一般型代数曲面の一意化とK3曲面の周期写像への微分幾何の応用

東北大学理学部　小林亮一
Ryoichi Kobayashi

§1. Einstein-Kähler metric とその存在

M を n 次元 compact complex manifold, $(z^1, \cdots, z^n)$ を holomorphic local coordinate とする。$\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta$ を holomorphic tangent bundle の hermitian metric とすると, $ds^2 = 2\,\mathrm{Re}(\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta)$ は、M の Riemannian metric で, complex structure tensor J は isometry になる。ds^2 が <u>Kähler metric</u> であるとは, $\omega := \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta = -2\,\mathrm{Im}(\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta)$ が d-closed であることを言う。ω を ds^2 の <u>Kähler form</u> ということにする。

$ds^2 = 2\,\mathrm{Re}(\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta)$ を Kähler metric とする。この時, ds^2 の <u>Ricci form</u> ρ を, $\rho := -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log \det(g_{i\bar j})$ で定義する。ρ を成分表示で $\rho = \sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$ と書けば, $R_{\alpha\bar\beta} = -\dfrac{\partial^2 \log \det(g_{i\bar j})}{\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta}$ である。定義から明かに ρ は d-closed である。従って de Rham cohomology class $[\frac{\rho}{2\pi}] \in H^2(M;\mathbb{R})$ が well-defined である。これは ds^2 のとり方によらずに定まり、M の実第1 Chern 類 $c_1(M)_{\mathbb{R}}$ を represent する。この事実により、Kähler 多様体の Ricci 曲率には

cohomologicalな手法が導入され、研究が行ないやすくなる。

(定義) $ds^2 = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \otimes d\bar z^\beta\right)$ が Einstein-Kähler metric であるとは、ds^2 は Kähler metric であって、或る実数 λ に対して $\rho = \lambda\omega$, i.e., $R_{\alpha\bar\beta} = \lambda g_{\alpha\bar\beta}$ となることである。

この稿では以下 $\lambda < 0$ 又は $\lambda = 0$ のみ扱う。$\lambda = 0$ のときを Ricci-flat, $\lambda < 0$ のときを Ricci-negative という習慣がある。

Einstein-Kähler metric の存在については、次の Yau, Aubin による結果が基本的である (Calabi 予想の解決)。

(定理 1 [1], [13]) M を n-dim. compact complex manifold で $-c_1(M)_{\mathbb{R}}$ が Kähler form で represent されるとする。この時、M には Einstein-Kähler metric が存在する。それは定数倍を除き唯一で、Ricci-negative である。//

(定理 2 [13]) M を n 次元 compact complex manifold で、$c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$ とする。この時、各 Kähler class $[\omega] \in H^2(M;\mathbb{R})$ の中に、唯一つ Ricci-flat Einstein-Kähler metric の Kähler form が存在する。//

§2. 一意化問題と Einstein-Kähler metric

この§では、前§の定理1, 2の refinement を使ってある種の一意化問題を解く。基本となるのは次の事実である:

(事実) 定正則断面曲率をもつ完備 Kähler 多様体の普遍被覆は正則断面曲率が負、0、正であるに従い $\mathbb{C}^n$ の単位開球, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{P}_n$ のいずれかである。//

(M^n, ds^2) を Kähler 多様体とする。ds^2 の正則断面曲率が一定であるとは，$g_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ なる点で曲率テンソル $R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}$ が

$$R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} = \frac{s}{n(n+1)}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \qquad \text{for some constant } s \in \mathbb{R}$$

と書けることである。この時 s = scalar 曲率 $= \sum_{\alpha,\beta} R_{\alpha\bar\alpha\beta\bar\beta} = \sum_{\alpha} R_{\alpha\bar\alpha}$ である。$\|R\|^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} |R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}|^2$, $\|\rho\|^2 = \sum_{\alpha,\beta} |R_{\alpha\bar\beta}|^2$ 等で tensor の norm を定義する。Chern-Weil theory により次の formula が出る：

$$c_1(M, ds^2)^2\, \omega^{n-2} = \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)}(s^2 - \|\rho\|^2)\,\omega^n$$

$$c_2(M, ds^2)\, \omega^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2 n(n-1)}(s^2 - 2\|\rho\|^2 + \|R\|^2)\,\omega^n$$

ここで $c_i(M, ds^2)$ は，ds^2 の Hermitian connection に関する曲率 tensor により計算された i-th Chern form である。

<u>(定理 3 [3])</u> n-dim compact Einstein-Kähler 多様体 (M, ds^2) に対し，

$$\int_M \{n c_1(M, ds^2)^2 - 2(n+1) c_2(M, ds^2)\} \wedge \omega^{n-2} \leqq 0$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ (M, ds^2) の正則断面曲率一定。//

これは非常に基本的な結果であるし，c_1, c_2 の不等式の幾何的意味を明かにする為にも，証明の概略を述べるのが良いと思う。<u>定正則断面曲率である為の障害</u>は，$T_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} := R_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta} - \frac{s}{n(n+1)}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$ により表わされる。その norm を求めると，$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} |T_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}|^2 = \|R\|^2 - \frac{2}{n(n+1)} s^2$ となる。一方，ds^2 は Einstein-Kähler なので $\|\rho\|^2 = \frac{s^2}{n}$，このこと及び上記 formula により，

$$\{n c_1(M, ds^2)^2 - 2(n+1) c_2(M, ds^2)\} \wedge \omega^{n-2} = -\frac{n+1}{4\pi^2 n(n-1)}\left(\|R\|^2 - \frac{2}{n(n+1)} s^2\right)$$

$$= -\frac{n+1}{4\pi^2 n(n-1)}\left(\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} |T_{\alpha\bar\beta\gamma\bar\delta}|^2\right) \leqq 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

(定理4) $n(\geqq 2)$ dim compact Einstein-Kähler manifold (M, ds^2) に対し、

$$\int_M c_2(M, ds^2) \wedge \omega^{n-2} \geqq 0$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ (M, ds^2) の曲率 $= 0$ $\Leftrightarrow$ M は n-dim complex torus で cover される。//

