

有理型多変数関数の代数的独立性と

楕円積分の周期の超越測度

Noriko HIRATA

平田典子

Institut Henri Poincaré :

11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris CEDEX 05 France

Abstract

Schneider - Lang の定理 (§1 に述べる) を用いると
共通な周期をもつある二変数関数を二つ考えた
とき、その周期の lattice の点、は algebraic
number により定義された直線を決して通らない
ことがいえる。この lattice の点と直線の
distance を下から評価したものが以下に述べる
定理の内容である。この定理により、いろいろな
超越数の transcendence measures が
得られる。

§1 Result in General case

まずことばの説明をする。

$H(\beta)$ が代数的数 β の height $\Leftrightarrow H(\beta)$ は β の minimal polynomial の係数の絶対値の最大値.

整関数 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の order $\leq p \Leftrightarrow$ ある正の実数 A, B により

$$\log \sup_{\|z\|=R} |f(z)| \leq AR^p \quad \text{for } R > B$$

となるものが存在する.

但し $\|\cdot\|$ は $\mathbb{C}^n$ のノルムとする.

有理型関数 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ の order $\leq p \Leftrightarrow$ 整関数 g, h により

$$h \neq 0, \quad g \text{ の order } \leq p \\ h \text{ の order } \leq p$$

をみたし $f = \frac{g}{h}$ と書けるものが存在する.

ここで Schneider-Lang の定理とは 次は述べられた事柄である.

Th. (Schneider-Lang, [LW1] Th. 3.3.1)

K は degree δ の代数体とし $f_1, \dots, f_h$ ($h \geq 2$) を

有理型一変数関数とし $\frac{d}{dz} f_j \in K[f_1, \dots, f_h]$ for $1 \leq j \leq h$

とみたることができる. また f_1 と f_2 はそれぞれ $\text{order} \leq p_1, p_2$ により

f_1 と f_2 は algebraically independent とする. このとき

$1 \leq j \leq h$ に対し $f_j(a) \in K$ (a は f_j の pole ではない点)

となる点 $a \in \mathbb{C}$ の個数は $\delta(p_1 + p_2)$ を越えない.

この定理によると次のようなことがわかる。

K : degree δ の代数体

$f_1, \dots, f_h$ ($h \geq 2$) は有理型二変数関数, $0 \neq$

analytic $\because i=1, 2, 1 \leq j \leq h$ に対し $\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \dots, f_h]$

をみたすとする。また f_1, f_2 は共通の周期 $0 \neq \theta = (\theta_1, \theta_2)$

をもつ周期関数 $\because f_1$ は order $\leq p_1$, f_2 は order $\leq p_2$

とする。このとき W : K 上定義された任意の直線 L とし

f_1 と f_2 の W 上 restrictions $f_1|_W, f_2|_W$ を考えたと

とし $\theta \in W$ ならば $f_1|_W(n\theta_1) = f_1(0, 0) \in K$

$f_2|_W(n\theta_1) = f_2(0, 0) \in K$

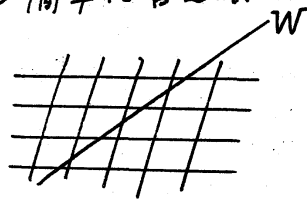
for $\forall n \in \mathbb{Z}$

となり Schneider-Lang の定理に反することになる。従って

$\theta \notin W$ ということがいえるわけである。即ち簡単に言えば

周期の lattice を考えたとすると直線

$z_2 = \beta z_1$ (β : algebraic) は



また格子点を通らないというわけである。

さてこの θ と W の距離 $\text{dist}(\theta, W)$ は 0 にならない... と言った

その大きさは具体的に測りれるのだろうか? その lower bound

を与えろのか? 次の定理がある。

Theorem

K : degree δ の代数学体

$f_1, \dots, f_h$ ($h \geq 2$) 有理型二変数関数. O -analytic.

$$\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \dots, f_h] \quad (i=1, 2, 1 \leq j \leq h),$$

$$f_j'(0) \in K \quad (1 \leq j \leq h) \quad \text{と} \quad \alpha_1 = \beta_1 \alpha_2 \text{ と } \beta_2, \quad \neq 1 =$$

f_1, f_2 はそれぞれ order $\leq p_1, p_2$ ($p_1 + p_2 \geq 2$) とする.

z degree $= \delta$, height $\leq H$ ($H \geq e$) なる任意の

$\beta \in K$ に対し $f_1(z, \beta z)$ と $f_2(z, \beta z)$ は algebraically independent over K ならば 次のような effective

constant $c > 0$ として $\beta = \text{independent}$ ならば β_1, β_2 として :

$$\log |\theta_2 - \beta \theta_1| > -c |\theta_1|^{p_1+p_2} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(|\theta_1| + 1))^{p_1+p_2-1}$$

