノイズの影響が無視できない。

前田らはこの問題を解決するために ARX モデルを有効に利用し、剛性・粘性減衰を ARX モデルパラメータで表現する方法を提案しているが²⁾、線形履歴減衰の直接的な同定は困難であった。

本研究では、前田らによる方法²⁾では扱うことが困難であった線形履歴減衰の同定法を提案する。

2. 同定理論

2.1 応答記録を用いた剛性・減衰同定法¹⁾

本論の提案手法で利用する文献 1) の定式化について述べる。図 1 の N 層せん断モデルを対象とする。地動入力加速度及び、上層側床の絶対加速度のフーリエ変換を $\ddot{Z}(\omega)$ 、 $\ddot{U}_j(\omega)$ として、各層の剛性 k_j 、減衰係数 c_j 、線形履歴減衰定数 β_j の同定式 (1)~(4) を誘導する手順が文献 1) に示されている。

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{f_j(\omega)\} \quad (1)$$

$$\beta_j = \frac{\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\}}{2k_j} \quad (2)$$

$$c_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\} \quad (3)$$

$$f_j(\omega) = -\frac{\omega^2 M_j}{\frac{U_{j+1}(\omega)}{U_j(\omega)} - 1} \quad (4)$$

以降 (4) 式で定義される $f_j(\omega)$ を、既往の同定関数と呼ぶ。 M_j は最上層から第 j 番目の層 (同定対

象層) までの質量の和を示す。

図 2 に地震時応答観測データを用いた (1) 式の同定関数実部の一例を示す。振動数 0 の極限值が剛性に対応するが、低振動数領域でノイズの影響を受けやすいという問題を有している。

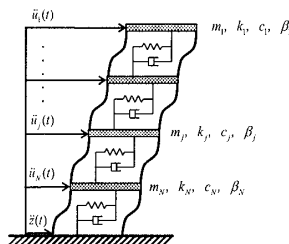


図 1 対象モデル

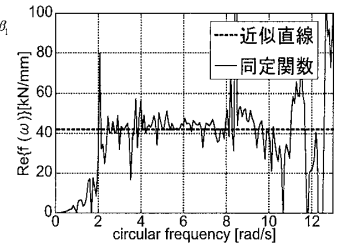


図 2 既往の同定関数実部

2.2 ARX モデルを用いた剛性・減衰同定法²⁾

ARX モデルを用いてノイズの影響を低減する前田らの方法²⁾について述べる。この方法では (5) 式で表される ARX モデルの伝達関数を用いる。ここで a_k, b_k は ARX モデルパラメータである。

$$G(\omega) = \frac{b_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + b_{n_b} e^{-in_b \omega T_0}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + a_{n_a} e^{-in_a \omega T_0}} \quad (5)$$

(4) 式に含まれる $U_j(\omega)/U_{j+1}(\omega)$ を伝達関数とみなして ARX モデルの伝達関数を代入すると、剛性と粘性減衰係数を ARX パラメータで表現できる。極限操作の回避により、ノイズの影響を低減できる。しかし、同様の方法で履歴減衰定数を表現すると、対象建物の特性に関わらず、ARX モデルの性質により常に 0 となる問題を有する。

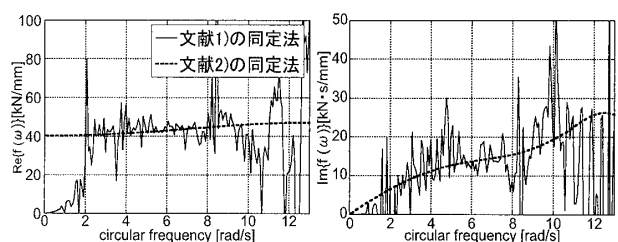


図 3 既往の同定関数 実部(左) 虚部(右)

Damping Identification of Buildings with Linear Hysteretic Damping Using ARX Models

MINAMI Yoshitada, YOSHITOMI Shinta and TAKEWAKI Izuru

2.3 ARX モデルを用いた線形履歴減衰同定法

ARX モデルを利用して履歴減衰定数の同定が可能である新たな関数を提案する。

2.3.1 伝達関数の逆数のテイラー展開

2.2 節で示した伝達関数 $G(\omega)$ を用いて表現した既往の同定関数は、次式のように伝達関数が逆数の形で現れる。

$$f_j(\omega) = \frac{M_j(i\omega)^2}{\frac{1}{G_{j,j+1}(\omega)} - 1} \quad (6)$$