証明は、formula for $c_2(M, ds^2) \wedge \omega^{n-2}$ と $s^2 = n\|\rho\|^2$ (Einstein-Kähler condition) を合わせて $c_2(M, ds^2) \wedge \omega^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2 n(n-1)}(\|R\|^2 + (n-2)\|\rho\|^2)\,\omega^n \geqq 0$ より明かである。(ここで、もし $n=2$ なら曲率 tensor の L^2-norm $\int \|R\|^2 \omega^2$ が topological invariant 従って conformal invariant でもあることに注意する。この事実は、Einstein-Kähler surface の退化に際して crucial な働きをするだろう。) 以上の observation と Aubin-Yau の存在定理を組合わせると、次を得る [12]:

(定理5) n-dim compact Kähler manifold M の $-c_1(M)_{\mathbb{R}}$ が Kähler form で representされるなら、

$$\int_M (-1)^n n\, c_1(M)^n \leqq \int_M (-1)^n 2(n+1)\, c_2(M)\, c_1(M)^{n-2}$$

等号成立 $\Leftrightarrow$ M の universal covering $\widetilde{M} = \mathbb{B}^n$ ($\mathbb{C}^n$ の open unit ball)

とくに $n = 2$ として、M : compact complex surface with ample canonical bundle に対し、$c_1^2 \leqq 3c_2$, 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\widetilde{M} = \mathbb{B}^2$。//

この不等式 $c_1^2 \leqq 3c_2$ は、compact complex surface of general type に対しても成り立つ(宮岡不等式)。[11] に代数幾何による証明があるが、ここでは微分幾何を使って説明を試る。今、M を compact complex surface of general type (minimal) で、K_M (M の標準束)

はampleでないとする。この時 K_M は丁度 (-2)-curve の上でのみ ampleness がくずれている。M上には (-2)-curves が少なくとも1本あり、総数は $h^{1,1}(M)-1$ で押さえられる。Mは、$K_M^{\otimes m}$ $(m \gg 0)$ により $\mathbb{P}_N$ の中に birational morphism によりうつされる。この時の image $\subset \mathbb{P}_N$ を M の <u>canonical model</u> といい、M' で表すことにする。M' は M の (-2)-curves を contract することにより得られる。M' は特異点として有理2重点のみもつ compact complex surface である。M' を佐武 V-manifold と見ると、次が成立つ [5]：

<u>(定理6)</u> M を compact complex minimal surface of general type, M' をその canonical model とする。この時、M' には unique に Einstein-Kähler V-metric が存在し、それは Ricci-negative である。(ここで V-metric とは local uniformization で smooth な metric のことである。) //

定理3の証明をこの Einstein-Kähler V-metric に apply すれば、(-2)-curves の contribution をもった宮岡不等式が得られる [6]：

<u>(定理7)</u> M を compact complex minimal surface of general type, $\{p\}$ を M' の singularities, E_p を p の resolution から来る exceptional divisor $(\subset M)$, G_p を p に対応する有限群, $e(E_p)$ を E_p の euler number とすると,

$$c_1(M)^2 \leqq 3\left(c_2(M) - \sum_p \left(e(E_p) - \frac{1}{|G_p|}\right)\right),$$

書き直して, $3c_2 - c_1^2 \geqq 3\left(\sum_p \left(e(E_p) - \frac{1}{|G_p|}\right)\right)$,

右辺は、K_M が ample でなければ必ず正である。この不等式で等号成立 $\Leftrightarrow M' = \Gamma\backslash\mathbb{B}^2$, Γ は $\mathbb{B}^2$ に properly discontinuously with

at worst isolated fixed points に作用する $\mathbb{B}^2$ の automorphism の群である。//

この定理の一般化として次を得る[6]：

<u>(定理8)</u> X: compact complex surface with at worst isolated quotient singularities, C: divisor on X_{reg} with only normal crossings, $\overline{X} \to X$: the minimal resolution, $D = \sum D_i$: exceptional divisor of $\overline{X} \to X$, $\mu_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ を $K_{\overline{X}} + \sum_i \mu_i D_i \sim 0$ near D により定める。もし, (1) $\kappa(K_{\overline{X}} + D + C) = 2$, (2) $(K_{\overline{X}} + C) \cdot C_i \geqq 0$ for ${}^\forall C_i \in C$, (3) $\{C_i ; C_i$ は C の既約成分で, $(K_{\overline{X}} + C) \cdot C_i > 0$ なるもの$\}$ は, 高々 simple normal crossings のみもつ, (4) (-1)-curves が $\overline{X}$ 上あったとすれば、$\mathrm{supp}(C)$ と2点以上で交わる, (5) $\overline{X}$ 上に (-2)-curve E があったとすれば, $E \in \mathrm{Supp}\, D$ 又は $(D_i \cap E \neq \phi$ かつ $\mu_i > 0$ for some $i)$ ならば, $X - C$ 上には unique に Ricci-negative complete Einstein-Kähler V-metric が存在する。//

<u>(定理9)</u> $(X, \overline{X}, D, C)$ as above

$$\Rightarrow \left(K_{\overline{X}} + \sum_i \mu_i D_i + C\right)^2 \leqq 3\left(e(\overline{X}) - e(C) - e(D) + \sum_p \frac{1}{|G_p|}\right)$$

等号成立 $\Leftrightarrow X - C = \Gamma \backslash \mathbb{B}^2$ for some $\Gamma \curvearrowright \mathbb{B}^2$ acting properly discontinuously with at worst isolated fixed points (ここで, $\{p\}$ は X の quotient singularities 全体を動く)。//

この結果は、Hirzebruch, Höffer, M. Kato たちの曲線配置に沿う branched Galois covering により得られる一般型代数曲面の一意化問題に応用が見出されている。例は、Hirzebruch の講演等で

述べられている。曲線配置に沿って分岐する分岐被覆曲面の一意化については、たとえば次のようなものがある：

<u>(定理10)</u> (X, b) を weight curve configuration with normal crossings に関する Satake V-surface とする。$K(X,b)$ が ample (i.e., $K(X,b)$ が Kähler form を含む) の時，$c_1(X,b)^2 \leqq 3c_2(X,b)$ であり、等号成立 $\Leftrightarrow$ (X,b) は finitely uniformizable で，finite uniformization の universal covering は $\mathbb{B}^2$ である。//

ここで言葉の説明をしておこう。(X,b) が weighted curve configuration with normal crossings であるとは，X は非特異 compact complex surface で $b : X \longrightarrow \mathbb{Z}_+$: such that $b(x) = 1$ if $x \in X - \Sigma b$,

$$D = \Sigma b = \bigcup_i D_i \begin{cases} D_i \hookrightarrow X \text{ non-singular curve} \\ \bigcup_i D_i \text{ は normal crossings のみもつ} \\ i \neq j \Rightarrow D_i \text{ と } D_j \text{ は高々1点で正規交叉する.} \end{cases}$$

