

フェルマー曲面上のファイバー構造の 大域モノドロミー

Global monodromy of fibering structure of Fermat surfaces

阿原一志 (明治大学)

Kazushi Ahara (Meiji University)

1 Introduction

$f: M \rightarrow P^1$ を代数直線 P^1 上のファイバリングであるとする。つまり、 M は代数曲面であって、 f は正則写像で、有限個を除く P^1 の点 σ において、そこでのファイバー $F_\sigma = f^{-1}(\sigma)$ が滑らかな閉リーマン面になっているようなものを言う。

このようなファイバリングについて、大域モノドロミー ρ を考えることができる。実際に、 ρ とは次のような写像である。

$$\rho: \pi_1(P^1 - S, \sigma_0) \rightarrow \mathcal{M}(F_{\sigma_0})$$

ここで、 S は F_σ が多様体でないような σ の集合であり、 σ_0 は $P^1 - S$ 上に任意に固定された基点である。 $\mathcal{M}(F_{\sigma_0})$ はファイバー F_{σ_0} の写像類群を意味する。 $\rho(\gamma)$ は次のように特徴付けられる。つまり、ファイバリング f を閉路 γ に制限すると、張り合わせ関数が $\rho(\gamma)$ であるようなマッピングトーラスが得られる。

この論文では、具体的なファイバリングの族の例である、高次数のフェルマー曲面 $x^n + y^n + z^n + w^n = 0$ 上のファイバリング構造に対する大域モノドロミーを具体的に計算する手順と、 $n \leq 16$ の場合の数値計算結果を紹介する。途中コンピュータによる数値計算を本質的に用いているので、一般の n に対して数学的な証明を与えたわけではないが、結果はきわめて秩序的に得られており、一般次数の場合における予想を与えている。この計算は、 $n = 4$ の場合には松本のノートによる計算により、 $n = 5, n = 6$ の場合には阿原 [Ahara, 1993][Ahara, 2001] の計算がこれまで知られている。

フェルマー曲面上のファイバー構造については、松本 [Matsumoto, 2004] は、 n が 12 以下であるか、または $n - 1$ が 6 の倍数でない場合について、その特異ファイバーを決定し

ている。この結果は $n-1$ が 6 の倍数の場合にも自然に拡張可能であるので、それを第 2 章に紹介した。第 3 章では一般ファイバーのうちのひとつを固定し、これをできるだけ自然な方法で種数 $(n-2)(n-3)/2$ の閉曲面と同一視する方法を紹介した。第 5 章では、全ての特異ファイバーについて、消滅曲線を具体的に計算する手順とその結果を紹介した。

これらの結果は、最初は筆者が開発したソフトウェア Monomie によって予想されたものである。筆者はこの場合の計算を MATHEMATICA で再確認した。実際に [Ahara, 2005] によって、同じ計算を確かめてみることもできる。

2 結果と予想

$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ を $P^3(C)$ の同次座標であるとする。 V_n を n 次フェルマー曲面

$$V_n = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \mid z_0^n - z_1^n - z_2^n + z_3^n = 0\}$$

であるとする。退化を含むファイバー構造 $f : V_n \rightarrow P^1(C)$ を

$$f[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] := \begin{cases} [z_0 - z_1 : z_2 - z_3] & (z_0 \neq z_1 \text{ or } z_2 \neq z_3) \\ [z_2^{n-1} : z_0^{n-1}] & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

によって定める。この定義は松本によるものである。写像 f は正則写像である。実際に、 V_n 上において、

$$z_0 - z_1 : z_2 - z_3 = \sum_{k=1}^{n-1} z_2^{n-1-k} z_3^k : \sum_{k=1}^{n-1} z_0^{n-1-k} z_1^k$$

であるので、 $z_0 \rightarrow z_1, z_2 \rightarrow z_3$ としたときの $f[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ の極限は正しく $[z_2^{n-1} : z_0^{n-1}]$ になる。

このファイバー構造の性質を述べる前に、いくつか記号を導入しておく。 f の値域 $P^1(C)$ を自然に $C \cup \{\infty\}$ と、 $[z_0 : z_1] \leftrightarrow z_1/z_0$ により同一視しておく。 $\sigma \in C \cup \{\infty\}$ における f のファイバーを $F_\sigma := f^{-1}(\sigma)$ と書くことにする。また、実数 $s_n(j, k)$ ($j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$) を

$$s_n(j, k) := (-1)^{j+k} \left(\sin \frac{j\pi}{n-1} / \sin \frac{k\pi}{n-1} \right)^{n-1}$$

により定義する。 n を明示する必要のないときにはこれを簡単に $s(j, k)$ を記すこともある。

4 以上の一般の n について、次の命題が正しい。

Proposition 2.1 [Matsumoto, 2004]

- (1) ファイバー構造 f の一般ファイバーは種数 $(n-2)(n-3)/2$ のリーマン面である。
- (2) F_σ が特異点を持つのは (a) $\sigma = 0, \infty$, (b) $\sigma^n = s_n(j, k)$ for some j, k の場合に限る。

