

縮退した放物型方程式について

名大・理 松沢忠人

§ 1. 序.

Λ は Hilbert 空間 Y で稠密な定義域 $D(\Lambda)$ をもつ自己共役, 正值な作用素とする。この時 α を $\alpha > 1/2$ なる実数として次のような形の発展方程式に対する初期値問題の解の存在と一意性について考える。(定理 2.1—2.3).

$$(1.1) \quad u_t + t^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]0, \infty[, \quad f \in L^2(0, \infty; Y),$$

$$(1.2) \quad u_t + |t|^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]-T, \infty[, \quad f \in L^2(-T, \infty; Y).$$

L^2 -理論を行う場合, 端点における係数の singularity (degeneracy) に応じた初期条件を与える必要がある。初期条件の class として, 方程式 (1.1) に対しては $D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ を, (1.2) (この場合端点に係数の singularity 無し) に対しては $D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ ととることが適当である。 $\alpha > \frac{1}{2}$ のとき $0 < \frac{1}{2(\alpha+1)} < 1$ であり補間空間の記号では

$$(1.3) \quad D(\lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}) = [D(\lambda), Y]^{\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$$

なることに注意しよう。

λ に関する対角化を用いると、問題は (1.1), (1.2) に対応する常微分方程式に関する問題に帰着される。(補題 2.2-2.3)。又、上記の初期値問題は $\lambda = \lambda(t)$ が変数 t に連続的に従属する場合にも考えることができる。但しその場合には有限区間で考えることとする。(定理 3.1-3.2)。

次に、以上の結果の応用について述べる。§4 で次のような形の放物型方程式に対する初期値境界値問題の解の (然るべき関数空間での) 存在と一意性について述べる。

$$(1.4) \quad u_t + (-1)^m t^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu}(\alpha, t) D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} \sum_{|\alpha|=j} b_j(\alpha, t) D_x^\alpha u + (\alpha, t) u = f,$$

$$\alpha > -\frac{1}{2}, \quad \beta_j > \max\left(\frac{j(\alpha+1)}{2m} - 1, \frac{-1}{2}\right), \quad j=0, 1, \dots, 2m-1.$$

ここで $\beta_j < \frac{j(\alpha+1)}{2m} - 1$ とすると一般に問題が Well posed でなくなるということが implicitly に分るのであるが §5 に於て次の方程式 (1.5) に対する Cauchy 問題は Hadamard の意味で Well posed でないことを示す。

$$(1.5) \quad u_t - t^\alpha u_{xx} + i t^\beta u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad -1 < \beta < \frac{\alpha-1}{2}.$$

最後に §6 で係数が縮退した放物型方程式に対する Hypocoellipticity, Gevrey class property に関する注意を与える。

§2. 方程式 $u_t + |t|^\alpha \Delta u = f \quad (\alpha > \frac{1}{2}).$

主として [6] の記号を用いる。 Y はある Hilbert 空間/心, $L^2(T_1, T_2; Y)$ は区間 $]T_1, T_2[$ ($T_1 < T_2$) で定義された Y に値をとる L^2 -可積分な関数 f (の class) の全体で、

$\|f\|_{L^2(T_1, T_2; Y)} = \left(\int_{T_1}^{T_2} \|f(t)\|_Y^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ に関して Hilbert 空間となる。 $H^1(T_1, T_2; Y)$ は $f, f_t = df/dt \in L^2(T_1, T_2; Y)$ な関数 f の全体で、

$$\|f\|_{H^1(T_1, T_2; Y)} = \left\{ \|f\|_{L^2(T_1, T_2; Y)}^2 + \|f_t\|_{L^2(T_1, T_2; Y)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

に関して Hilbert 空間となる。

次に Δ は Y で稠密な定義域をもつ自己共役、正值な作用素とする。 Δ^θ ($\theta \geq 0$) の定義域 $D(\Delta^\theta)$ は

$$\|v\|_{D(\Delta^\theta)} = \left\{ \|v\|_Y^2 + \|\Delta^\theta v\|_Y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