$b \equiv b_i \geqq 2$ on $D_i - \Sigma D$ $\quad (\Sigma D = (\bigcup_i D_i)_{\text{sing.}})$

$q \in D_i \cap D_j \Rightarrow b(q) := b_i b_j$ であるとする。(X,b) の標準束，第2 Chern 数 (euler 数) を，$K(X,b) = -c_1(X,b) =: K(X) + \sum_j \frac{b_j - 1}{b_j} D_j$,

$e(X,b) = c_2(X,b) := c_2(X) + \sum_j \left(\frac{1}{b_j} - 1\right)(e(D_j) - d_j) + \sum_q \left(\frac{1}{b_i b_j} - 1\right)$

(d_j は D_j 上の double points の個数 $= \#(D_j \cap \Sigma D)$，$\sum_q$ は double points $D_i \cap D_j$ にわたる sum である。) で定義する。(定義の妥当性：もし D_j に沿った分岐指数 b_j の finite Galois cover $\tilde{X}$ が存在 $(\pi : \tilde{X} \to X)$ したとすると，$K(\tilde{X}) = \pi^* K(X,b)$, $e(\tilde{X}) = (\deg \pi)\, e(X,b)$,

$c_1(\tilde{X})^2 = (\deg \pi)\, c_1(X, b)^2$ が成立つ。)

定理4を使うuniformizationは、たとえばKummer surface $T^2/\langle -1 \rangle$ などの例を含むものが考えられる。そこで、たとえば、

<u>(定理11)</u> X を compact complex surface with at worst isolated quotient singularities, X は Fujiki-Moishezon の意味で Kähler とする。$\bar{X}$ を X の minimal resolution, D をその exceptional divisor, $\{p\}$ を X の singularities, G_p を p に対応する finite group とする。今、もし $K_{\bar{X}} + \sum_i \mu_i D_i$ ($\mu_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ は、$K_{\bar{X}} + \sum_i \mu_i D_i \sim 0$ near D となるようにとる) の或る tensor power が trivial ならば、$e(\bar{X}) - \sum_p \left(e(D_p) - \frac{1}{|G_p|} \right) \geqq 0$ で、等号成立 $\Leftrightarrow X = \Gamma \backslash \mathbb{C}^2$ Γ: group of motions on $\mathbb{C}^2$ acting on $\mathbb{C}^2$ properly discontinuously with at worst isolated quotient singularities である。//

証明は、V-manifold X 上で、V-metric の category で定理2の refinement を作って X 上に Ricci-flat Kähler V-metric の存在を言うことによりなされる。たとえば、X を Morrison [12] の意味で一般化されたK3曲面とする。この時、$\{p\}$ で X の R.D.P.s を表せば、

$$24 - e(D) + \sum_p \frac{1}{|G_p|} \geqq 0$$

となる。Kummer surface では $e(D) = 16 \times e(A_1) = 32$, $\sum_p \frac{1}{|G_p|} = 16 \times \frac{1}{2} = 8$ で等号成立の case である。Morrison は、上の不等式で等式の成立する generalized K3 surfaces を11くつか得ている。それらは T^2 により finite uniformizable になっている(東大、阪大等で講演)。

§3. K3曲面の周期写像へのRicci-flat Kähler metric の応用

XをK3曲面とすると，$H^2(X;\mathbb{Z})$は even unimodular lattice of rank 22 and index $(3,19)$ $\underset{\text{isometric}}{\simeq} L=(-E_8)\oplus(-E_8)\oplus H\oplus H\oplus H$，ここで$E_8$は$E_8$型 Cartan matrix，$H$は hyperbolic plane である。

(X,α)が marked K3 surface であるとは、XはK3 surface であり、$\alpha: H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$ isometry となっていることを言う。ω_Xを，X上の non-vanishing holomorphic 2-form とすると，$\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X)$は$L_{\mathbb{R}}$内の positive definite oriented 2-space を定義する。実際，$\omega_X = \mathrm{Re}\,\omega_X + \sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\omega_X$と書けば，$\langle \omega_X, \omega_X\rangle = 0$, $\langle \omega_X, \overline{\omega_X}\rangle > 0$ より $\langle \mathrm{Re}\,\omega_X, \mathrm{Re}\,\omega_X\rangle = \langle \mathrm{Im}\,\omega_X, \mathrm{Im}\,\omega_X\rangle = \frac{1}{2}\langle \omega_X, \overline{\omega_X}\rangle > 0$, $\langle \mathrm{Re}\,\omega_X, \mathrm{Im}\,\omega_X\rangle = 0$となり、$\mathrm{Re}\,\omega_X$, $\mathrm{Im}\,\omega_X$で張られる2-space P_ωが決まり、これは明かに positive definite である。したがって，(X,α)でXの complex structure と$\alpha: H^2(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$を色々に変えた時，$\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X)$は、

$$\Omega = SO_0^{\circ}(3,19)/SO(2)\times SO_0^{\circ}(1,19)$$

(= the moduli space of oriented positive 2-spaces in $L_{\mathbb{R}}$)

上を動く。Ωは次の様にも表わされる：

$$\Omega = \{\omega \in L_{\mathbb{C}} \mid \langle \omega,\omega\rangle = 0,\ \langle \omega, \overline{\omega}\rangle > 0\}/\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}_{21}$$

Ωは20次元複素多様体で，$\mathbb{P}_{21}$内の quadric $\langle \omega,\omega\rangle = 0$の中の開集合である。$\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X)$の定める$L_{\mathbb{C}}$内の complex line はもちろん$\Omega$の点である。また，$\Omega$は$L_{\mathbb{C}}$に入る Hodge structure の classifying space である。

実際、$[\omega]\in\Omega$ とすると、

$$H^{2,0}(\omega) = \mathbb{C}\omega \subset L_{\mathbb{C}}$$

$$H^{0,2}(\omega) = \mathbb{C}\bar{\omega} \subset L_{\mathbb{C}}$$

$$H^{1,1}(\omega) = (H^{2,0}(\omega) + H^{0,2}(\omega))^{\perp} \subset L_{\mathbb{C}}$$

$$L = H^{2,0}(\omega) \overset{\perp}{\oplus} H^{0,2}(\omega) \overset{\perp}{\oplus} H^{1,1}(\omega)$$

