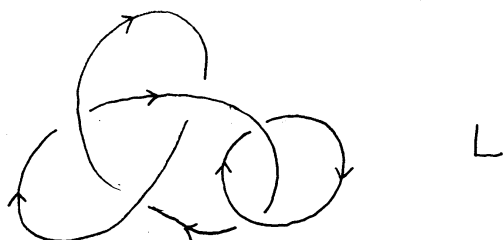


Link の closed braid 表示と Seifert circles.

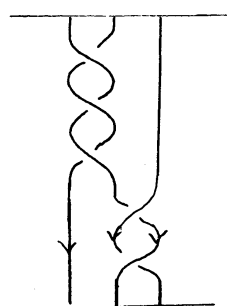
愛媛大 理

山田 修司



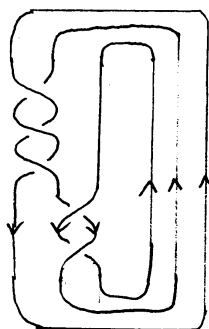
L

図 1



b

closing $\hat{}$



$\hat{b}$

上図の braid b の上下をつなぐことにより, closed braid $\hat{b}$ が得られる。これは $\mathbb{R}^3$ 内の oriented link diagram である。この link type は 上の link L と同じものである。このように、一つの link type L を closed braid で表わすことを, closed braid 表示という。

一つの link type に対して, その closed braid 表示は、一通りではない。例えば、次の closed braid $\hat{b}_1, \hat{b}_2$ はともに trivial knot O の closed braid 表示である。



図 2

b_1 は 1-string braid であり, b_2 は 2-string braid である。

link type L に対し, その closed braid 表示の string 数の最小値を braid index といい $b(L)$ で表す。

trivial knot O に対しては, $b(O) = 1$ であり, 図 1 の link L に対しては, $b(L) = 3$ である。

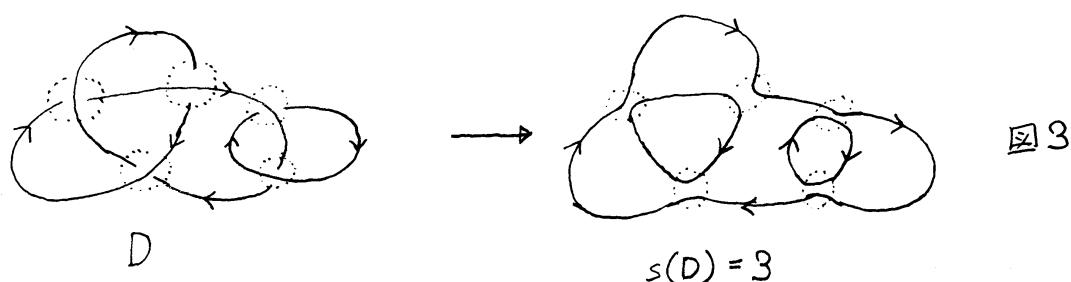
任意の oriented link type が closed braid 表示を持つことは, Alexander によって示されている [1],[2]。それは, 任意の oriented link diagram D を closed braid $\hat{b}$ に変形するアルゴリズムとして与えられている。しかしながらその $\hat{b}$ の string 数は D の link type L の braid index $b(L)$ をはるかに越えてしまう。そこで closed braid 表示の string 数を $b(L)$ に近づけるよう, アルゴリズムを改良する。

(注意 $b(L)$ に等しい string 数を持つような closed braid 表示を与えるアルゴリズムは, “Knot の triviality の判定” という未解決の問題を含んでいるので, 現在のところ 発見されていない。)