(3) 特異ファイバー F_0 と F_∞ は $(n-1)$ 本の代数直線が 1 点で交わった形をしている。

(4) n が偶数でありかつ $\sigma^n = \pm 1$ であるとする。このとき、 F_σ は滑らかで既約な $n-2$ 次の曲線と 1 本の代数直線からなり、これらは $n-2$ 個の異なる点で交わっている。

n が奇数でありかつ $\sigma^n = 1$ であるとする。このとき、 F_σ は滑らかで既約な $n-3$ 次の曲線 C と 2 本の代数直線 L_1, L_2 からなり、 C は L_i と $n-3$ 個の異なる点で交わり、 L_1, L_2 はさらに異なる点で交わっている。(したがって、全部で $2n-5$ 個のノードがある。)

(4) そのほかの場合については、特異ファイバー F_σ は既約な $n-1$ 次曲線であって、いくつかのノードを持っている。ノードの個数は

$$\#\{(j, k) \mid j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}, \sigma^n = s_n(j, k)\}$$

と一致している。

このファイバリングは n 次の巡回群の対称性を持っていることが容易に推測される。 $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$ とし、 ω_n が生成する n 次巡回群を $\langle \omega_n \rangle$ と書くことにすると、 $f: V_n \rightarrow P^1(C)$ には同変 $\langle \omega_n \rangle$ 作用が存在する。実際に、

$$\begin{aligned} \omega_n[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] &= [z_0 : z_1 : \omega_n z_2 : \omega_n z_3] && \text{on } V_n \\ \omega_n[z_0 : z_1] &= [z_0 : \omega_n z_1] && \text{on } P^1(C) \end{aligned}$$

により与えられる。

コンピュータによる数値計算の結果、以下の結果を得た。これらは実際に [Ahara, 2005] にある MATHEMATICA 用プログラムを利用して追試することが可能である。筆者は $n \leq 16$ の場合にこれを確認した。

Theorem

n を 4 以上 16 以下の整数とする。 σ_0 を十分大きな正の実数であるとする。(全ての j, k について $\sigma_0 \gg |s_n(j, k)|$ を満たすものとする。)

(1) (Observation 3.2) 2 枚の正 $n-1$ 角形と $n-3$ 枚の正 $2n-2$ 角形の辺同士を張り合わせて、 F_{σ_0} と自然に identify できる閉多面体 D_* を構成できる。

(2) (Observation 4.1) $\omega_n: F_{\sigma_0} \rightarrow F_{\omega_n \sigma_0}$ は、(1) における正 $n-1$ 角形と正 $2n-2$ 角形を $2\pi/(n-1)$ 回転する写像に対応する。

(3) (Observation 5.3) 任意の特異ファイバーは $F_{\omega_n^\ell \sigma}$ の形に書き表せる。ただし σ を $0 \leq \arg \sigma < 2\pi/(n-1)$ であるとする。Definition 5.2 に従って、各 $(j, k) \in \{1, 2, \dots, n-2\}^2$ に対して F_{σ_0} 上の単純閉曲線 c_{jk} を定義する。このとき、各特異ファイバーに対して、図 7 で決めるような閉路に対して、その消滅曲線は

$$\bigcup_{(j,k)} \omega_n^{-\ell} c_{jk}$$

である。ただし、ここで、 (j, k) は $s(j, k) = \sigma^n$ を満たす全ての組 (j, k) についての和集合であるとする。

3 基点 σ_0 上のファイバー

まず最初に同時座標の変換を行う。 w_0, w_1, w_2, w_3 を順に $z_0 - z_1, z_1, z_2, z_3$ であるとする。この座標変換により、 f は次のように表示される。

$$V_n = \{[w_0 : w_1 : w_2 : w_3] \mid w_1^n - (w_1 - w_0)^n - w_2^n + w_3^n = 0\}$$

$$f[w_0 : w_1 : w_2 : w_3] := \begin{cases} [w_0 : w_2 - w_3] & (w_0 \neq 0 \text{ or } w_2 \neq w_3) \\ [w_2^{n-1} : w_1^{n-1}] & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

したがって、 ∞ でない σ に対して、

$$F_\sigma \cap \{w_0 \neq 0\} = \{(x, y) \mid x^n - (x-1)^n - y^n + (y-\sigma)^n = 0\}$$

であることが分かる。実際に、 $w_1/w_0 = x, w_2/w_0 = y$ とおくと、 $\sigma = (w_2 - w_3)/w_0 = y - w_3/w_0$ であることから、 $w_3/w_0 = y - \sigma$ であることが分かる。一方で $F_\sigma \cap \{w_0 = 0\}$ は $n-1$ 個の点からなる集合で、これは $F_\sigma \cap \{w_0 \neq 0\}$ の境界となっている。