となる。この Ω を <u>classical period domain</u> for K3 surfaces とよぶ。今、(X, ds^2) を Einstein-Kähler K3 surface とする。まず、X の complex structure だけから、X 上の non-vanishing holomorphic 2-form ω_X が定まる。これから、$H^2(X;\mathbb{R})$ 内の positive 2-space P_ω を得る。ω_X だけを考える分には Ω で十分だが、(X, ds^2) にはさらに Kähler form があり、$\mathrm{Re}\,\omega_X$, $\mathrm{Im}\,\omega_X$ と合わせて self-dual 2-forms の作る平坦な $\mathbb{R}^3$ bundle の basis になっている。従って、P_ω だけでなく Kähler class も加えた $L_{\mathbb{C}}$ の polarized Hodge structures の moduli space と言うべきものも考えられる。それは、$L_{\mathbb{R}}$ の oriented positive 3-space で、Kähler form に対応すべき vector (或は P_ω に対応すべき 2-space) を指定されたもの全体の moduli space である。従って、等質空間として $K\Omega := SO_0(3,19)/SO(2)\times SO(19)$ なる表示をもっている。自然な fibre bundle $K\Omega \longrightarrow \Omega$ の fibre は、$SO_0(1,19)/SO(19)$ である。$K\Omega$ の別の表示を考える。各 $[\omega]\in\Omega$ に対して、$L_{\mathbb{R}}$ の index $(1,19)$ の subspace $P_\omega^{\perp}$ が定まる。$P_\omega^{\perp}$ の中の norm >0 の vector のなす cone は 2 つの連結成分をもつが、Ω の

単連結性から、Ω全体の上で連結成分の連続なchoiceが可能である。そのchoiceの1つをC_ωと書く。すると、$K\Omega$は、

$$K\Omega = \{(\kappa,\omega)\in L_{\mathbb{R}}\times\Omega \mid \langle\kappa,\omega\rangle=0,\ \langle\kappa,\kappa\rangle=1,\ \kappa\in C_\omega\}$$

と表わされる。今，(X,ϕ,α)をmarked polarized K3 surface，即ち(X,α)はmarked K3 surfaceでϕはX上のKähler classとする。このとき，$(\alpha_{\mathbb{R}}(\phi),\ \alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X))$は$K\Omega$の点を定める。$X$をK3 surfaceとし，$\delta\in H^2(X;\mathbb{Z})\cap H^{1,1}(X)$を$\langle\delta,\delta\rangle=-2$なるものとする。$\delta$または$-\delta$は、effective classとなることがRiemann-Rochの定理からわかる。したがってもしκがX上のKähler classなら、全てのこのようなδに対して$\langle\kappa,\delta\rangle\neq 0$である。そこで，

$$K\Omega_0 = \left\{(\kappa,\omega)\in K\Omega \;\middle|\; \begin{array}{l}\langle\omega,\delta\rangle=0 \text{ かつ } \langle\delta,\delta\rangle=-2 \text{ なるすべての } \delta\in L \text{ に対して}\\ \langle\kappa,\delta\rangle\neq 0\end{array}\right\}$$

とおけば$(\alpha_{\mathbb{R}}(\phi),\ \alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X))$は$K\Omega_0$の点を定める。$X$の<u>positive cone</u> $C^+(X)$は、norm>0で決まる$H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$のconeの2つの連結成分のうちϕを含む方のことである。$C^+(X)$の<u>chamber</u>とは，$C^+(X)-\bigcup_d H_d$の1つの連結成分のことである。ここでdは$H^2(X;\mathbb{Z})\cap H^{1,1}(X)$の元で$\langle d,d\rangle=-2$なるもの全体を動き，$H_d$は$d$と直交する元全体を表わす。$X$の<u>Kähler cone</u> $C^K(X)$とは、chamberのうちでϕを含むもののことである。$\kappa\in C^+(X)$が$\kappa\in C^K(X)$であるためには、任意の(-2)-curveのclass δに対して$\langle\kappa,\delta\rangle>0$となることが必要十分であることが知られている。まとめると，

$$\begin{aligned} C^K(X) &= \{\kappa\in C^+(X) \mid \langle\kappa,d\rangle>0 \text{ for all } (-2)\text{-curves } d\} \\ &= \{\kappa\in C^+(X) \mid \langle\kappa,d\rangle>0 \text{ for all effective divisors } d\}。\end{aligned}$$

$K\Omega_0$ は $K\Omega$ の open subset である。実際、任意の点 $p \in K\Omega$ に対し或る近傍 $U(p)$ をとれば、$U(p)$ と交わる H_α の個数は有限個である。自然な fiber bundle

$$\pi : \underset{\substack{\cup \\ (\kappa,\omega)}}{K\Omega} = SO_0(3,19)/SO(2)\times SO_0(19) \longrightarrow \underset{\substack{\cup \\ R\cdot\kappa + P_\omega}}{G_3^+(L_{\mathbb{R}})} = SO_0(3,19)/SO(3)\times SO(19)$$

の fibre は、$SO(3)/SO(2) = \mathbb{P}_1$ である。この $\mathbb{P}_1$ を自然な mapping $K\Omega \to \Omega$, $(\kappa,\omega) \mapsto \omega$ により Ω におとすと、holomorphic な $\mathbb{P}_1$ になる。実際、$E(\omega,\kappa) := (P_\omega + R\cdot\kappa)\otimes\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^3$, $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \supset \mathbb{P}(E(\omega,\kappa)) \cong \mathbb{P}_2$ で、この $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E(\omega,\kappa))$ の中の quadric $(\cong \mathbb{P}_1)$ $\langle \eta, \eta \rangle = 0$ は自動的に $\langle \eta, \bar{\eta} \rangle > 0$ を満たす。この $\mathbb{P}_1$ (in Ω) は、微分幾何的に解釈できる：今 X を K3 surface の underlying differentiable manifold とする。X 上に Ricci-flat Riemannian metric があるとせよ。すると、その metric に関する self-dual 2-forms の bundle は trivial $\mathbb{R}^3$-bundle である。$\mathbb{R}^3$ に向きを入れておけば、oriented 2-space と S^2 の 1 点とが 1 対 1 onto に対応する。そして、この oriented 2-space は X 上に complex structure を決定し、それと直交する self-dual 2-form が与えられた Ricci-flat metric を Kähler metric とする Kähler form になる。したがって、上の様にして得られた Ω 内の $\mathbb{P}_1$ は、固定された Ricci-flat metric を Kähler metric とする complex structures の moduli space として現れる。これは、Ricci-flat metric を与えられた K3 surface X の twistor space Z に対して、$Z \longrightarrow X$ は differentiable に trivial な S^2-bundle,

