

Asymptotic Properties of Estimators  
in Non-Regular Situations

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

適当な正則条件の下で、推定量の漸近的性質に関する研究は、高次の場合を含めて盛んに行われてきた。一方、非正則な場合にも同様な研究は試みられてきてはいるが、まだ十分とはいえない。しかし一緻性に関する収束の order としてそれらの orders の限界等については知られている。また漸近十分性についても、LeCam (1956) による定義が非正則な場合にも適用され論じられた (Akahira, 1976; Weiss, 1979; Mita, 1979)。非正則な場合の漸近有効性については、竹内 (1974) において一様分布の場合が論じられ、Akahira (1982a) において、より一般の場合まで拡張された。

ここでは、非正則な場合に一般ベイズ推定量の両側漸近有効性について論じ、さらに  $n^{-1}$  の order まで、すなわち 2 次の両側漸近有効性についても考察する。

# 1. 定義と仮定

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  を標本空間とし、 $\{P_\theta : \theta \in \mathcal{H}\}$  を  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  上の確率測度の族とする。ここで  $\mathcal{H}$  はパラメータ空間である。 $\mathcal{H}$  を  $\mathbb{R}^1$  の開集合と仮定する。 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  の  $n$  個の直積を  $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$  とし、その上の  $P_\theta$  の  $n$  個の直積測度を  $P_\theta^n$  とする。このとき  $\theta$  の推定量は  $\mathcal{X}^{(n)}$  から  $\mathcal{H}$  への  $\mathcal{B}^{(n)}$ -可測関数列  $\{\hat{\theta}_n\}$  によって定義し、これを単に  $\hat{\theta}_n$  と表わすことにする。

正数のある単調増加列  $\{c_n\}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ ) に対して、 $\hat{\theta}_n$  が  $\{c_n\}$ -一致推定量であるとは、任意の  $\varepsilon > 0$  と任意の  $\vartheta \in \mathcal{H}$  に対して、十分に小さい正数  $\delta$  と十分に大きい正数  $L$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n - \theta| \geq L\} < \varepsilon$$

が成り立つことであると定義する。

各  $k=1, 2, \dots$  に対して、ある  $\{c_n\}$ -一致推定量が  $k$  次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased, 略して AMU) であるとは、任意の  $\vartheta \in \mathcal{H}$  に対して、ある正数  $\delta$  が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{\hat{\theta}_n \leq \theta\} - \frac{1}{2} \right| = 0 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{\hat{\theta}_n \geq \theta\} - \frac{1}{2} \right| = 0$$

が成り立つことであると定義する。

ある AMU 推定量  $\hat{\theta}_n^*$  が、次の両側漸近的有効であるとは、  
 任意の AMU 推定量  $\hat{\theta}_n$ 、任意の  $\theta \in \mathbb{H}$ 、任意の  $t > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{k-1} [P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n^* - \theta| < t\} - P_\theta^n \{c_n |\hat{\theta}_n - \theta| < t\}] \geq 0$$

が成り立つことであると定義する。

各  $\theta \in \mathbb{H}$  に対して、 $P_\theta$  がある有限測度  $\mu$  に関して絶対連続であると仮定し、そのとき密度関数  $dP_\theta/d\mu$  を  $f(x, \theta)$  で表わす。 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  をたがいに独立で、いずれも密度関数  $f(x, \theta)$  をもつ分布に従う確率変数列とする。また  $\mathcal{X} = \mathbb{H} = R'$  と仮定する。

$L_n(u)$  は  $R'$  上で定義された有界、非負で  $|u|$  の単調増加関数とし、 $\pi(\theta)$  を  $\mathbb{H}$  上で定義された非負の関数とする。このとき事後密度  $p_n(\theta | \tilde{x}_n)$  と事後リスク  $r_n(d | \tilde{x}_n)$  ( $d \in \mathbb{H}$ ) を

$$p_n(\theta | \tilde{x}_n) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \pi(\theta)}{\int_{\mathbb{H}} \left\{ \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \right\} \pi(\theta) d\theta} ;$$

$$r_n(d | \tilde{x}_n) = \int_{\mathbb{H}} L_n(d - \theta) p_n(\theta | \tilde{x}_n) d\theta$$

によって定義する。ただし  $\tilde{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$  とする。

いま、すべての  $u \in R'$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n\left(\frac{u}{c_n}\right) = L^*(u)$$

このとき損失関数  $L^*$  に関する事後リスク  $r_n^*(d|\tilde{x}_n)$  を

$$r_n^*(d|\tilde{x}_n) = \int_{\Theta} L^*(c_n(d-\theta)) p_n(\theta|\tilde{x}_n) d\theta$$

によって定義する.