この表示を用いて、分岐被覆 h_σ を次のように定義する。

$$h_\sigma : F_\sigma \cap \{w_0 \neq 0\} \rightarrow C$$

$$h_\sigma(x, y) := x$$

h_σ は自然に $\tilde{h}_\sigma : F_\sigma \rightarrow P^1$ へと拡張可能であることを注意しておく。

Lemma 3.1

(1) h_σ の分岐点集合は $\cup_{k=1}^{n-2} L_k$ である。ただしここで、

$$t(k) := \left(\frac{1}{\omega_{n-1}^k - 1} \right)^{n-1} = (-1)^k (-i)^{n-1} \left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1} \right)^{-(n-1)}$$

$$\ell_k(x) := x^n - (x-1)^n - t(k)\sigma^n$$

$$L_k := \{x \mid \ell_k(x) = 0\}$$

とする。

(2) n が偶数の時には $k \neq k'$ に対して $L_k \cup L_{k'} = \emptyset$ である。

(3) n が奇数のときには、 $L_k = L_{n-1-k}$ であって、 $k < n/2, k' < n/2, k \neq k'$ に対しては、 $L_k \cup L_{k'} = \emptyset$ である。

注意

L_k (resp. ℓ_k) は σ に依存する集合 (resp. 式) であるから、 $L_{k,\sigma}$ (resp. $\ell_{k,\sigma}$) のように書くのが厳密ではあるが、混乱の恐れのない範囲で、 σ を省略して書くことにする。

(証明)

(1) $g_\sigma(x, y)$ を

$$g_\sigma(x, y) := x^n - (x-1)^n - y^n + (y-\sigma)^n$$

により定義する。連立方程式 $g_\sigma(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} g_\sigma(x, y) = 0$ を解く。 $\frac{\partial}{\partial y} g_\sigma(x, y) = 0$ を解いて、

$$y = \frac{\omega_{n-1}^k \sigma}{\omega_{n-1}^k - 1}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-2)$$

を得る。これを $g_\sigma(x, y) = 0$ に代入して $x^n - (x-1)^n - t(k)\sigma^n = 0$ を得る。逆に、点 x_0 が $\ell_k(x_0) = 0$ を満たすと仮定する。このとき、

$$(x_0, y_0) = (x_0, \frac{\omega_{n-1}^k \sigma}{\omega_{n-1}^k - 1})$$

は $h_\sigma^{-1}(x_0)$ の元であり、かつ $g_\sigma(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} g_\sigma(x_0, y_0) = 0$ を満たすことが確かめられる。このことは、 x_0 が分岐点であることを意味している。

(2) n を偶数としたとき、 $(-1)^k (\sin(k\pi/(n-1)))^{n-1}$, $(k = 1, 2, \dots, n-2)$ は互いに異なる。したがって、 $k \neq k'$ に対して $t(k) \neq t(k')$ であって、 $L_k \cup L_{k'} = \emptyset$ であることが分かる。

(3) n を奇数としたとき、 $(-1)^k (\sin(k\pi/(n-1)))^{n-1} = (-1)^{n-1-k} (\sin((n-1-k)\pi/(n-1)))^{n-1}$ であるから、 $t(k) = t(n-1-k)$ であって、 $L_k = L_{n-1-k}$ である。 $k < n/2$, $k' < n/2$, $k \neq k'$ に対しては、 $t(k) \neq t(k')$ であって、 $L_k \cup L_{k'} = \emptyset$ であることがわかる。

$\sigma = \sigma_0$ の場合の L_k の点の分布に関しては数値計算により次のことが観察される。

Observation 3.2

σ_0 が正の実数であって、任意の $j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ に対して $\sigma_0 \gg |s_n(j, k)|$ を満たすならば、 L_k は「ほぼ」 $\frac{1}{2}$ を中心とする円上にある。実際に、十分に大きな正の整数 m に対して、

$$x^n - (x-1)^n = n^m$$

の根は

$$0.5 + n^{\frac{m-1}{n-1}} \exp\left(\frac{2k\pi i}{n-1}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-2)$$

に非常に近い。また、 L_k は $\Re(z) = 1/2$ を対称軸とする線対称図形である。

(証明)

$\tilde{x} = x - \frac{1}{2}$ とすると、十分大きな $\tilde{x}$ について、

$$x^n - (x-1)^n = n\tilde{x}^{n-1} + \frac{1}{4}nC_3\tilde{x}^{n-3} + \dots \sim n\tilde{x}^{n-1}$$

である。 $n\tilde{x}^{n-1} = n^m$ の根が $\tilde{x} = n^{\frac{m-1}{n-1}} \exp(\frac{2k\pi i}{n-1})$ であることから、Observation 3.2 は直ちに従う。線対称図形であることについては、 σ_0 が実数なことから、 $\ell_k(x)$ が $x \mapsto 1 - \bar{x}$ という変換について不変なことより直ちに従う。