$Z \to \mathbb{P}_1$ は X の $\mathbb{P}_1$ 上の analytic family で，与えられた Ricci-flat metric に関する isometric deformation になっていることを示している。我々は、marked polarized K3 surface (X, ϕ, α) の $K\Omega_0$ における image $(\alpha_{\mathbb{R}}(\phi), \alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X))$ が (X, ϕ, α) の isomorphism class をどのくらい忠実に現わすかに興味がある。そこで，

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ \begin{array}{l} \text{the set of isomorphism classes of marked polarized K3} \\ \text{surfaces under the obvious notion of isomorphism} \end{array} \right\}$$

とし，写像

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathcal{M}_0 & \longrightarrow & K\Omega_0 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (X, \phi, \alpha) & \longmapsto & (\alpha_{\mathbb{R}}(\phi), \alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X)) \end{array}$$

を調べる。

<u>(定理12)</u> τ は injective [2]，τ は surjective [9]。//

injectivity の証明は [ ],[2] を見るとして、ここでは Ricci-flat metric を使う surjectivity の証明についてふれてみたい。今、$l \in L$ を $\langle l, l \rangle > 0$ とする。この l に対して、algebraic period domain Ω_l が $\Omega_l := \{ [\omega] \in \Omega \mid l$ は $[\omega]$ 上 type $(1,1) \}$ により定義される。Kulikov [8] により示された <u>algebraic surjectivity</u>: "任意の点 $[\omega] \in \Omega_l$ に対して，marked K3 surface (X, α) で，$[\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X)] = [\omega]$ となるものが存在する" を仮定して τ の surjectivity を示す。まず、Einstein-Kähler K3 surface の isometric deformation を考えることにより、

(補題) $\tau : \mathcal{M}_0 \longrightarrow K\Omega_0$ の image は、$\pi : K\Omega \longrightarrow G_3^+(L_{\mathbb{R}})$ の fiber の union である。//

(Step 1) $(\kappa, \omega) \in K\Omega_0$ をとる。もし $(P_\omega + \mathbb{R}\cdot\kappa) \cap L$ が primitive rank 2 lattice M を含めば $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ である。(理由：(κ, ω) を $\pi^{-1}\pi((\kappa, \omega))$ の中の他の元でおきかえて証明すれば十分である(補題より)。故に今 $M \subset P_\omega$ と仮定する。この時 C_ω は $\mathbb{Q}$ 上定義された点を dense に含む。その1つ l をとると，$\langle \omega, l \rangle = 0$，$\langle l, l \rangle > 0$，$l \in L_{\mathbb{Q}}$ である。従って algebraic surjectivity より或る marked K3 surface (X, α) があって，$\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X) = \omega$ となる。適当な H_d ($d \in P_\omega \cap L$，$\langle d, d \rangle = -2$) 達に関する reflection で α を調節することにより $\alpha_{\mathbb{R}}^{-1}(\kappa)$ は X の Kähler chamber に入るとしてよい。X の Kähler chamber は $\mathbb{Q}$ 上定義された元が dense に入っているから、$\alpha_{\mathbb{R}}^{-1}(\kappa)$ の中にも Kähler form がある。故に $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$。)

(Step 2) $(\kappa, \omega) \in K\Omega_0$ をとる。もし $(P_\omega \cap \mathbb{R}\cdot\kappa) \cap L$ が primitive rank 1 lattice M を含めば，$(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ である。(理由：K を κ の含まれる chamber とする。$(P_\omega + \mathbb{R}\cdot\eta) \cap L$ が M を含む primitive rank 2 lattice を含むような $\eta \in K$ は、K の中で dense である。Step 1 により、この η に対して或る marked polarized K3 surface $(X_\eta, \phi_\eta, \alpha_\eta)$ があって，$(\omega, \eta) = \tau(X_\eta, \phi_\eta, \alpha_\eta)$ となる。Burns-Rapoport [2] より X_η の complex structure は η によらない。故に $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$。)

(Step 3) $(\kappa, \omega) \in K\Omega_0$ をとる。K を κ を含む C_ω の chamber とする。

$(P_\omega + \mathbb{R}\cdot\eta) \cap L$ が rank 1 primitive lattice を含む様な $\eta \in K$ は、K の中で dense である。このような η に対して $(\eta, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ (Step 2) である。故に $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ となる。以上で τ の surjectivity の証明が終る。//

$K\Omega_0$, $G_3^+(L_{\mathbb{R}})$ は、K3 surface 上の Ricci-flat metric の moduli space と深い関係がある。$\Gamma = \mathrm{Aut}\,L$ $(= SO(3,19,\mathbb{Z}))$ とおく。この時，次が成り立つ：

<u>(定理 13)</u> $K\Omega_0 \underset{\text{dense open}}{\subset} K\Omega$, $K\Omega_0$ は Γ- invariant ,

$$\Gamma\backslash K\Omega_0 \underset{\text{dense open}}{\subset} \Gamma\backslash K\Omega = \Gamma\backslash\left(SO_0(3,19)/SO(2)\times SO(19)\right)$$

$\Gamma\backslash K\Omega_0 = \{$the set of isomorphism classes of Einstein-Kähler K3 surfaces$\}$,

$\mathrm{Im}\,\pi|_{K\Omega_0} \underset{\text{dense open}}{\subset} G_3^+(L_{\mathbb{R}})$, $\mathrm{Im}\,\pi|_{K\Omega_0}$ は Γ- invariant.,

$$\Gamma\backslash\left(\mathrm{Im}\,\pi|_{K\Omega_0}\right) \underset{\text{dense open}}{\subset} \Gamma\backslash G_3^+(L_{\mathbb{R}}) = \Gamma\backslash\left(SO_0(3,19)/SO(3)\times SO(19)\right)$$

$\Gamma\backslash\left(\mathrm{Im}\,\pi|_{K\Omega_0}\right) = \{$the moduli space of Ricci-flat metrics on the underlying C^∞ manifold of a K3 surface$\}$ //