に関して Hilbert 空間である。

さて、実数 $\alpha, \theta, \alpha > \frac{1}{2}, \theta \geq 0$, に対して次のように Hilbert 空間を導入する。

$$W^1(T_1, T_2; \alpha, \theta) = \{ u; u \in H^1(T_1, T_2; Y), |t|^\alpha \wedge^\theta u \in L^2(T_1, T_2; Y) \}.$$

そのノルムは

$$\|u\|_{W^1(T_1, T_2; \alpha, \theta)} = \left\{ \|u\|_{H^1(T_1, T_2; Y)}^2 + \| |t|^\alpha \wedge^\theta u \|_{L^2(T_1, T_2; Y)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

以下 $\alpha > \frac{1}{2}$ とし、次の3つの定理を得る。

定理 2.1. 任意の $f \in L^2(0, \infty; Y)$, $u_0 \in D(\wedge^{\frac{1}{2\alpha+1}})$ に

対して、初期値問題：

$$(2.1) \quad Lu = u_t + t^\alpha \wedge u = f \quad \text{in }]0, \infty[,$$

$$(2.2) \quad u(0) = u_0$$

は一意的な解 $u \in W^1(0, \infty; \alpha, 1)$ をもつ。更に、 f, u_0 に無関係な定数 C が存在して次の評価式が成り立つ。

$$(2.3) \quad \|u\|_{W^1(0, \infty; \alpha, 1)} \leq C^1 (\|f\|_{L^2(0, \infty; Y)} + \|u_0\|_{D(\wedge^{\frac{1}{2\alpha+1}})}).$$

定理 2.2. 任意の $f \in L^2(-T, 0; Y)$ ($T > 0$), $u_0 \in D(\wedge^{\frac{1}{2}})$ に対して、初期値問題：

$$(2.4) \quad Lu = u_t + |t|^\alpha \wedge u = f \quad \text{in }]-T, 0[,$$

$$(2.5) \quad u(-T) = u_0$$

は一意的な解 $u \in W^1(-T, 0; \alpha, 1)$ をもつ。

1) 以下同じ文字 C で相異なる定数を表わすものとしよう。

更に次の評価式が成り立つ。

$$(2.6) \quad \|u\|_{W^1(-T, 0; \alpha, 1)} \leq C(\|f\|_{L^2(-T, 0; Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}).$$

定理 2.1, 2.2 の結果として次の定理を得る。

定理 2.3. 任意の $f \in L^2(-T, \infty; Y)$ ($T > 0$), $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$

に対して初期値問題:

$$(2.7) \quad Lu = u_t + |t|^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]-T, \infty[,$$

$$(2.8) \quad u(-T) = u_0.$$

の一意的な解 $u \in W^1(-T, \infty; \alpha, 1)$ が存在し、次の評価式が成り立つ。

$$(2.9) \quad \|u\|_{W^1(-T, \infty; \alpha, 1)} \leq C(\|f\|_{L^2(-T, \infty; Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}).$$

これらの定理の証明のために以下で補題を準備する。

補題 2.1. (一意性). 上記3つの定理の解は対応する各空間で一意的である。

(証明).

$u \in W^1(-T, \infty; \alpha, 1)$ が $f = 0$, $u_0 = 0$ に対して (2.7), (2.8) を満たすとする。 $t > -T$ なる t に対して、

$$\int_{-T}^t (u_t(\tau), u(\tau))_Y d\tau + \int_{-T}^t (|t|^\alpha \wedge u(\tau), u(\tau))_Y d\tau = 0.$$

これから

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_Y^2 + \int_{-T}^t (|t|^\alpha \wedge u(\tau), u(\tau))_Y d\tau = 0$$

が従い、 $\wedge$ が自己共役、正值 α ことから $u \equiv 0$ でなければならぬ。他の場合も同様である。 Q. E. D.