$\hat{\theta}_n$  が損失関数  $L^*$  と事前密度  $\pi$  に関する一般ベイズ推定量 (generalized Bayes estimator 略して GBE) であるとは、

$$r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) = \inf_{d \in \Theta} r_n^*(d|\tilde{x}_n)$$

が成り立つことであると定義する.

このとき GBE  $\hat{\theta}_n$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \inf_{d \in \Theta} r_n(d|\tilde{x}_n) - r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) \right| = 0$$

が成り立つ.

さて、 $\theta$  を位置パラメータ、すなわち  $f(x, \theta) = f(x - \theta)$  であると仮定する. さらに次の条件を仮定する.

$$(A.1) \quad f(x) > 0, \quad a < x < b; \\ f(x) = 0, \quad x \leq a, x \geq b.$$

(A.2)  $f(x)$  は開区間  $(a, b)$  において連続微分可能でかつ

$$0 < \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) < \infty$$

である.

仮定 (A. 1), (A. 2) の下では、一致性の maximum order が  $n$  となることは知られている (Akahira, 1975). 従ってこれ以後の議論においては、 $C_n = n$  の場合のみが論じられる.

### 3. 一般ベイズ推定量の両側漸近有効性.

まず、 $L^*(u) = u^2$ ,  $\pi(\theta) \equiv 1$  に関する一般ベイズ推定量、すなわち Pitman 推定量について考察する. この推定量は正則な場合には、(高次の) 漸近有効性をもつことが知られている (Akahira and Takeuchi, 1981) が、非正則な場合にはどうなるであろうかという問題を検討する.

仮定 (A. 1) より

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) > 0, \quad \max_i x_i - b < \theta < \min_i x_i - a;$$

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) = 0, \quad \text{その他},$$

が成り立つから、その一般ベイズ推定量  $\hat{\theta}_{GB}$  は

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}$$

で与えられる. ただし  $\underline{\theta} = \max_i x_i - b$ ,  $\bar{\theta} = \min_i x_i - a$  とする.

このとき GBE  $\hat{\theta}_{GB}$  が

$$\frac{1}{2}(\underline{\theta} + \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \left\{ \min_i x_i + \max_i x_i - (a + b) \right\}$$

に漸近的に等しいことが示される (Akahira, 1982b).

また密度関数  $f(x)$  が仮定 (A.1), (A.2) を満たす場合は、Akahira (1982a) の Example 3 と同様に、区間  $(a, b)$  上の一樣分布の場合に帰着されるから、推定量  $(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$  は両側漸近的有効になることが示される。ゆえに一般ベイズ推定量もまた両側漸近的有効となる。この結論は、対称な損失関数に関する GBE の場合にも拡張可能である。

次に、仮定 (A.2) において、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  が成り立つことを仮定したけれども、これが成り立たないときの典型的な例として、切断指数分布、すなわち

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0, x \geq 1 \end{cases};$$

の場合を考える。ここで  $c = e/(e-1)$  である。

このとき  $\underline{\theta} = \max_i x_i - 1$ ,  $\bar{\theta} = \min_i x_i$  である。いま  $\theta_0$  を真のパラメータとする。

(i)  $L^*(u) = u^2$ ,  $\pi(\theta) \equiv 1$  に関する GBE  $\hat{\theta}_n^1$  は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^1 - \theta_0) = \frac{Ae^A - Be^B}{e^A - e^B} - 1$$

となる。ここで  $A = n(\bar{\theta} - \theta_0)$ ,  $B = n(\underline{\theta} - \theta_0)$  とする。

(ii)  $L^*(u) = |u|$ ,  $\pi(\theta) \equiv 1$  に関する GBE  $\hat{\theta}_n^2$  は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^2 - \theta_0) = \log \frac{e^A + e^B}{2}$$

となる。

(i), (ii) からわかるように、GBE's は損失関数に依存して決まるから、 $\hat{\theta}_{GB}^1, \hat{\theta}_{GB}^2$  をそれぞれ AMU になるように修正した推定量  $\hat{\theta}_{GB}^{1*}, \hat{\theta}_{GB}^{2*}$  は両側漸近的有効にならないことが示される。