今まで述べてきた K3 surfaces の moduli に関する注意は、既知の事であったが、次の問題が自然に生ずる：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_0 \arrow[r, "\tau", "\text{bijective}"'] & K\Omega_0 \arrow[r, "\pi", "\mathbb{P}_1"'] \arrow[d, "\text{dense open subset of hyperbolic 19-space}"] & \mathrm{Im}\,\pi|_{K\Omega_0} \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

の closure をとって得られる fibration

$$\begin{tikzcd}
K\Omega \arrow[r, "\pi", "\mathbb{P}_1"'] \arrow[d, "\text{hyperbolic 19-space}"] & G_3^+(L_{\mathbb{R}}) \\
\Omega &
\end{tikzcd}$$

と K3 surface の moduli との関係は何か？ $\mathcal{M}_0$ は $K\Omega_0$ と bijective であったが，$K\Omega$ と bijective にするには $\mathcal{M}_0$ に何をつけ加えるべきか？

この問題に答える為，先ず Kummer surface で何が起こっているかを見てみよう。T を2次元複素トーラス、X を対応する Kummer surface，E を $X \longrightarrow T/\langle -1 \rangle$ の exceptional (−2)-curves の union とする。T 上の holomorphic 2-form は、X 上の holomorphic 2-form になる。T 上の flat Kähler form は、$T/\langle -1 \rangle$ 上の flat Kähler V-metric form になる。これを X 上の form と考えると、E に沿って特異点がある。それでも $H^2(X;\mathbb{R})$ の元となり、X 上の holomorphic 2-form と合わせて $H^2(X;\mathbb{R})$ の positive 3-space を張っている。

(理由：$T/\langle -1 \rangle$ 上の flat Kähler V-metric form を ϕ とする。X 上の任意の 1-form ψ に対して $\int_X \phi \wedge d\psi = 0$ を言えばよい。その為には (−2)-curve の ε-neighborhood $U(\varepsilon)$ に対して $\int_{\partial U(\varepsilon)} \phi \wedge \psi \to 0$ as $\varepsilon \to 0$ を言えばよい。$[T(\varepsilon) - (-2)\text{-curve} = \mathbb{B} - \{0\}/\langle -1 \rangle$ だから，

$\int_{S^3(r)} \tilde{\phi} \wedge \tilde{\psi} \longrightarrow 0 \ (r \to 0)$ （ϕ などを $\mathbb{B}$ に lift したものを $\tilde{\phi}$ と書く。）を言えばよい。$\mathbb{B}$ の coordinate を (s,t)，(−2)-curve のまわりの local coordinate を (u,v) （$u=0$ が (−2)-curve）とすると，

$$s^2 = u, \quad st = uv, \quad t^2 = uv^2, \quad r^2 = |s|^2 + |t|^2$$

従って $du = 2s\,ds$，$dv = \frac{dt}{s} - \frac{t}{s^2} ds$ となる。

もし $|v| < C$ なら $r^2 = |s|^2 + |t|^2 = |u|(1+|v|^2) \leqq |u|(1+C^2)$ だから，$|s|^2 \geqq \frac{r^2}{1+C^2}$ したがって $\int_{S^3(r)} \tilde{\phi} \wedge \tilde{\psi} \longrightarrow 0$ as $r \longrightarrow 0$ である。)

ϕ を X 上の form と考えると，$[\phi]\in H^2(X;\mathbb{R})$ が well-defined になったが、$[\phi]$ は E のすべての (-2)-curves の classes と直交する。実際、C を E の (-2)-curve とし、σ を $\mathcal{O}[C]$ の section で $(\sigma=0)=C$ なるものとすると、$\int_X \phi\wedge dd^c\log|\sigma|^2=0 \Leftrightarrow \int_{S^3(r)}\tilde{\phi}\wedge d^c\log|\sigma|^2\longrightarrow 0$ as $r\to 0$ であり、$|\sigma|^2=|u|^2(1+|v|^2)^2=(|s|^2+|t|^2)^2$ ゆえ $d^c\log|\sigma|^2=\frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial}-\partial)\log|\sigma|^2=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{s\,d\bar{s}+t\,d\bar{t}-\bar{s}\,ds-\bar{t}\,dt}{|s|^2+|t|^2}$ 従って $\tilde{\phi}\wedge d^c\log|\sigma|^2=O(\frac{1}{r})$，一方 $vol(S^3(r))=O(r^3)$ により、後者がわかる。従って (X,ϕ,α) は $K\Omega$ の点 $(\alpha_{\mathbb{R}}(\phi),\alpha_{\mathbb{C}}(\omega_X))$ を定めるが、これは $K\Omega_0$ の点ではない。特に，$\mathcal{M}$ には (X,ϕ,α) (X は Kummer surface，ϕ は T から来る flat Kähler V-metric，$\alpha: H^2(X;\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim} L$) の isomorphism class をつけ加えるべきである。次の一連の定義は Morrison [12] による。

<u>(定義)</u> X が <u>generalized K3 surface</u> であるとは、X は悪くても有理２重点のみもつ compact complex surface であって、その minimal resolution Y が K3 surface であるものを言う。

$\delta_1,\cdots,\delta_k\in H^2(Y;\mathbb{Z})$ を，$\rho: Y\longrightarrow X$ で contract される (-2)-curves の classes とする。X の root 系，Weyl 群をそれぞれ

$$R(X):=\{\delta=\sum_{i=1}^{k}a_i\delta_i\in H^2(Y;\mathbb{Z})\mid a_i\in\mathbb{Z},\ \langle\delta,\delta\rangle=-2\}$$

$$W(X):=\text{the group generated by }\{s_\delta\mid\delta\in R(X)\}\hookrightarrow \text{Isometry of } H^2(Y;\mathbb{Z})$$

$$,\ H^2(Y;\mathbb{Z})\ni x\xmapsto{s_\delta} x+(x,\delta)\delta\in H^2(Y;\mathbb{Z}),\text{ で定義する。}$$

$$I^2(X):=H^2(Y;\mathbb{Z})^{W(X)}=\{\text{cohomology classes which are orthogonal to the classes in } R(X)\}\hookrightarrow H^2(Y;\mathbb{Z}),$$