分岐被覆 h_σ のモノドロミーに関して次のことが観察される。

Observation 3.3

(1) $x_0 = \frac{1}{2}$ とする。任意の $(x_0, y) \in h_{\sigma_0}^{-1}(x_0)$ に対して、 $\Re(y) \sim \frac{\sigma_0}{2}$ が成り立つ。(特に、 n が偶数ならば、 $\Re(y) = \frac{\sigma_0}{2}$ である。)

(2) $h_{\sigma_0}^{-1}(x_0) = \{(x_0, y_1), \dots, (x_0, y_{n-1})\}$ を

$$\Im(y_1) < \Im(y_2) < \dots < \Im(y_{n-1})$$

によって定める。 L_k の任意の点 $\bar{x}$ を固定し、閉路 $\gamma_{\bar{x}}$ を次のように定める。 $\gamma_{\bar{x}}$ は $x_0 = \frac{1}{2}$ を始点とし、 $\bar{x}$ 付近に向かって進む。そして $\bar{x}$ の周りを小さく 1 周したあと、再び x_0 へ戻る。(図 1 を見よ。ただし、他の $\cup_k L_k$ の点は通過しないものとする。もし線分 $x_0\bar{x}$ 上に他の $\cup_k L_k$ の点がある場合には、道を微動させて、通らないようにする。以下の (a)(b) の結果は、その微動が「右によける」でも「左によける」でも結果が変わらないことを示唆している。[Ahara, 2005] ではすべて右によける方法で計算されている。)

(a) n が偶数のとき、 $\gamma_{\bar{x}}$ に沿う h_{σ_0} のモノドロミーは $(k, k+1)$ である。別の言い方をすれば、 $\gamma_{\bar{x}}$ の、 h_{σ_0} によるリフトは (x_0, y_k) と (x_0, y_{k+1}) の置換を起こす。

(b) n が奇数のとき、 $\gamma_{\bar{x}}$ に沿う h_{σ_0} のモノドロミーは $(k, k+1)(n-1-k, n-k)$ である。

(3) 数値計算の結果より、 $4 \leq n \leq 16$ において上記 (2) は正しい。

注意：Observation 3.3(2) において、モノドロミーは k の値にのみ依存する。 $\bar{x}$ が L_k のどの元であるかには依存しない。

この Observation により、 σ_0 上のファイバー F_{σ_0} を自然な方法で、胞体分割することができる。この方法は阿原 [Ahara, 2002] による方法である。

(準備)

(1)

D_1 を原点を中心とする辺長 1 の正 $(n-1)$ 角形であるとする。 D_1 の辺には以下のように向きつきラベルがつけられている。

(a) n が偶数のときには、 D_1 には、時計回りに順に $e_1^1, e_3^1, \dots, e_{n-1}^1, e_{n-2}^1, e_{n-4}^1, \dots, e_4^1, e_2^1$ とラベルがつけられている。

(b) n が奇数のときには、 D_1 には、時計回りに順に $e_1^1, e_3^1, \dots, e_{n-2}^1, e_{n-1}^1, e_{n-3}^1, \dots, e_4^1, e_2^1$ とラベルがつけられている。

(2) $D_2, D_3, \dots, D_{n-2}$ を原点を中心とする辺長1の正 $(2n-2)$ 角形のコピーであるとする。 D_j ($j = 2, 3, \dots, n-2$) の辺には以下のように向きつきラベルがつけられている。

(a) n, j が(偶数, 偶数)のときには、 D_j ($j = 2, 3, \dots, n-2$)には、時計回りに順に $e_1^{j-1}, e_2^j, e_3^{j-1}, e_4^j, \dots, e_{n-1}^{j-1}, e_n^j, e_{n-2}^{j-1}, e_{n-3}^j, e_{n-4}^{j-1}, \dots, e_4^{j-1}, e_3^j, e_2^{j-1}, e_1^j$ とラベルがつけられている。

(b) n, j が(偶数, 奇数)のときには、 D_j ($j = 2, 3, \dots, n-2$)には、反時計回りに順に $e_1^{j-1}, e_2^j, e_3^{j-1}, e_4^j, \dots, e_{n-1}^{j-1}, e_n^j, e_{n-2}^{j-1}, e_{n-3}^j, e_{n-4}^{j-1}, \dots, e_4^{j-1}, e_3^j, e_2^{j-1}, e_1^j$ とラベルがつけられている。

(c) n, j が(奇数, 偶数)のときには、 D_j ($j = 2, 3, \dots, n-2$)には、時計回りに順に $e_1^{j-1}, e_2^j, e_3^{j-1}, e_4^j, \dots, e_{n-1}^{j-1}, e_n^j, e_{n-2}^{j-1}, e_{n-3}^j, e_{n-4}^{j-1}, \dots, e_4^{j-1}, e_3^j, e_2^{j-1}, e_1^j$ とラベルがつけられている。