#### 4. 2 次の両側漸近有効性.

この節では、ある切断正規分布の場合に AMU 推定量  $\hat{\theta}_n$  に対して、 $\theta$  の周りの集中確率  $P_\theta^n\{n|\hat{\theta}_n - \theta| < u\}$  の  $n^{-1}$  の order までの最大限界を求める。次に一般ベイズ推定量の  $n^{-1}$  の order までの漸近展開とその漸近密度によって、その限界との比較を行う。

まず密度関数  $f(x)$  が 次のような切断正規密度

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x^2/2}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

をもつとする。ただし  $c$  はある定数とする。

このとき

$$\prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) = \begin{cases} c^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\theta\bar{x} - \frac{n}{2}\theta^2\right), & \underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}; \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

となる。ここで  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$ ,  $\underline{\theta} = \max_i x_i - 1$ ,  $\bar{\theta} = \min_i x_i + 1$  である。

$\theta_0$  を真のパラメータとし、 $\mathcal{A}$  を AMU 推定量全体のクラスとする。Akahira and Takeuchi (1981) の第3章における方法と同様に、Neyman-Pearson の基本定理を用いて、AMU 推定量  $\hat{\theta}_n$  に対して  $\theta$  の周りでの集中確率の最大限界を求める。 $\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}$  に対する  $P_{\theta}^n \{n | \hat{\theta}_n - \theta | < u\}$  の最大限界を求めるためには、 $\hat{\theta}_n$  が AMU 推定量であることから、

$$(4.1) \quad P_{\theta_0 + (u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} = P_{\theta_0 - (u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \}$$

の最大限界を求めればよい。Neyman-Pearson の基本定理によつて

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - \frac{u}{n}) > \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + \frac{u}{n}); \\ 0, & \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 - \frac{u}{n}) < \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta_0 + \frac{u}{n}) \end{cases}$$

が、 $\mathcal{A}$  における (4.1) の最大限界を

$$E_{\theta_0 + (u/n)}^n (\phi_n^*) = E_{\theta_0 - (u/n)}^n (\phi_n^*)$$

によつて与えることがわかる。

ここで

$$A = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 > \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$B = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 < \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$C = \{ \tilde{x}_n : \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n}, \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \},$$

$$D = \{ \tilde{x}_n : \bar{x} < c' \}$$

$$D' = \{ \tilde{x}_n : \bar{x} > c' \}$$



とおく. ただし  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$  で  $c'$  はある定数とする.

このとき

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1 & , \tilde{x}_n \in A^U(C \cap D); \\ 0 & , \tilde{x}_n \in B^U(C \cap D'), \end{cases}$$

となる.

$\bar{X}$ ,  $\max_i X_i - 1$ ,  $\min_i X_i + 1$  はたがいに漸近的に独立であるから、十分大きな  $n$  に対して

$$P_\theta^n(D|C) \sim P_\theta^n(D)$$

となり、 $E_{\theta_0}^n(\phi_n^*) = 1/2 + o(1/n)$  となるためには、

$P_{\theta_0}^n(D) = 1/2 + o(1/n)$  でなければならぬが、これは  $C$  を適当に選ぶことにより可能である.

よって十分大きな  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} (4.2) \quad & \sup_{\hat{\theta}_n \in A} \left[ P_{\theta_0+(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} - P_{\theta_0-(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} \right] \\ &= E_{\theta_0+(u/n)}^n(\phi_n^*) - E_{\theta_0-(u/n)}^n(\phi_n^*) \\ &\sim P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) + P_{\theta_0}^n(D) P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) \\ &\quad - P_{\theta_0}^n(D) P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) \\ &= P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) + \frac{1}{2} \{ P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) \\ &\quad - P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) \} \end{aligned}$$

となる.