$\alpha : I^2(X) \longrightarrow L$ metric injection extendable to an isometry of $H^2(Y;\mathbb{Z})$ to L を X の <u>marking</u>, pair (X,α) を <u>marked generalized K3 surface</u> という。(X,α) に対し、その period $\in \mathcal{D}$ が次の様に定まる：$I^2(X)$ は $H^2(Y;\mathbb{Z})$ の元のうち integral (1,1) classes の集合 $R(X)$ と直交するもの全体だから、$I^2(X)\otimes\mathbb{C}$ は $H^{2,0}(Y)$, $H^{0,2}(Y)$ を含む。従って、marking $\alpha : I^2(X) \longrightarrow L$ が与えられれば、L の Hodge structure が

$H^{2,0}$, $H^{0,2}$ は $I^2(X)\otimes\mathbb{C}$ の中の $H^{2,0}(Y)$, $H^{0,2}(Y)$ の $\alpha_{\mathbb{C}}$- image,

$H^{1,1}$ は $(H^{2,0}\oplus H^{0,2})^{\perp}$ in $L_{\mathbb{C}}$ により定まる。次に，X の Kähler cone を，

$$C^K(X) := \left\{ \kappa \in \overline{C^K(Y)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{for all } \delta \in H^{1,1}_{\mathbb{Z}}(Y) \text{ with } \langle \delta, \delta \rangle = -2, \\ \langle \kappa, \delta \rangle = 0 \text{ iff } \delta \in R(X) \end{array} \right\}$$

で定義する。$\kappa \in C^K(X) \hookrightarrow I^2(X)\otimes\mathbb{R}$ を，X 上の <u>weak polarization</u>, triple (X, κ, α) を <u>marked weakly polarized generalized K3 surface</u> という。

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{array}{l} \text{the set of isomorphism classes of marked, weakly polarized, generalized} \\ \text{K3 surfaces under the equivalence } \sim \end{array} \right\}$$

$(X, \kappa, \alpha) \sim (X', \kappa', \alpha')$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f : X \longrightarrow X'$ *isomorphism* such that the diagram

$$\begin{tikzcd} \kappa' \in I^2(X') \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\ \kappa \in I^2(X) \arrow[r, "\alpha"'] & L \end{tikzcd}$$

is commutative

<u>(定理14) (Morrison [12])</u>

$$\begin{array}{ccc} \tau : \mathcal{M} & \longrightarrow & K\Omega \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (X, \kappa, \alpha) & \longmapsto & (\alpha_{\mathbb{R}}(\kappa), \alpha_{\mathbb{C}}(\omega_Y)) \end{array}$$

は bijective である。

すなわち、(X,κ,α) と (X',κ',α') の間に Hodge isometry $I^2(X') \xrightarrow{f^*} I^2(X)$ で $f^*(\kappa')=\kappa$, $H^2(Y';\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(Y;\mathbb{Z})$ isometry に拡張可能なものがあれば, $f: X \longrightarrow X'$ isomorphism で f^* を induce するものが unique に定まる。また、任意の点 $x \in K\Omega$ に対して, marked weakly polarized generalized K3 surface (X,κ,α) で $\tau(X,\kappa,\alpha)=x$ となるものが存在する。//

<u>(注意)</u> 上の Morrison による定義で、X 上の weak polarization $\kappa \in C^K(X) \subset \overline{C^K(Y)} - C^K(Y)$ は、Fujiki [4] の意味における X 上の Kähler form の class から来るとは仮定しない。その意味で <u>weak</u> である。一方、$\mathcal{M}_0$ は、Kähler class により polarize された marked K3 surface たちの isomorphism classes の集合であった。そして、τ の surjectivity theorem により任意の $C^K(Y)$ の元は実際に Kähler class になるのである。//

$\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_1 = \{(X,\kappa,\alpha)$ の class $\in \mathcal{M} \mid \kappa$ は Fujiki [4] の意味で Kähler class$\}$ とすると, $\tau: \mathcal{M}_0 \longrightarrow K\Omega_0$ の surjectivity と, Mayer [10] の定理 " Y を smooth K3 surface, $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ とする。もし L が "numerically effective かつ $L^2 > 0$ なら、$n \gg 0$ に対し $L^{\otimes n}$ は base point free で, その image X は, L と交わらない curve 全部を 1 点につぶして得られ、generalized K3 surface となる。" により、$\mathcal{M}_1 \supsetneq \mathcal{M}_0$ である。

<u>(定理 15)</u> [7] $\tau: \mathcal{M}_1 \longrightarrow K\Omega$ は surjective である。//

証明には、次の結果 [7] が基本的である。

(定理16) Xを高々quotient singularitiesのみもつcompact complex surfaceで，ωをFujiki[4]の意味のKähler formとする。Xのminimal resolutionをY，$Y \to X$のexceptional diviso r を$D=\sum_i D_i$（既約分解）とする。$\mathbb{Q}_{\geq 0} \ni \mu_i$を，$K_Y+\sum_i \mu_i D_i \sim 0$ near Dとなる様にとる。もし$K_Y+\sum_i \mu_i D_i$の或るtensor powerがtrivialならば，或るV-C^∞ function (i.e., V-manifold X上のC^∞-function)

$$u : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

で，$\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$がRicci-flat Einstein-Kähler V-metricのKähler formになるものがconstantの差を除きuniqueに存在する。この時，$\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$は$D$に沿ってsingularityを持つが、$\omega$と等しい$H^2(Y;\mathbb{R})$の元を定義することがわかる（すなわち$Y$上の任意の$C^\infty$ closed 2-form ψに対して$\int_Y \omega\wedge\psi = \int_Y (\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u)\wedge\psi$となる）。//

この結果の証明を詳しく述べる余裕はないが、大体次の様にして行なう。$(K_Y+\sum_i \mu_i D_i)^{\otimes n} = \mathcal{O}_Y$により．$X$上にはRicci-flatなV-volume form vが存在する。一方，V-C^∞ function $u_0 : X \to \mathbb{R}$を適当にとれば$\tilde{\omega} = \omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u_0$は$X$のKähler V-metricになる。そこで$f = \tilde{\omega}^2/v$とおけば$f$は$X$上のpositive V-$C^\infty$ functionで，$Ric(\tilde{\omega}) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log f$となる。$u$を未知関数とする微分方程式

$$(\tilde{\omega}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u)^2 = \frac{1}{f}\tilde{\omega}^2$$