(d) n, j が(奇数, 奇数)のときには、 D_j ($j = 2, 3, \dots, n-2$)には、反時計回りに順に $e_1^{j-1}, e_2^j, e_3^{j-1}, e_4^j, \dots, e_{n-1}^{j-1}, e_n^j, e_{n-2}^{j-1}, e_{n-3}^j, e_{n-4}^{j-1}, \dots, e_4^{j-1}, e_3^j, e_2^{j-1}, e_1^j$ とラベルがつけられている。

(3) D_{n-1} を原点を中心とする辺長1の正 $(n-1)$ 角形のコピーであるとする。 D_{n-1} の辺には以下のように向きつきラベルがつけられている。

(a) n が偶数のときには、 D_{n-1} には、時計回りに順に $e_1^{n-2}, e_3^{n-2}, \dots, e_{n-1}^{n-2}, e_{n-2}^{n-2}, e_{n-4}^{n-2}, \dots, e_4^{n-2}, e_2^{n-2}$ とラベルがつけられている。

(b) n が奇数のときには、 D_{n-1} には、反時計回りに順に $e_1^{n-2}, e_3^{n-2}, \dots, e_{n-2}^{n-2}, e_{n-1}^{n-2}, e_{n-3}^{n-2}, \dots, e_4^{n-2}, e_2^{n-2}$ とラベルがつけられている。

(構成)

$D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ の辺を、同じラベルの辺同士を張り合わせるにより、閉多面体を構成する。こうして得られた多面体を D_* と書くことにする。大変複雑なようだが、 D_j たちにつけられたラベルは非常に規則正しく、簡明であることが分かる。参考までに、 $n=4$ の場合の図を図2に表示しておく。

(閉曲面 D_* と F_{σ_0} との同一視の方法)

以下、Observation 3.3を仮定する。

準備として、 $\sigma = \sigma_0$ の場合の $L_k = \{x \mid \ell_k(x) = 0\}$ に番号付けをする。つまり、 $L_k = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n-1}^k\}$ を

$$\begin{aligned} \Im(x_i^k) < \Im(x_{i+1}^k) & \quad \text{or} \\ (\Im(x_i^k) = \Im(x_{i+1}^k) \quad \text{and} \quad \Re(x_i^k) < \Re(x_{i+1}^k)) \end{aligned}$$

という順序により並んでいるものとする。

$h_{\sigma_0} : F_{\sigma_0} \rightarrow P^1$ は $(n-1)$ -fold 分岐被覆写像であることにまず注意しよう。 F_{σ_0} を分岐被覆写像から再構成し、これを閉多面体 D_* と対応させていく方法を考える。まず、 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ のコピーを $(n-1)$ 枚用意し、これを $D'_1, D'_2, \dots, D'_{n-1}$ としよう。ただし、 D'_j には、 h_{σ_0} の分岐点がマークしてあるとする。次に、全ての分岐点と ∞ とをそれぞれ結ぶような経路で、互いに交わらないようなものを固定し、この経路に沿って D'_j をカットする。 P^1 を星型のグラフによってカットするので、切った後には花のような形が出現するが、同一の切り口から生ずる 2 本の稜線を組みにして「スリット」と呼ぶことにする。(図 3a を参照すること。) それぞれのスリットには、Observation 3.3 によって求めた、モノドロミー置換がマークされているとする。このマークされた置換を見ながら分岐被覆写像と適合するようにスリットとスリットを張り合わせ、 F_{σ_0} を構成することができる。実際に、もし $(k, k+1)$ がスリットにマークされているとしたなら、 D'_k 上と、 D'_{k+1} 上の対応するスリット同士を張り合わせればよい。これを図に表したのが図 3b である。 $j \neq k, j \neq k+1$ となる j に対しては、 D'_j 上の $(k, k+1)$ スリットはそのままふさいでしまってもよい。このようにして全てのスリットを「他のスリットと張り合わせる」または「ふさぐ」という作業を行うことにより、連結で境界のない多面体を構成することができる。

以下に、 D'_j と D_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) とを同一視する方法を説明する。まず、 D'_1 上では、 D'_2 と貼り付けるスリットがちょうど $n-1$ 個あり、それ以外のスリットはふさがれている。このことから、(D'_1 上の) D'_2 と貼り付けるスリット 1 つにつき正 $(n-1)$ 角形の辺 1 つを対応させるようにすると、 D_1 と対応付けることができる (図 4)。

D'_2 上では、 D'_1 と貼り付けるスリットがちょうど $n-1$ 個、 D'_3 と貼り付けるスリットがちょうど $n-1$ 個あり、それ以外のスリットはふさがれていることが分かる。しかも、原点を中心とする極座標の偏角で考えると、 D'_1 と貼り付けるスリットと、 D'_3 と貼り付けるスリットとは互い違いに現れることが分かる。このことから、 D'_1 または D'_3 と貼り付けるスリット一つを正 $(2n-2)$ 角形の辺一つと対応させることができ、一つおきに D_1 と張り合わせる辺が出現することになる。