一方  $\min_i X_i + 1$  の漸近分布は

$$(4.3) \quad G_1(t) = P_{\theta_0}^n \{ n(\min_i X_i + 1 - \theta_0) < t \} \\ = \begin{cases} 1 - e^{-kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

で与えられ、また  $\max_i X_i - 1$  の漸近分布は

$$(4.4) \quad G_2(t) = P_{\theta_0}^n \{ n(\max_i X_i - 1 - \theta_0) < t \} \\ = \begin{cases} e^{kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t \leq 0; \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

で与えられる。ただし  $k = ce^{-1/2}$  である。

従って (4.3), (4.4) から、 $\min_i X_i + 1$ ,  $\max_i X_i - 1$  の漸近密度はそれぞれ

$$(4.5) \quad g_1(t) = \begin{cases} ke^{-kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 + \frac{k+1}{n} t \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$(4.6) \quad g_2(t) = \begin{cases} ke^{kt} \left\{ 1 - \frac{k(k+1)}{2n} t^2 - \frac{k+1}{n} t \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right), & t \leq 0; \\ 0, & t > 0, \end{cases}$$

となることがわかる。

(4.5), (4.6) を用いると、

$$\begin{aligned}
P_{\theta_0+(u/n)}^n(A) &= P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \max_i x_i - 1 > \theta_0 - \frac{u}{n} \right\} P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n} \right\} \\
&= 1 - P_{\theta_0+(u/n)}^n \left\{ \max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n} \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= 1 - e^{-2ku} \left\{ 1 + \frac{2k(k+1)}{n} u^2 \right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (u > 0);
\end{aligned}$$

$$P_{\theta_0-(u/n)}^n(A) = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$P_{\theta_0+(u/n)}^n(C) - P_{\theta_0-(u/n)}^n(C) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

となるから、(4.2)より

$$\begin{aligned}
&\sup_{\hat{\theta}_n \in A} \left[ P_{\theta_0+(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} - P_{\theta_0-(u/n)}^n \{ \hat{\theta}_n < \theta_0 \} \right] \\
&= 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n} u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

ゆえに任意のAMU推定量  $\hat{\theta}_n$ ，任意の  $\theta$ ，任意の  $u > 0$  に対して

$$(4.7) \quad P_{\theta}^n \{ n(\hat{\theta}_n - \theta) < u \} \leq 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n} u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ、すなわち AMU推定量の  $\theta$  の周りの集中確率の最大限界は (4.7) によって与えられる。

一方、 $L^*(u) = u^2$ ， $\pi(\theta) \equiv 1$  に属する GBE  $\hat{\theta}_{GB}$  の  $n^{-1}$  の order までの漸近展開とその漸近密度は、次のようにして求められている (Akahira, 1982b)。

$\theta_0 = 0$  と仮定して一般性を失わない.

まず

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta}$$

によって与えられる.

このとき  $\theta = t/\sqrt{n}$ ,  $Z = \sqrt{n} \bar{X}$  とおくと,

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\bar{\theta}} t e^{-\frac{t^2}{2} + Zt} dt}{\int_{\sqrt{n}\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\bar{\theta}} e^{-\frac{t^2}{2} + Zt} dt}$$

となる. また  $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$ ,  $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$  とおくと,

$\hat{\theta}_{GB}$  の漸近展開は

$$n\hat{\theta}_{GB} = S + \frac{1}{3\sqrt{n}} ZT^2 - \frac{1}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{1}{6n} S(S^2 - 3T^2) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる. よって  $\hat{\theta}_{GB}$  の特性関数の漸近展開は

$$\begin{aligned} \phi_n(t) = E \left[ e^{itS} \left\{ 1 + \frac{it}{3\sqrt{n}} ZT^2 - \frac{it}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{it}{6n} S(S^2 - 3T^2) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{t^2}{18n} Z^2 T^4 \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = E \left[ e^{itS} \left\{ 1 - \frac{it}{2n} S^3 E(Z^2|S) + \frac{it}{2n} S E(Z^2 T^2|S) + \frac{it}{6n} S^3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{it}{2n} S E(T^2|S) - \frac{t^2}{18n} E(Z^2 T^4|S) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4k^2}{4k^2+t^2} + \frac{v_1 t^2}{n(4k^2+t^2)} + \frac{v_2 t^2}{n(4k^2+t^2)^2} + \frac{v_3 t^4 + v_4 t^2}{n(4k^2+t^2)^3} \\ + \frac{v_5 t^4 + v_6 t^2}{n(4k^2+t^2)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

で与えられる。ただし  $v_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ) はある定数である。

ゆえに  $\hat{\theta}_{GB}$  の漸近密度  $g_n(u)$  は

$$g_n(u) = k e^{-2k|u|} \left\{ 1 + \frac{1}{n} (c_0 + c_1 |u| + c_2 u^2 + c_3 |u|^3) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