次に常微分方程式

$$(2.10) \quad dv/dt + \lambda t^\alpha v = f(t) \quad \text{in }]0, \infty[$$

を考える。ここで $f(t) \in L^2(0, \infty)$ とし、 λ は正のパラメータとする。

補題 2.2. $\lambda > 0$ に対して次のような性質をもつ線型作用素 $G_\lambda: L^2(0, \infty) \rightarrow H^1(0, \infty)$ が存在する。

(1) 任意の $f \in L^2(0, \infty)$ に対して $G_\lambda f = v(t)$ は (2.10) の解。

(2) $f \in L^2(0, \infty)$, $\lambda > 0$ に無関係な定数 c が存在して

$$(2.11) \quad \|v\|_{H^1(0, \infty)} + \lambda \|t^\alpha v\|_{L^2(0, \infty)} \leq c \|f\|_{L^2(0, \infty)}.$$

(証明) Vishik - Grushin [9] の方法によって証明する。

(i) まず問題は $\lambda = 1$ の場合に帰着されることを示そう。

$v(t)$ を (2.10) の一つの解とすると $u(t) = v(\lambda^{-1/\alpha} t)$ は方程式

$$u'(t) + t^\alpha u(t) = \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} f(\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} t)$$

を満す = とから $\lambda=1$ の場合に帰着される = とか分る。

(ii) $\lambda=1$ の場合. $t^{\alpha+1} = \tau$, $t_0^{\alpha+1} = \tau_0$. ($t_0 > 0$ は後で定める) とおき $f_1(\tau) = (\alpha+1)^{-1} t^{\frac{\alpha}{2}} f(t)$ とおけば

$$\frac{-1}{(\alpha+1)} \int_{t_0}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{\tau_0}^{\infty} |f_1(\tau)|^2 d\tau.$$

更に $v(t)$ を (2.10) ($\lambda=1$) の 1 つの解 とし $w(\tau) = t^{\frac{\alpha}{2}} v(t)$ とおけば $w(\tau)$ は方程式

$$(2.12) \quad w_\tau + \frac{1}{\alpha+1} w + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \frac{1}{\tau} w = f_1(\tau) \quad \text{in }]\tau_0, \infty[$$

を満す。

そこで $f \in L^2(\tau_0, \infty)$ に対して 初期値問題:

$$(2.13) \quad L_1 w = w_\tau + \frac{1}{\alpha+1} w = f \quad \text{in }]\tau_0, \infty[$$

$$(2.14) \quad w(\tau_0) = 0$$

を考えると, 二の解は $w(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\frac{-(\tau-\sigma)}{\alpha+1}} f(\sigma) d\sigma$ で一意的に与えられる。

この対応 $f \rightarrow w: L^2(\tau_0, \infty) \rightarrow H^1(\tau_0, \infty) \subset L_1^1$ とかけば 明らかにある定数 C^* が存在して

$$(2.15) \quad \|L_1^{-1} f\|_{H^1(\tau_0, \infty)} \leq C^* \|f\|_{L^2(\tau_0, \infty)}.$$

ここで C^* は, $w(\tau)$ の表示から, τ_0 に無関係にとれることに注意する。

次に方程式 (2.12), 初期条件 (2.14) に関する初期値問題は次の方程式の解 $W \in H^1(t_0, \infty)$ を求めると同値である:

$$W + L_1^{-1} L_2 W = L_1^{-1} f, \quad f \in L^2(t_0, \infty),$$

ここで $L_2 W = \alpha/2\lambda+1 \cdot 1/t W$ とした。

t_0 を充分大にとり $\alpha/2\lambda+1 \cdot 1/t_0 < \frac{1}{2c\lambda}$ とおけるようにすれば $\|L_1^{-1} L_2\|_{H^1(t_0, \infty)} \leq 1/2$ 故にこの問題の解は

$$(2.16) \quad W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n \quad (\text{in } H^1(t_0, \infty))$$

$$W_1 = L_1^{-1} f, \quad W_n = -L_1^{-1} L_2 W_{n-1} + L_1^{-1} f, \quad n \geq 2$$