以下同様にして、 $j = 3, 4, \dots, n-1$ について、 D'_j と D_j とを対応させることができ、 D_j を張り合わせたものと F_{σ_0} とを同一視することができる。

4 ω_n 作用と F_{σ_0}

V_n 上の $\langle \omega_n \rangle$ 作用により、 F_{σ_0} は $F_{\omega_n \sigma_0}$ へと移される。したがって、 $\ell_k(x)$ は $\langle \omega_n \rangle$ 作用について不変であり、 h_{σ_0} の分岐点と $h_{\omega_n \sigma_0}$ の分岐点とは一致し、それぞれでのモノドロミー置換も一致する。したがって、 $F_{\omega_n \sigma_0}$ と D_* とは自然に同一視することができる。

一方で、原点中心の円弧に沿って、 σ を σ_0 から $\omega_n \sigma_0$ へと連続的に移すことにより、 F_{σ_0} から $F_{\omega_n \sigma_0}$ への同相写像を構成することができる (図 5)。この同相写像を $\hat{\rho}$ と書くこと

にする。 $\hat{\rho}$ は自然に D_* 上の自己同相写像を引き起こす。このことについての数値計算の結果が Observation 4.1 である。この Observation は数値実験により $4 \leq n \leq 16$ で正しいことが確かめられる。

Observation 4.1

$\hat{\rho}$ は、 D_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) 上の $2\pi/(n-1)$ 回転によって与えられる。

σ を σ_0 から $\omega_n \sigma_0$ へと原点中心の円に沿って連続的に移すことにより、 $\ell_k(x) = 0$ の根の集合 (すなわち L_k) がどのように動くかを観察すればよい。まず、 $\sigma = \sigma_0$ の時には、 L_k は $1/2$ を中心とする円上に均等に分布していることを Observation 3.2 で観察した。数値計算による確認により、 σ を σ_0 から $\omega_n \sigma_0$ へと連続的に移すと、 L_k は $1/2$ を中心としておよそ $2\pi/(n-1)$ 回転した位置へと動くことが確かめられる。

5 大域モノドロミーの計算

もし $\sigma \neq 0$ かつ $\sigma \neq \infty$ ならば、 F_σ が特異ファイバーとなるのは、ある j, k が存在して、 $\sigma^n = s(j, k) = t(j)/t(k)$ が満たされる場合に限る。ただしここで $j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ である。この条件は、この k に対して $\ell_k(x) = 0$ が重根を持つ条件と必要十分である。

実際に、もし $\ell_k(x) = 0$ が重根を持つと仮定すると、

$$\begin{cases} \ell_k(x) = x^n - (x-1)^n - t(k)\sigma^n = 0 \\ \frac{d}{dx}\ell_k(x) = n(x^{n-1} - (x-1)^{n-1}) = 0 \end{cases}$$

であり、この式を計算して (Lemma 3.1 で同様の計算をおこなったので、ここでは繰り返さない)

$$t(k)\sigma^n = t(j), \quad (j \in \{1, 2, \dots, n-2\})$$

を得る。この条件は $\ell_k(x) = 0$ が重根を持つことと必要十分条件であり、かつ、 $\sigma^n = s(j, k) = t(j)/t(k)$ と必要十分の関係にある。

3 章と同様に、 $L_k = \{x \mid \ell_k(x) = 0\}$ に番号付けをする。つまり、 $L_k = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n-1}^k\}$ を

$$\begin{aligned} & \Im(x_i^k) < \Im(x_{i+1}^k) \quad \text{or} \\ & (\Im(x_i^k) = \Im(x_{i+1}^k) \quad \text{and} \quad \Re(x_i^k) < \Re(x_{i+1}^k)) \end{aligned}$$

という順序により並んでいるものとする。

今、 $s(j, k)$ は全て実数であることに注意し、 σ_0^n を始点として $s(j, k)$ を周回するような閉路 δ を図 6 に従って定義する。 $\tau = \sigma^n$ とし、 τ を $\gamma(j, k)$ に沿って動かしたときの、 L_k の動きを数値計算によって求める。そうして以下の Observation を得る。

Observation を説明するために、次のような概念を導入する。

Definition 5.1

$C^\times := P^1 - \{0, \infty\}$ とする。 n' を

$$n' = \begin{cases} n-2 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ (n-1)/2 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定める。このとき、 B_k ($k = 1, 2, \dots, n'$) を以下により定める。

$$B_k := \{(x, \sigma) \mid \sigma \in C^\times, \ell_k(x) = 0\}$$

$$B := \bigcup_{k=1}^{n'} B_k$$

ただし、Lemma 3.1(2)(3) により、 $k \neq k'$ ならば $B_k \cap B_{k'} = \emptyset$ である。 $h^b : B \rightarrow C^\times$ 、
 $h_b : B \rightarrow C$ を

$$h^b(x, \sigma) := \sigma, \quad h_b(x, \sigma) := x$$

により定める。 h^b は明らかに分岐被覆であり（分岐次数は $n'(n-1)$ である）、かつ $(h^b)^{-1}(\sigma)$ は分岐写像 h_σ の分岐点集合と一致している。 h^b の分岐点集合は $f : V_n \rightarrow P^1$ の ($\sigma \neq 0, \infty$ における) 特異ファイバーと対応している。また、 h^b の 2 重分岐点は、特異ファイバーのノードと対応している。