そこで、伝達関数の逆数を $\omega=0$ のまわりでテイラー展開すると次式が得られる。

$$\frac{1}{G_{j,j+1}(\omega)} = A_0^R + A_1^R \omega + A_2^R \omega^2 + \dots + i\{A_0^I + A_1^I \omega + A_2^I \omega^2 + \dots\} \quad (7)$$

ここで、(7)式における ω の関数の係数 A^R, A^I の性質を運動方程式から求めると次のようになる。

$$A_0^R = 1, A_0^I = 0 \quad (8a)$$

$$A_1^R = 0, A_1^I = 0 \quad (8b)$$

$$A_2^R = -\frac{2k_j M_j}{k_j^2 + (2k_j \beta_j)^2}, A_2^I = \frac{4k_j M_j \beta_j}{k_j^2 + (2k_j \beta_j)^2} \quad (8c)$$

2.3.2 履歴減衰定数同定のための関数の導出

伝達関数の逆数をテイラー展開した(7)式を用いて(6)式の同定関数を表現すると次式となる。

$$f_j(\omega) = \frac{-M\omega^2}{(A_0^R - 1) + A_1^R \omega + A_2^R \omega^2 + \dots + i\{A_0^I + A_1^I \omega + A_2^I \omega^2 + \dots\}} \quad (9)$$

ここで既往の同定関数による履歴減衰定数の同定式(2)式に剛性の同定式(1)式を代入し(10)式を得る。

$$\beta_j = \frac{\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im}\{f_j(\omega)\}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}\{f_j(\omega)\}} \quad (10)$$

(10)式に(9)式を代入して(11)式が得られる。

$$\beta_j = -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{A_0^I + A_1^I \omega + A_2^I \omega^2 + \dots}{(A_0^R - 1) + A_1^R \omega + A_2^R \omega^2 + \dots} \right\} \quad (11)$$

(7)式の関係性を考慮して(11)式から(12)式を得る。

$$\beta_j = -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Im}\{1/G_{j,j+1}(\omega)\}}{\text{Re}\{1/G_{j,j+1}(\omega)\} - 1} \right) \quad (12)$$

ここで $B_j^{(0)}(\omega)$ を(13)式のように定義する。

$$B_j^{(0)}(\omega) = -\frac{1}{2} \frac{\text{Im}\{1/G_{j,j+1}(\omega)\}}{\text{Re}\{1/G_{j,j+1}(\omega)\} - 1} \quad (13)$$

(12)式より、(13)式の $\omega \rightarrow 0$ の極限値が β_j であることが分かる。

$B_j^{(0)}(\omega)$ の $\omega \rightarrow 0$ の極限値は(14)式の計算によって導かれるが、その値は(8a)式の関係を用いると、分母、分子がともに 0 となるため、ロピタルの定理を用いて(15)式を得る。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(0)}(\omega) = -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{A_0^I + A_1^I \omega + A_2^I \omega^2 + \dots}{(A_0^R - 1) + A_1^R \omega + A_2^R \omega^2 + \dots} \right\} \quad (14)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(0)}(\omega) = -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{A_1^I + 2A_2^I \omega + 3A_3^I \omega^2 + \dots}{A_0^R + 2A_1^R \omega + 3A_2^R \omega^2 + \dots} \right\} \quad (15)$$

(15)式は(7)式を微分したものの実部、虚部によって表すことができる。そこで $B_j^{(1)}(\omega)$ を次のように定義すると、その $\omega \rightarrow 0$ の極限値は $B_j^{(0)}(\omega)$ の $\omega \rightarrow 0$ の極限値と等しい。

$$B_j^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{2} \frac{\text{Im}\left\{\frac{d}{d\omega}(1/G_{j,j+1}(\omega))\right\}}{\text{Re}\left\{\frac{d}{d\omega}(1/G_{j,j+1}(\omega))\right\}} \quad (16)$$