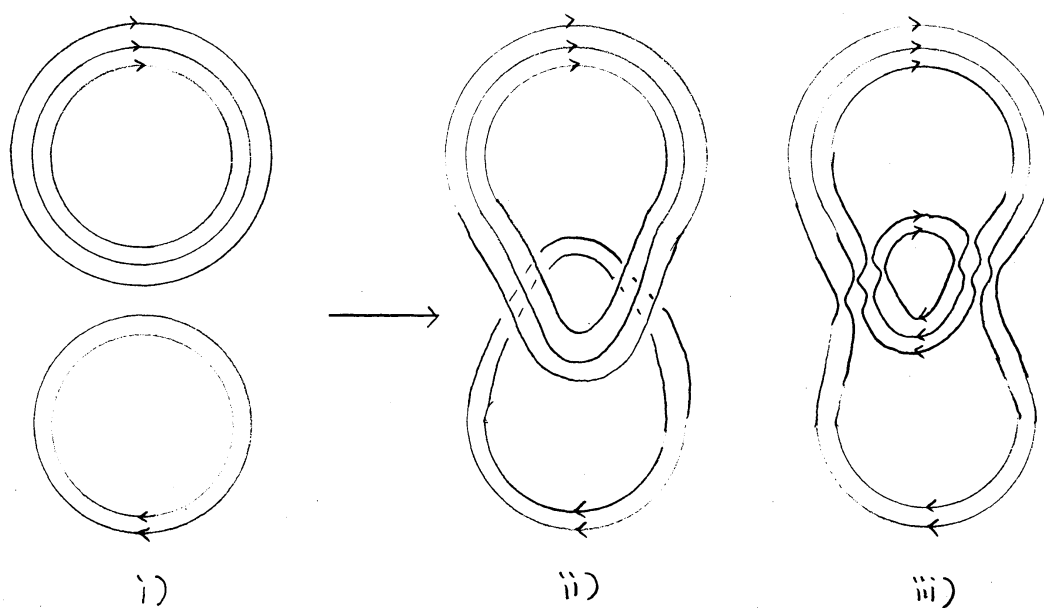
そこで、次の定理が得られた。

定理 1. 任意の oriented link diagram D は、その Seifert circles の数 $s(D)$ と等しい string 数をもつ closed braid $\hat{b}$ に regular isotopy により変形できる。

ここで、Seifert circles とは D の各 crossing を smoothing することにより得られる circles のことである。



定理 1 の証明の本質的なことは 次のことだけである。



(同心円になっていない Seifert circles i) は ii) のように regular isotopy で変形することにより, Seifert circles は iii) のように同心円となる。)

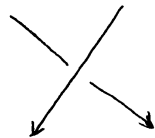
Oriented link L に対し, L を与える diagram の Seifert circles の数の最小値を $s(L)$ と表わす。closed braid $\hat{b}$ の string 数は $\hat{b}$ の Seifert circles の数に等しいことを注意すると, 定理 1 より, 次のことが得られる。

定理 2. 任意の oriented link L に対し, $b(L) = s(L)$.

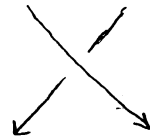
また, 定理 1 は, regular isotopy で変形させているから, diagram の twisting number (writhe) も不変とする。i.e., $w(D) = w(\hat{b})$ 。

ここで, D の twisting number とは

$$w(D) = \sum_c \text{sign}(c), \quad (c \text{ は } D \text{ の全ての crossing を動く})$$



$$\text{sign} = +1$$



$$\text{sign} = -1$$

次のような 4 つの不変量を考える

$$m(L) = \max \{ w(D) - (s(D) - 1) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram} \}$$

$$M(L) = \min \{ w(D) + (s(D) - 1) \mid \quad \quad \quad \}$$

$$m'(L) = \max \{ w(\hat{b}) - (s(\hat{b}) - 1) \mid \hat{b} \text{ は } L \text{ の closed braid 表示} \}$$

$$M'(L) = \min \{ w(\hat{b}) + (s(\hat{b}) - 1) \mid \quad \quad \quad \}$$

これらの不変量により, L の 2-variable Jones polynomial $P_L(l, m)$ [4] の l の degree が評価できることが, [3], [5], [6], に述べられている. あらわし,

$$\underline{d}(L) = \text{low deg}_l P_L(l, m), \quad \bar{d}(L) = \text{high deg}_l P_L(l, m)$$

とするとき

$$(1) \quad m(L) \leq \underline{d}(L) \leq \bar{d}(L) \leq M(L)$$

$$(2) \quad m'(L) \leq \underline{d}(L) \leq \bar{d}(L) \leq M'(L).$$

しかしながら 定理 1 より導びかれる次の系により, 上の (1), (2) の 2 つの式は本質的に同値であることがわかる。

系 任意の oriented link L に対し, $m(L) = m'(L)$, $M(L) = M'(L)$.

References

- [1] Alexander, J.W.; A lemma on system of knotted curves. Proc. Nat. Academ. Science USA, 9 93-95(1923).
- [2] Birman, J.S.; Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies; No 82, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press (1974).
- [3] Franks, J., Williams, R.F.; Braids and the Jones-Conway polynomial. (Preprint 1985).
- [4] Freyd, P., Yetter, D.; Hoste, J.; Lickorish, W.B.R., Millet, K.; Ocneanu, A.; A new polynomial invariant of knots and links. Bull. Amer. Math. Soc. 12, 239-246 (1985).
- [5] Morton, H.R.; Seifert circles and knot polynomials. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99, 107-109 (1986).
- [6] Morton, H.R.; Closed braid representations for a link, and its 2-variable polynomial. (Preprint Liverpool 1985).