$C^\times$ 上で、 σ_0 を始点とし、 h^b の分岐点を途中に通らず、 h^b の分岐点のうちの一つの近傍で反時計回りに一周し、もと来た道を戻り σ_0 を終点とするような閉路 δ を一つ固定する。 δ は h^b の分岐点を通らないことから、 δ の h^b による全ての持ち上げの和集合 $\bigcup \delta$ を、 h_b で送ったもの $h_b(\bigcup \delta)$ は、 C 上の組みひも群 $B_{n'(n-1)}(C)$ の元を与える。

Ahara が [Ahara, 2001] で指摘したように、 $m > 0$ に対して、 $h_b(\bigcup \delta)$ が互いに可換な m 個の隣接置換の積と共役であるとき、その大域モノドロミーは互いに交わらない m 本の単純閉曲線に沿ったデーンねじれである。（これらの単純閉曲線は消滅曲線と呼ばれる。）組みひも群の元からデーンねじれを求める方法は [Ahara, 2001] に従うこととし、この方法で $f : V_n \rightarrow P^1$ の大域モノドロミーを求めることができる。

Definition 5.2

第 3 章で構成した閉多面体 D_* 上の単純閉曲線 c_{jk} ($j, k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$) を次のように定義する。正多角形 D_k には e_j^k と e_{j+1}^k という 2 辺があるので、この中点同士を結んで得られる線分を p_j^k とする。同様に、正多角形 D_{k+1} にも e_j^k と e_{j+1}^k という 2 辺があるので、この中点同士を結んで得られる線分を $\tilde{p}_j^k$ とする。 $p_j^k \cup \tilde{p}_j^k$ は多面体 D_* 上の単純閉曲線を構成するので、これを c_{jk} と名づける。

以下の Observation が $4 \leq n \leq 16$ において、数値計算により確かめられた。

Observation 5.3

(1) 図7のように閉路 δ' を定める。ただし、 $\bar{\sigma}$ は

$$\bar{\sigma} = s(j_1, k_1) = s(j_2, k_2) = \cdots = s(j_r, k_r)$$

であり、 $\bar{\sigma} = s(j, k)$ を満たす (j, k) の組みが全てここに現れているものとする。このとき、 σ_0 を始点終点とする閉路 δ であつて、 $\delta(t)^n = \delta'(t)$ ($t \in [0, 1]$) となるものが唯一存在し、 $h_b(\cup \delta)$ は、

$$(x_{j_1}^{k_1}, x_{j_1+1}^{k_1}), (x_{j_2}^{k_2}, x_{j_2+1}^{k_2}), \cdots, (x_{j_r}^{k_r}, x_{j_r+1}^{k_r})$$

という (組みひもとしての) 隣接置換を与える。

(2) δ に沿った大域モノドロミーは、

$$c_{j_1 k_1} \cup c_{j_2 k_2} \cup \cdots \cup c_{j_r k_r}$$

で与えられる。(3) σ を、 F_σ が特異ファイバーであり、かつ $0 \leq \arg \sigma < 2\pi/(n-1)$ であるとする。全ての特異ファイバーは $F_{\omega_n^\ell \sigma}$ の形に書き表せる。このとき、各特異ファイバー $F_{\omega_n^\ell \sigma}$ に対して、図7で決めるような自然な閉路に対して、その消滅曲線は

$$\omega_n^{-\ell} c_{j_1 k_1} \cup \omega_n^{-\ell} c_{j_2 k_2} \cup \cdots \cup \omega_n^{-\ell} c_{j_r k_r}$$