同様に(8b)式の関係より、ロピタルの定理を適用して(17)式を得る。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{2A_2^I + 6A_3^I \omega + \dots}{2A_1^R + 6A_2^R \omega + \dots} \right\} \quad (17)$$

(17)式は(7)式を 2 階微分したものの実部、虚部によって表現することができる。そこで $B_j^{(2)}(\omega)$ を次のように定義すると、その $\omega \rightarrow 0$ の極限値は $B_j^{(1)}(\omega)$ の $\omega \rightarrow 0$ の極限値と等しい。

$$B_j^{(2)}(\omega) = -\frac{1}{2} \frac{\text{Im}\left\{\frac{d^2}{d\omega^2}(1/G_{j,j+1}(\omega))\right\}}{\text{Re}\left\{\frac{d^2}{d\omega^2}(1/G_{j,j+1}(\omega))\right\}} \quad (18)$$

$B_j^{(2)}(\omega)$ の $\omega \rightarrow 0$ の極限値は、(8c)式の関係を用いると、(19)式によって計算することができる。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(2)}(\omega) &= -\frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{2A_2^I + 6A_3^I \omega + \dots}{2A_2^R + 6A_3^R \omega + \dots} \right\} \\ &= -\frac{A_2^I}{2A_2^R} \end{aligned} \quad (19)$$

2.3.3 $B^{(0)}, B^{(1)}$ による粘性減衰係数の同定

$B_j^{(0)}$ と $B_j^{(1)}$ は履歴減衰定数との関係から導いたものであるが、これらを用いて粘性減衰係数の同定も可能である。まず、 $B_j^{(0)}$ と c_j の関係を示す。

(14)式は(9)式を用いると次のように既往の同定関数で表現できることが分かる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(0)}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\text{Im}\{f_j(\omega)\}}{\text{Re}\{f_j(\omega)\}} \right) \quad (20)$$

(20)式に既往の同定関数による剛性の同定式(1)

式を代入すると、次式が得られる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} B_j^{(0)}(\omega) = \frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}\{f_j(\omega)\}}{k_j} \quad (21)$$

これを ω に関して微分し、次の関係を得る。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} B_j^{(0)}(\omega) = \frac{\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \text{Im}\{f_j(\omega)\}}{2k_j} = \frac{c_j}{2k_j} \quad (22)$$

次に、 $B_j^{(1)}$ と c_j の関係を示す。まず、 $B_j^{(0)}$ と $B_j^{(1)}$ の関係は(23)式のように求められる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{d\omega} B_j^{(1)}(\omega) / \frac{d}{d\omega} B_j^{(0)}(\omega) \right\} = \frac{3}{2} \quad (23)$$

$B_j^{(0)}$ と c_j との関係を示した(22)式に、この関係を用いると $B_j^{(1)}(\omega)$ と c_j との関係が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} B_j^{(1)}(\omega) &= \frac{3}{2} \frac{c_j}{2k_j} \\ &= \frac{3c_j}{4k_j} \end{aligned} \quad (24)$$

2.3.4 ARX モデルを用いた $B(\omega)$ の表現

ここで提案した関数 $B(\omega)$ に ARX モデルを適用し、ノイズの影響を低減する(図4参照)。以降、伝達関数に ARX モデルを用いない方法をノンパラメトリック法と呼び区別する。

2.2 節で示した問題点と同様に、ARX モデルを用いると、 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ 、 $B^{(2)}$ の $\omega \rightarrow 0$ の極限值は 0 になるという性質がある。しかし、 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ は $\omega = 0$ 近傍で 1 次の勾配のみをもつとみなすことができる。そこで低振動数域で、 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ を直線近似し極限值を得る方法をとる。

$B^{(2)}$ については数値の乱れにより近似直線を適切に設定できず、正確な同定が困難であった。そこで、以下では $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ のみを扱う。

3. 数値例題

3.1 シミュレーション手法

数値シミュレーションにより提案手法の精度を検証する。ここでは線形履歴減衰を含む 1 層せん断型モデルを扱うため、時間領域での応答解析は困難であり振動数領域での解析を行う。

ARX パラメータの個数($n_a + n_b$)はモデル次数と呼ばれ、同定精度に大きく影響する。本研究では $n_a = n_b = n$ とするため、モデル次数は $2n$ である。