これは θ_1 の $\text{dist}(\theta, W)$ の effective lower bound を得ることに

わけである。この定理の意味は 次の系と見るとよくわかる。

§ 2 Results in Special case

Notations $\overline{\mathbb{Q}}$: 有理数体 $\mathbb{Q}$ の algebraic closure in $\mathbb{C}$

Λ : $\mathbb{C}$ の lattice with invariants $g_2, g_3 \in \overline{\mathbb{Q}}$

$\sigma, \zeta, \wp$: Weierstrass の σ 関数, ζ 関数,

$\wp$ 関数, associated with Λ .

$$\eta = \zeta(z+w) - \zeta(z) \quad \text{for } w \in \Lambda, |w| \geq 1.$$

u : 適当な $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ に対し $nu \notin \Lambda$ となり

$\exists \tau = \mathcal{P}(u) \in \overline{\mathbb{Q}}$ とおき、 $\tau \in \mathbb{C}$ の点とある。

上記の記号の下に次のような transcendence measures を与えよう。

Corollary 1

degree = δ , height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての

algebraic number β に対し次を T として effective constant

$c_1 > 0$ が存在する:

$$\log \left| \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u - \beta \right| > -c_1 (\delta \log \delta + \log H)^3$$

この $\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega} u$ は第三種楕円積分の周期で、その超越性は最近

Chudnovsky ([C]) により得られた。transcendence

measure は知られていない。ことに注意。

Corollary 2

degree = δ , height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての

algebraic number β に対し次を T として effective constant

$c_2 > 0$ が存在する:

$$\log \left| \frac{\eta}{\omega} - \beta \right| > -c_2 (\delta \log \delta + \log H)^3$$

実際には定理の証明を見直すことにより 次のような改良が得られる:

$$\log \left| \frac{\eta}{\omega} - \beta \right| > -c_2' \delta (\log H \log \log H + \delta^2 (\log \delta)^3)$$

この $\frac{\eta}{\omega}$ の超越性は Schneider-Lang の定理により得られ, transcendence measure は Reyssat ([R]) により与えられているが, 上の結果はこれよりも強い.

Corollary 3

degree = δ . height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての algebraic number β に対して 次をみたす effective constant $c_3 > 0$ が存在する:

$$\log \left| \frac{\pi}{\omega} - \beta \right| > -c_3 (\delta \log \delta + \log H)^2$$

Corollary 4

Λ_1, Λ_2 は $\mathbb{C}$ の lattices とし, それぞれ Λ_i に対して g_{2i}, g_{3i} は algebraic invariants ととることができる ($i=1, 2$). $|\omega_i| \geq 1$ なる $\omega_i \in \Lambda_i$ ($i=1, 2$) をとり, degree = δ , height $\leq H$ ($H \geq e$ とする) なる全ての algebraic number β に対して $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \beta$ ならば 次をみたす effective constant $c_4 > 0$ が存在する:

$$\log \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \beta \right| > -C_4 (\delta \log \delta + \log H)^3$$

Corollary 4 に従って, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ が β と異なる algebraic number であることも成立 (Liouville の定理より明らか).

Corollary 4 の評価は [B-M 1] にアウンスされている

結果 (証明なし) と同じで, [Y] に示されている

評価とは比較ができて, (場合により より良くもより悪くもある).

§ 3 Key Lemma for the proof of the theorem

以上の結果の詳しい証明は近々 publish の予定であるが,

ここでは定理の証明のための Key Lemma の statement のみを述べる.

Lemma

K : degree δ の代数体

$$W: z_{n+1} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} z_i \quad (\beta_{ij} \in K)$$

と定義とし: $\mathbb{C}^d$ の vector subspace.

(d, n は $d \geq 2, 1 \leq n < d$ なる自然数, $1 \leq i \leq d-n, 1 \leq j \leq n$)

$f_1, \dots, f_h: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ なる有理型関数 ($h \geq d \geq 2$)

O analytic とし

$\frac{\partial}{\partial z_i} f_j \in K[f_1, \dots, f_h] \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq h)$ とおくとする.