である。

図 1

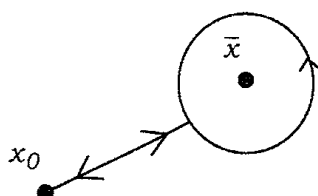


図 2

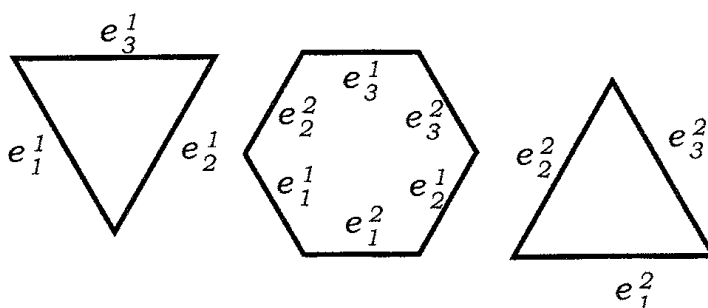


図 3a

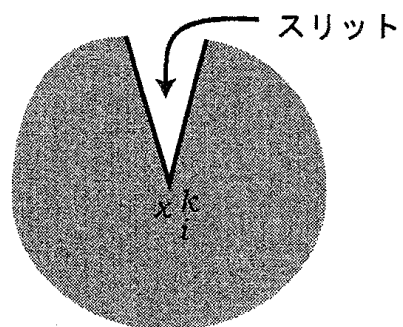


図 3b

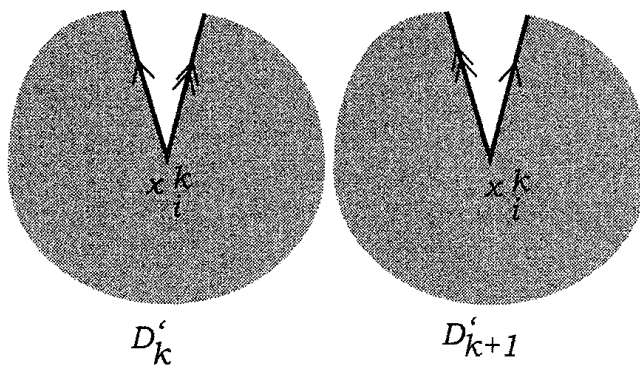


図 4

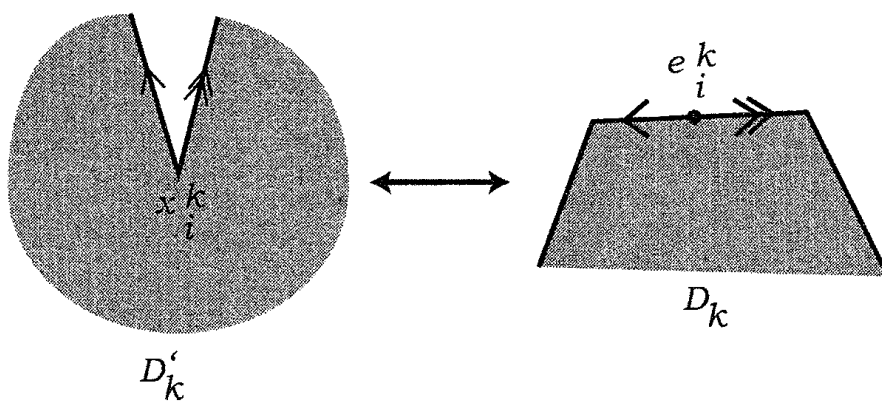


図 5

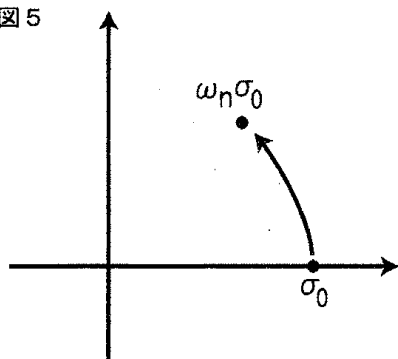


図 6

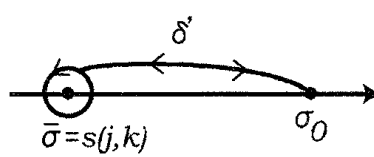
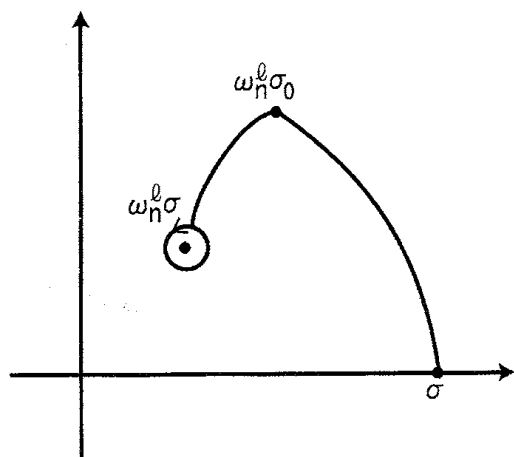


図 7



参考文献

- [Ahara, 1993] Ahara, K., On the Topology of Fermat Type Surface of Degree 5 and the Numerical Analysis of Algebraic Curves, Tokyo J. of Math., 16, (1993), 321-340.
- [Ahara, 2001] Ahara K., Monodromy Homomorphism of Fibering from Fermat Type Algebraic Surface of Degree 6, Memoir of Meiji Univ. (24) pp.31-39, (2001)
- [Ahara, 2005] Ahara K.,
<http://www.math.meiji.ac.jp/~ahara/FermatSurface.nb>
- [Matsumoto, 1994] Matsumoto, Y., On the topological structure of the Fermat surface of degree 5, Kodai Math. J. 17 (1994), 560-570.
- [Matsumoto, 2004] Matsumoto, Y., On a Fibering Structure of the Fermat Surface,
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/ttm/matsumoto.ps>

阿原一志

214-8571

川崎市多摩区東三田1-1-1

明治大学理工学部