3.2 同定結果

モデル諸元・同定結果を表1に示す。モデル次数 $2n = 60$ で得られた同定結果の誤差が大きい

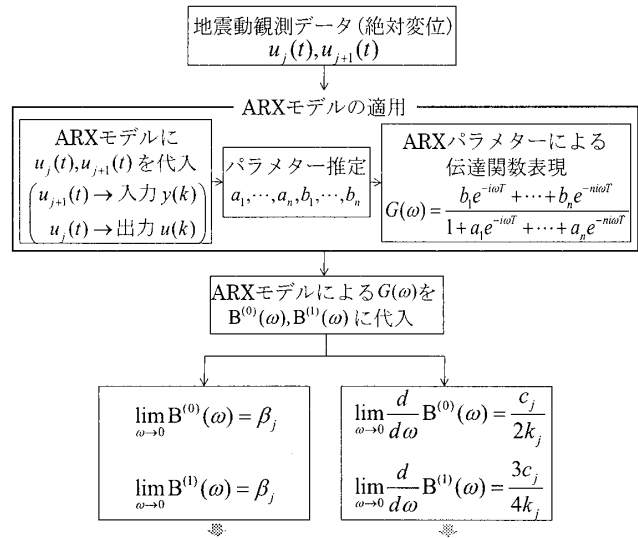


図4 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ への ARX モデル適用方法

表1 モデル諸元・同定結果

$m[\text{ton}]$	$k[\text{kN/m}]$	$c[\text{kN}\cdot\text{s/m}]$	$\omega^{(1)}[\text{rad/s}]$	h
1,000	100,000	1,000	10	0.05
	B ⁽⁰⁾ による同定値		B ⁽¹⁾ による同定値	
粘性減衰係数	同定値	誤差[%]	同定値	誤差[%]
[kN・s/m]	988	-1.2	941	-5.9
	(1887)	(88.7)	(1203)	(20.3)
履歴減衰定数	0.098	-2.1	0.100	-0.3
	(-0.013)	(-113.3)	(0.080)	(-20.1)

※括弧外がモデル次数 120、括弧内がモデル次数 60 の場合の同定結果である。

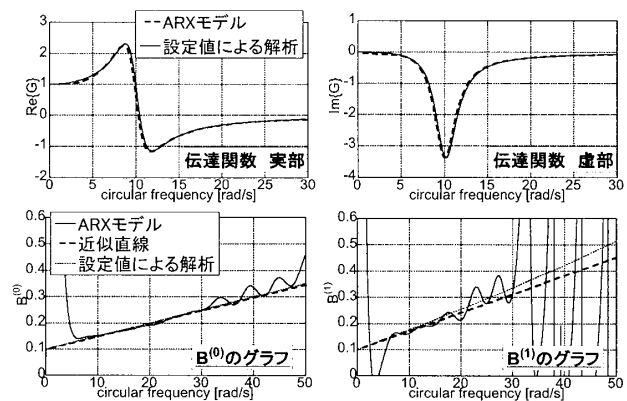


図5 再計算後(モデル次数: $2n = 120$)

め、モデル次数を変更し再計算を行っている。ここで、パラメータの値が未知であったとしても、 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ による 2 つの同定値の差により、得られた数値の精度が低いことを判断することができる。再計算後の 2 つの同定結果は差が小さくなり、精度が向上していることが分かる。

4. 実建物における観測記録への適用

関数 $B^{(0)}$ 、 $B^{(1)}$ による同定手法を京都大学構内に位置する免震建物における地震動観測記録に対し

て適用する。観測を行った建物は地上 3 階地下 1 階の RC 構造で地下 1 階と耐圧版の間に免震層を有する。同定対象は耐圧版と地下 1 階の間の免震層とする。同定には計測時期の異なる 2 組の観測記録 (1997.3.16 と 1999.2.12) を用いる。

また、文献 1) においてこれらの観測記録を用いて同定された物理パラメータの値と比較検証する。

下に同定結果を示す。既往の同定値と大きく異なるものの、本手法の $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ によるそれぞれの結果は近い値を示していることが分かる。