となる。ただし  $c_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) はある定数である。

このことから、GBE  $\hat{\theta}_{GB}$  の  $\theta$  の周りの集中確率は

$$(4.8) \quad P_\theta^n \{n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| < u\} \\ = 1 - e^{-2ku} + \frac{a}{n} - \frac{1}{n} (a + bu + cu^2 + du^3) e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる。ここで  $a, b, c, d$  はある定数である。

(4.7) と (4.8) によって、GBE  $\hat{\theta}_{GB}$  は  $n^{-1}$  の order まで、 $A$  における集中確率の最大限界を達成しないから、 $\hat{\theta}_{GB}$  は 2 次の両側漸近有効推定量ではないことがわかる。

## 5. むすび

$R = (-r, r)$  とする。このとき  $\theta$  の最大確率推定量 (maximum probability estimator 略して MPE)  $\hat{\theta}_{MP}^r$  は

$$\int_{d-(r/n)}^{d+(r/n)} \prod_{i=1}^n f(x_i - \theta) d\theta$$

を最大にする  $d$  によって定義されている (Weiss and Wolfowitz, 1974). MPE が  $R$  に依存して決まることに注意する必要がある. また MPE  $\hat{\theta}_{MP}^r$  は 0-1 損失関数と  $\pi(\theta) \equiv 1$  に関する GBE とみなすことができる.

前節のような切断正規分布の場合に、MPE は

$$\hat{\theta}_{MP}^r = \begin{cases} \frac{1}{2}(\underline{\theta} + \bar{\theta}), & \bar{\theta} - \underline{\theta} > \frac{2r}{n}; \\ \bar{\theta} - \frac{r}{n}, & \bar{x} > \bar{\theta} - \frac{r}{n}, \bar{\theta} - \underline{\theta} \leq \frac{2r}{n}; \\ \underline{\theta} + \frac{r}{n}, & \bar{x} < \underline{\theta} - \frac{r}{n}, \bar{\theta} - \underline{\theta} \leq \frac{2r}{n}; \\ \bar{x}, & \underline{\theta} + \frac{r}{n} \leq \bar{x} \leq \bar{\theta} - \frac{r}{n}, \end{cases}$$

によって与えられ、これが両側漸近有効推定量でないことが知られている (Akakira and Takeuchi, 1981). しかし MPE  $\hat{\theta}_{MP}^r$  は位置不変推定量全体のクラスの中で、集中確率の最大限界を  $n^{-1}$  の order まで、点  $r$  において達成する推定量になっている.

非正則の場合は、第3, 4節において示されたように、GBE は両側漸近的有効にはなっても、2次の両側漸近的有効にはならない. このことは正則な場合と著しく異なる点である. しかし MPE のように、集中確率の最大限界とある点において

$n^{-1}$  の order まで達成できるような推定量を構成をすることは可能であろう。

この小論においては、GBE を  $L^*(u) = u^2$ ,  $|u|$  と  $\pi(\theta) \equiv 1$  の場合のみを考えたけれども、ここで得られた結論は、対称な損失関数および適当な条件を満たす事前密度  $\pi(\theta)$  の場合に拡張することは可能であろう。

#### References

- Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 22, 8-26.
- Akahira, M. (1976). A remark on asymptotic sufficiency of statistics in non-regular cases. Rep. Univ. Electro-Comm., 27, 125-128.
- Akahira, M. (1982a). Asymptotic optimality of estimators in non-regular cases. Ann. Inst. Statist. Math., 34, Part A, 69-82.
- Akahira, M. (1982b). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No. 185, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.

- Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.
- LeCam, L. (1956). On the asymptotic theory of estimation and testing hypothesis. Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1, 129-156.
- Mita, H. (1979). Asymptotic sufficiency of maximum likelihood estimator in a truncated location family. Tokyo J. Math., 2, 323-335.
- Takeuchi, K. (1974). Tôkei-teki suitei no Zenkinriron (Asymptotic Theory of Statistical Estimation). (In Japanese), Kyôiku-Shuppan, Tokyo.
- Weiss, L. (1979). Asymptotic sufficiency in a class of non-regular cases. Selecta Statistica Canadiana, 5, 141-150.
- Weiss, L. and Wolfowitz, J. (1967). Maximum probability estimators. Ann. Inst. Statist. Math., 19, 193-206.