で与えられる次の評価式が成り立つ。

$$(2.17) \quad \|W\|_{H^1(t_0, \infty)} \leq 2c^* \|f\|_{L^2(t_0, \infty)}.$$

これから, $v(t) = t^{\frac{\alpha}{2\lambda+1}} W(t)$, $t_0 = t_0^{\frac{1}{2\lambda+1}}$ とおけば

$$(2.18) \quad \|v\|_{H^1(t_0, \infty)} + \|t^{\frac{\alpha}{2\lambda+1}} v\|_{L^2(t_0, \infty)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(t_0, \infty)}$$

なる不等式を得る。

上の解 $v(t)$ は (2.10) ($\lambda=1$) の解として、全半と間

$[0, \infty[$ に拡張され次の不等式が成り立つことが容易に示る:

$$(2.19) \quad \int_0^{t_0} |v(t)|^2 dt + \int_0^t |v_t(t)|^2 dt \leq C_2 \left(\int_0^{t_0} |f(t)|^2 dt + \int_{t_0}^t |v(t)|^2 dt \right).$$

従って, (2.18), (2.19) から $\lambda=1$ の場合を得る。Q.E.D.

次に方程式

$$(2.20) \quad Lu = u_t + \lambda |t|^\alpha u = f(t) \quad \text{in }]-T, 0[\quad (T > 0)$$

を考える。ここで $f \in L^2(-T, 0)$, λ は > 0 なるパラメータである。

補題 2.3. $\lambda > 0$ に対して次のような性質をもった作用素

$G_\lambda: L^2(-T, 0) \rightarrow H^1(-T, 0)$ が存在する。

(1) 任意の $f \in L^2(-T, 0)$ に対して $G_\lambda f = u(t)$ は (2.20) の解。

(2) $f \in L^2(-T, 0)$, $\lambda > 0$ は無関係な定数 C が存在して

$$(2.21) \quad \|u\|_{H^1(-T, 0)} + \lambda \| |t|^\alpha u \|_{L^2(-T, 0)} \leq C \|f\|_{L^2(-T, 0)}.$$

(証明は補題 2.2 のとほぼ同様であるが省略する。)

補題 2.4. (cf. Théorème I. 2, [1]). $-\frac{1}{2} < \beta \leq \alpha$ なる任

意の実数 α, β に対して次の代数的, 位相的包含関係が成立つ。

$$(2.22) \quad W^1(T_1, T_2; \alpha, s) \subset W^1(T_1, T_2; \beta, s \cdot \frac{\beta+1}{\alpha+1})$$

$$(T_1 \leq 0 < T_2; s \geq 0)$$

又, (2.22) に於て, $\beta = 0$ の場合から連続写像 $u \rightarrow u(0):$

$$W^1(T_1, T_2; \alpha, s) \rightarrow D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$$

(定理 2.1 の証明)。 Λ の対角化 (cf. [2]) により, 補題

2.2 から直ちに次のような性質をもった作用素 $G: L^2(0, \infty; \gamma)$

$\rightarrow W^1(0, \infty; \alpha, 1)$ の存在が分る:

(1) 任意の $f \in L^2(0, \infty; \gamma)$ に対して関数 $Gf = u(t)$ は方

程式 (2.1) の解である。

(2) $f \in L^2(0, \infty; Y)$ に無関係な定数 C が存在して次の評価式が成り立つ。

$$(2.23) \quad \|u\|_{W^1(0, \infty; \alpha, 1)} \leq C \|f\|_{L^2(0, \infty; Y)}.$$