をV-C^∞ categoryで解くことにより．Ricci-flat Kähler V-metric $\tilde{\omega}+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$を得る。$u_0+u$を改めて$u$と書くことにする。

$\omega+\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}u$ が $H^2(Y;\mathbb{R})$ の元を定め、それが ω の class に等しいことの理由は大体次の様なものである：Y 上の微分形式 ψ を quotient singularity のまわりで local に $\mathbb{B}$ に lift したものを $\tilde{\psi}$ と書くことにする。Y 上の任意の closed 2-form ψ に対して $\int_Y dd^c u\wedge\psi=0$ を言えばよいが、これは $\int_{S^3(r)} d^c u\wedge\tilde{\psi}\longrightarrow 0\ (r\longrightarrow 0)$ と同値である。

u が V-C^∞ だから $d^c u$ は $\mathbb{B}$ で smooth である。quotient singularity の解消は"多項式のみ含む"から、ある正の数 ε があって、exceptional set からの距離 ρ は $\mathbb{B}$ に lift すれば order r^ε である。従って exceptional set に parallel な area element は、$\mathbb{B}$ に lift すれば order $r^{\varepsilon-3}$ になる。したがって $\int_{S^3(r)} d^c u\wedge\tilde{\psi}=O\left(\int_{S^3(r)}\frac{r^\varepsilon}{r^3}r^3 d\sigma\right)$ $\longrightarrow 0\ (r\longrightarrow 0)$ である。//

定理16を使って定理15を証明する。generalized K3 surface 上に Ricci-flat Kähler metric がある場合も、V-C^∞ self-dual 2-forms の bundle は V-manifold の vector bundle として $\mathbb{R}^3$-flat trivial bundle である。従ってこの場合も $\mathbb{P}_1$ で parametrize される isometric deformation がある。この $\mathbb{P}_1$ は、$K\Omega-K\Omega_0$ の点を含ての fiber を $\mathfrak{Q}$ におとしたものである。

<u>(補題)</u> $\tau:\mathcal{M}_1\longrightarrow K\Omega$ の image は、$\pi:K\mathfrak{Q}\longrightarrow G_3^+(L_{\mathbb{R}})$ の fiber の union である。//

(定理15の証明)(Step 1) $(\kappa,\omega)\in K\mathfrak{Q}$ をとる。もし $(P_\omega+\mathbb{R}\cdot\kappa)\cap L$ が primitive rank 2 lattice M を含めば $(\kappa,\omega)\in\mathrm{Im}\,\tau$ である。実際，補

題より $M \subset P_\omega$ と仮定してよい。Morrison [12] により或る marked, weakly polarized, generalized K3 surface (X, κ, α) があって period が (κ, ω) になる。$C^K(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されるから、$C^K(X)$ の中には $\mathbb{Q}$ 上定義された l で numerically effective かつ $l^2=1$ なるものが dense に存在する。Mayer の定理 [10] によりこれらは Fujiki [4] の意味で Kähler class on X である。したがって $C^K(X)$ の任意の元が [4] の意味で Kähler class になる。故に $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ である。

(Step 2) $(\kappa, \omega) \in K\Omega$ をとる。もし $(P_\omega \cap \mathbb{R}\cdot\kappa) \cap L$ が primitive rank 1 lattice M を含めば $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ である。κ は有限個の H_α の共通部分に入る。この中で κ の含まれる chamber を K とする。$(P_\omega + \mathbb{R}\cdot\eta) \cap L$ が M を含む primitive rank 2 lattice を含む様な $\eta \in K$ は K の中で dense である。Step 1 と合わせて $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$ を得る。

(Step 3) $(\kappa, \omega) \in K\Omega$ をとる。K を Step 2 と同じく κ を含む "chamber" とする。$(P_\omega + \mathbb{R}\cdot\eta) \cap L$ が rank 1 primitive lattice を含む様な $\eta \in K$ は K の中で dense である。Step 2 と合わせて $(\kappa, \omega) \in \mathrm{Im}\,\tau$。//

要するに、$\tau : \mathcal{M}_0 \longrightarrow K\Omega_0$ の surjectivity の証明の L を、(-2)-cycles $\in L$ の orthogonal complement (これは <u>$\mathbb{Q}$ 上定義されている</u>ので、$\mathbb{Q}$-vector space としての次元は complementary である) でおきかえ、Ricci-flat metric を <u>Ricci-flat V-metric</u> でおきかえた議論が成立つわけである。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\text{bijective}"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & K\Omega \\ \mathcal{M}_1 \arrow[ur, "\text{surjective}"'] & \end{tikzcd}$$

とくに $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \xrightarrow[\text{bijective}]{\sim} K\Omega$ となる。

以上.

References

[1] T. Aubin, Équations du type Monge-Ampère sur les variété kählériennes compactes, C. R. Acad. Paris. 283 (1976), 119 -121.

[2] D. Burns and M. Rapoport, On the Torelli problem for Kählerian K3 surfaces, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 8 (1975), 235-274.

[3] B. Y. Chen and K. Ogiue, Some characterization of complex space forms in terms of Chern classes, Quart. J. Math. 26 (1975), 459-464.

[4] A. Fujiki, Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 14 (1978), 1-52.

[5] R. Kobayashi, A remark on the Ricci curvature of algebraic surfaces of general type, Tohoku Math. J. 36 (1984), 399-418.

[6] R. Kobayashi, Einstein-Kähler metrics on open Satake V-surfaces with isolated quotient singularities, to appear in Math. Ann.

[7] R. Kobayashi, Surjectivity of the weakly polarized period map for generalized K3 surfaces, to appear.

[8] V. Kulikov, Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, Math. USSR Izvestija 11 (1977), 957-989.

[9] E. Looijenga, A Torelli theorem for Kähler-Einstein K3 surfaces, Lecture Notes in Math. 42 (1981), 107-112.

[10] A. Mayer, Families of K3 surfaces, Nagoya Math. J. 48 (1972), 1-17.

[11] Y. Miyaoka, The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants, Math. Ann. 268 (1984), 159-171.

[12] D. Morrison, Some remarks on the moduli of K3 surfaces, in Classification of Algebraic and Analytic Manifolds, Progress in Math., vol. 39, Birkhäuser 1983.

[13] S. T. Yau, Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Nat. Acad. Sci. USA 74 (1977), 1798-1799.

[14] S. T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, Comm. Pure and Appl. Math. 31 (1978), 339-441.