文献 1) の同定法は観測記録に含まれるノイズの

■ 1997.3.16 の地震動観測記録を用いた同定結果

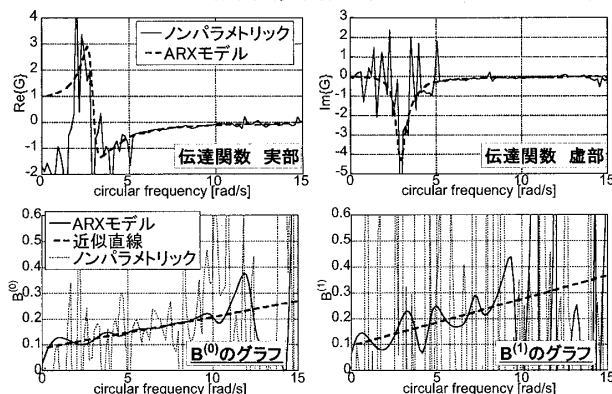


図 6 観測データを用いた同定

・ 既往の同定法による同定値

$$c = 0.69 [\text{kN} \cdot \text{s}/\text{mm}], \quad \beta = 0.14$$

表 2 減衰同定結果(1997.3.16 の観測記録)

	$B^{(0)}$ による同定値		$B^{(1)}$ による同定値	
	同定値	既同定値との差[%]	同定値	既同定値との差[%]
粘性減衰係数 [$\text{kN} \cdot \text{s}/\text{mm}$]	0.99	44.9	0.98	43.4
履歴減衰定数	0.088	-37.1	0.097	-30.6

■ 1999.2.12 の地震動観測記録を用いた同定結果

・ 既往の同定法による同定値

$$c = 0.49 [\text{kN} \cdot \text{s}/\text{mm}], \quad \beta = 0.09$$

表 3 減衰同定結果(1999.2.12 の観測記録)

	$B^{(0)}$ による同定値		$B^{(1)}$ による同定値	
	同定値	既同定値との差[%]	同定値	既同定値との差[%]
粘性減衰係数 [$\text{kN} \cdot \text{s}/\text{mm}$]	1.07	118.7	1.01	108.0
履歴減衰定数	0.067	-25.2	0.076	-15.7

同定値は 2 つの観測時期によって粘性減衰係数で影響を受けやすいという問題を有し、さらにその約 40%、履歴減衰定数で約 55% の差が見られる。一方、本提案手法の同定結果において 2 つの観測時期による差は粘性減衰係数で約 5%、履歴減衰定数で約 23% の差であり、いずれも既往の手法による同定値よりも差が小さかった。すなわち、提案手法は、既往の手法よりもばらつきの少ない安定した同定が可能であるといえる。

5. 結論

- (1) 実測データに含まれるノイズの影響を受けやすい既往の同定法¹⁾を ARX モデルを利用して改善した同定法²⁾では、線形履歴減衰の直接的な同定が困難であった。これを克服するために、新たな同定関数 $B^{(0)}(\omega)$, $B^{(1)}(\omega)$, $B^{(2)}(\omega)$ を導出し、さらに $B^{(0)}(\omega)$, $B^{(1)}(\omega)$ を用いることで、線形履歴減衰を含む建物において粘性減衰係数・履歴減衰定数を同定する方法を提案した。
- (2) 既往の同定法¹⁾では、実測データに含まれるノイズの影響により信頼性の高い同定結果を得ることが困難であった。一方、提案手法では ARX モデルを適用して得られた関数 $B^{(0)}(\omega)$, $B^{(1)}(\omega)$ が安定した値となることによって、それらに対して適切に近似関数を設定することができ、ノイズの影響を低減した高い精度の同定が可能であることを明らかにした。
- (3) 数値例題により提案手法の妥当性を示した。また実建物における観測記録を用いて本手法の精度を検証した。本手法では、同じ量を 2 つの関数 $B^{(0)}(\omega)$, $B^{(1)}(\omega)$ で同定できるため、両同定値の比較により精度検証が可能である。そのため、本手法はノイズの影響を含む実測記録などに対して、有効かつ実用性の高い手法といえる。

参考文献

- 1) 中村 充, 竹脇 出, 安井 譲, 上谷宏二: 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.75-82, 2000.2
- 2) 前田朋宏, 吉富信太, 竹脇 出: 限定された地震観測記録と ARX モデルを用いた建物の剛性・減衰同定法 (投稿中)。