一方, 初期値問題:

$$(2.24) \quad Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = 0 \quad \text{in }]0, \infty[,$$

$$(2.25) \quad u(0) = u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$$

の解 ($\in W^1(0, \infty; \alpha, 1)$) は

$$(2.26) \quad u(t) = \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Lambda\right) \cdot u_0.$$

で与えられ評価式 (2.3) が成り立つことが容易に証明できる。従って任意の $f \in L^2(0, \infty; Y)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ に対する問題 (2.1), (2.2) の解は

$$(2.27) \quad u = Gf + \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Lambda\right) (u_0 - Gf(0))$$

で与えられる。又評価式 (2.3) が成り立つことも補題 2.4 等から容易に分る。 Q.E.D.

(定理 2.2 の証明は補題 2.3 などを用いることにより定理 2.1 の場合と殆んど同様にして得られる。)

(定理 2.3 は定理 2.1, 2.2 から従う。)

§3. 方程式 $u_t + t^\alpha \Lambda(t) u = f$.

$\Lambda(t)$ は各 $t \in [-T, T]$ ($T > 0$) に対して Y で稠密に定

定義域を有する自己共役, 正値な作用素でその定義域 $D(\Lambda(t)) \equiv X$ は t に無関係とし, 更に対応 $t \rightarrow \Lambda(t) : [T, T] \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ は連続とする。ここで $\mathcal{L}(X, Y)$ は X から Y への有界線型作用素のなす空間である。 $\Lambda = \Lambda(0)$ とおこう。

以上の仮定のもとに,

定理 3.1. 任意の $f \in L^2(0, T; Y)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2\alpha+1}})$ に対して初期値問題:

$$(3.1) \quad Lu = u_t + t^\alpha \Lambda(t) u = f \quad \text{in }]0, T[,$$

$$(3.2) \quad u(0) = u_0.$$

は一意的な解 $u \in W^1(0, T; \alpha, 1)$ をもち次のような評価式が成り立つ。

$$(3.3) \quad \|u\|_{W^1(0, T; \alpha, 1)} \leq C(\|f\|_{L^2(0, T; Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2\alpha+1}})}).$$

定理 3.2. 任意の $f \in L^2(-T, T; Y)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ に対して初期値問題:

$$(3.4) \quad Lu = u_t + |t|^\alpha \Lambda(t) u = f \quad \text{in }]T, T[,$$

$$(3.5) \quad u(-T) = u_0.$$

は一意的な解 $u \in W^1(-T, T; \alpha, 1)$ をもち次の形の評価式が成り立つ。

$$(3.6) \quad \|u\|_{W^1(-T, T; \alpha, 1)} \leq C(\|f\|_{L^2(-T, T; Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}).$$

(定理 3.1, 3.2 の証明は まず初期条件が 0 の場合に帰着でき, 定理 2.1, 2.3 と 逐次近似の方法を用いるのであるが省略する。)

§4. 初期値境界値問題への応用.

Ω は R^n の有界領域でその境界 Γ は充分滑らかとし, $Q = \Omega \times]-T, T[$ ($T > 0$) とおく. $a_{\mu, \nu}(\alpha, t) \in C^\infty(\bar{Q})$, $|\mu| = |\nu| = m$, は real valued.

$$(4.1) \quad \sum_{|\mu| = |\nu| = m} a_{\mu, \nu}(\alpha, t) \xi^\mu \xi^\nu \geq C |\xi|^{2m}, \quad (\alpha, t) \in \bar{Q}, \quad \xi \in R^n$$

なる定数 $C > 0$ が存在し. $a_{\mu, \nu} = a_{\nu, \mu}$ ($\forall \mu, \nu, |\mu| = |\nu| = m$) なる条件を満すとする。

$$Y = L^2(\Omega), \quad \Lambda(t)u = (-1)^m \sum_{|\mu| = |\nu| = m} D_x^\nu (a_{\mu, \nu}(\alpha, t) D_x^\mu),$$

$$D(\Lambda(t)) = \dot{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$$

として次の関数空間を導入する。

$$\mathcal{H}^1(0, T; \alpha, 1) = \{u; u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)), t^\alpha u \in L^2(0, T; \dot{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega))\},$$

ノルムは

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(0, T; \alpha, 1)} = \left\{ \|u\|_{H^1(0, T; Y)}^2 + \|t^\alpha u\|_{L^2(0, T; \dot{H}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega))}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{H}^1(-T, T; \alpha, 1)$ も同様に定義される。

定理 4.1. $Q_+ = \Omega \times]0, T[$ とおく. $a_{\mu, \nu}(\alpha, t)$ は前の通りとし. $b_j(\alpha, t)$, $|j| \leq 2m-1$, は Q で複素数値, 有界, 可測な関数と

する。 $\alpha > -1/2$, $\beta_j > \max(\frac{j(\alpha+1)}{2m} - 1, \frac{1}{2})$, $j=0, 1, \dots, 2m-1$, とする。

この時任意の $f \in L^2(Q_+)$, $u_0 \in D_\alpha(\Omega) \equiv [H^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega), L^2(\Omega)]^{\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$ に対して

$$(4.2) \quad Lu = u_t + (-1)^m t^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu} D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} \sum_{|\delta|=j} b_j(x,t) D_x^\delta u + c(x,t)u = f \text{ in } Q_+,$$

$$(4.3) \quad u(x,0) = u_0(x) \text{ on } \Omega$$

を満す一意的存解 $u \in \mathcal{D}^1(0,T;\alpha,1)$ が存在して、次の評価式が成り立つ。

$$(4.4) \quad \|u\|_{\mathcal{D}^1(0,T;\alpha,1)} \leq C \{ \|f\|_{L^2(Q_+)} + \|u_0\|_{D_\alpha(\Omega)} \}.$$

注意 1. [3] の結果によれば、

$D_\alpha(\Omega) = H^m(\Omega) \cap H^{\frac{m}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, $D_\alpha(\Omega) = H^{\frac{m}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $0 \leq \alpha < 2m-1$, $D_{2m-1}(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $D_\alpha(\Omega) = H^{\frac{1}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $2m-1 < \alpha$ である。従って充分大なる α ($\alpha > 2m-1$) に対しては初期関数に対する Compatibility 条件はなくなる。

定理 4.2. $a_{\mu,\nu}(x,t)$, $b_j(x,t)$, α , β_j は前の通りとする。

この時任意の $f \in L^2(Q)$ と $u_0 \in H^m(\Omega)$ に対して

$$(4.5) \quad Lu = u_t + (-1)^m |t|^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu} D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} |t|^{\beta_j} \sum_{|\delta|=j} b_j D_x^\delta u + c(x,t)u = f \text{ in } Q,$$

1.1

$$(4.6) \quad u(x, -T) = u_0 \quad \text{on } \Omega$$

を満す一意的存解 $u \in \mathcal{D}'(-T, T; \alpha, 1)$ が存在して次の評価式が成り立つ。

$$(4.7) \quad \|u\|_{\mathcal{D}'(-T, T; \alpha, 1)} \leq C \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^m(\Omega)} \}.$$

(定理 4.1, 4.2 の証明には前節の結果を用いるが, まず初期条件が 0 の場合に帰着でき, 更に Riesz-Schauder の理論を適用して解の一意性の証明に帰結される。)

§5. 方程式 $u_t - t^\alpha u_{xx} + i t^\beta u_x = 0$ に対する初期値問題。

$-1 < \beta < \frac{\alpha-1}{2}$ とし次のような方程式を考える。

$$(5.1) \quad u_t - t^\alpha u_{xx} + i t^\beta u_x = 0 \quad \text{in } R_+^2 = \{(x, t); (x, t) \in R^2, t > 0\}.$$

整数 $k \geq 0$ に対して次の関数

$$(5.2) \quad u_n(x, t) = \frac{e^{inx}}{n^{k+1}} \cdot \exp\left(\frac{-n^2 t^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \frac{n t^{1+\beta}}{1+\beta}\right), \quad n=1, 2, \dots$$

は $(-\infty < x < \infty) \times [0, T]$ ($T > 0$) で (5.1) を満し有界である。

一方

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} u_n(x, 0) \right| = \left| \frac{i^j e^{inx}}{n^{k+1-j}} \right| = \frac{1}{n^{k+1-j}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \quad 0 \leq j \leq k,$$

$$|u_n(0, n^{-\frac{2}{1+\alpha}})| = \frac{1}{n^{k+1}} \exp\left(\frac{-1}{1+\alpha} + n^{1-\frac{2(1+\beta)}{1+\alpha}}\right) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty$$

であるから, 方程式 (5.1) に対する Cauchy 問題は α, β が上の条件を満す時には Hadamard の意味で well posed ではない。

§6. Hypocoellipticity に関する注意.

関数 $a_{\mu, \nu}(\alpha, t)$, $|\mu| = |\nu| = m$, は §4 で与えられたものとし, $b_j(\alpha, t) \in C^\infty(Q)$, $|j| \leq 2m-1$, $c(\alpha, t) \in C^\infty(Q)$ とする。定理 4.2 に於ける評価式の応用として次のような形の方程式の Hypocoellipticity が従う。

$$(6.1) \quad Lu = u_t + (-1)^m t^{2k} \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu, \nu}(\alpha, t) D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} b_j D_x^j u + cu = f \text{ in } Q,$$

== 2° β_j は $\beta_j > \max(\frac{j(2k+1)}{2m} - 1, \frac{1}{2})$ なる整数。

$$(6.2) \quad Lu = u_t + (-1)^{m+1} t^{2k+1} \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu, \nu} D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} b_j D_x^j u + cu = f \text{ in } Q,$$

== 2° β_j は $\beta_j > \max(\frac{j(2k+2)}{2m} - 1, \frac{1}{2})$ なる整数。(cf [5]).

更にこれ等の方程式の解の Gevrey class property も証明される。その場合も係数が縮退しない時と全く同じ結論が従う。(cf [7]).

一方、補題 2.2, 2.3 を一般化することにより Fourier 変換の範囲での方がより一般的な方程式に対する Hypocoellipticity 等の証明が得られる。例えば、方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t^{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

などに対しては前節までの結果は用いることができなから、補題 2.2, 2.3 に於て $\lambda |t|^\alpha$ の代りに $|t|^\alpha \xi_1^2 + \xi_2^2$ ($(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ をパラメータとする) としたものを導きこれを用いれば上記と同様の結論を得る。

更に一般的な方程式に対してパラメトリクスを構成する Y. Kato [10] の結果がある。

BIBLIOGRAPHY

- [1] Baouendi M. S., *Bull. Soc. Math. France*, 95, 1967, 45-87.
- [2] Dixmier J., *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [3] Grisvard P., *Archive Rat. Mech. Analysis*, 25, 1967, 40-63.
- [4] Hörmander L., *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1963.
- [5] Kannai Y., *An unsolvable hypoelliptic differential operator*, to appear.
- [6] Lions J.L. & Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, I, Paris, Dunod, 1968.
- [7] Matsuzawa T., *Sur les équations $u_{tt} + t^\alpha u_{xx} = f$* , to appear in *Nagoya Math. J.*
- [8] Matsuzawa T., *Sur une classe d'équations paraboliques dégénérées*, to appear.
- [9] Vishik M. Y. & Grushin V. V., *Mat. Sbornik* 79, (121), No. 1, 1969.
- [10] Kato Y., *To appear in J. Funct. Analysis*, 1970.