$f_1, \dots, f_d$ 互不相同 order $\leq p_1, \dots, p_d$

$(p_1 + \dots + p_d \geq d \quad \text{とある})$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \neq 0$ は共通周期とある周期関数

$f_j = f_j(0) \in K \quad (1 \leq j \leq d) \quad \text{とある}$

ε と $\theta \notin W$'s' 次 ε 次 ε effective constants

$c_6, c_7 > 0 \quad \text{と polynomial } P \in \mathcal{O}_K[X_1, \dots, X_d]$

or $\theta \in W$:

$$\delta = \max_{1 \leq i \leq d-n} \left| \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \theta_j - \theta_{n+i} \right| \neq 0$$

$$\text{if } \delta \leq -c_5 \cdot U \quad \text{or } c_5 > 0$$

or $\theta \in W$'s' 次

$$\deg_{X_j} P \leq c_6 \cdot L_j \quad (1 \leq j \leq d)$$

$$\text{and } \text{Ord}_{z=0} P(f_1/w, \dots, f_d/w) \geq c_7 \cdot T \quad \text{とある}$$

$$\text{if } H = \max_{\substack{1 \leq i \leq d-n \\ 1 \leq j \leq n}} (1 - |\beta_{ij}|, \varepsilon)$$

$$U = 10^{\frac{p_1 + \dots + p_d}{d-n}} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(10|+1)) \frac{p_1 + \dots + p_d - n}{d-n}$$

$$T = 10^{\frac{p_1 + \dots + p_d}{d-n}} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(10|+1)) \frac{p_1 + \dots + p_d - d}{d-n}$$

$$L_j = 10^{\frac{p_1 + \dots + p_d}{d-n} - p_j} (\log H + \delta \log \delta + \delta \log(10|+1)) \frac{p_1 + \dots + p_d - n - p_j}{d-n} \quad (1 \leq j \leq d) \quad \text{とある}$$

§ 4 Nullstellensatz

定理の証明には次の形の Nullstellensatz を用いることがよくある。

Th. (Brownawell - Masser)

$f_1, \dots, f_h$ ($h \geq 2$) 一変数関数, $0 \neq f_i$ 且つ

$$\frac{d}{dz} f_j \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_h] \quad (1 \leq j \leq h) \quad \text{と仮定する。}$$

このとき $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_h]$ に対し

$$P(f_1, \dots, f_h) \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\text{Ord}_{z=0} P(f_1, \dots, f_h) \leq c \cdot D^{2^h}$$

但し D は P の degree

c は P に independent な constant

この Nullstellensatz は 最近 次の改良を得た。

Th. (Neesterenko)

上と同じ situations において

$$\text{Ord}_{z=0} P(f_1, \dots, f_h) \leq c \cdot D^h$$

Neesterenko の定理については アナウンス のみで 証明は未発表である

が この exponent の 改良は 本質的なものがあり transcendence method による いろいろな結果と 改良可能 であるといわれている。多変数において

この exponent の best possible となる 評価を得る ことが当面の問題である。

§5 最後

transcendence method というのは今迄超越数論の113.113.15
証明に用いられている手法をひくちめて呼んだものであつた。特色が
多く、代数的数と扱う問題に対しては、今まで何ら解決の
糸口がみられなかったものであつた。この transcendence method
は応用できるという例がいくつかある。日本では1つとしか
知られていないので、いふかと思う。Leopoldt's conjecture
のある特殊な場合の解決 (1986. M. Laurent)
や Lehmer's problem の解決 (1986. M. Langevin)
などがこれである。1990年の Bombieri の代数点に関する
仕事、調和解析、代数群、などを用いた超越
数論の研究は、整数論の中で一分野を確立し、
世界では常識的レベルとなりつつある内容をも
つて、いふに足る。日本では特殊な問題のよう
に扱われているのは残念でならない。

Références

- [B-M 1] Brownawell, W.D. and Masser, D.W. -Multiplicity estimates for analytic functions I, J.Reine Angew. Math. 314 (1980) p 200-216.
- [B-M 2] Brownawell, W.D. and Masser, D.W. -Multiplicity estimates for analytic functions II, Duke Math. Journal 47, No.2 (1980) p 273-295.
- [C] Chudnovsky, G.V. -Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions, Proc. Int. Congress of Math., Helsinki (1978).
- [H] Hirata, N. -Approximation de périodes de fonctions méromorphes, preprint.
- [R] Reyssat, E. -Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle, Bull. Soc. Math. France 108 (1980) p 47-79.
- [S] Schneider, Th. -Introduction aux nombres transcendants, Grundlehren der Mat. Wiss.81, Springer-Verlag (1957), Gauthier-Villars (1959).
- [W 1] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants, Lecture Notes in Math. 402, Springer-Verlag (1974).
- [W 2] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque 69-70 (1979).
- [W 3] Waldschmidt, M. -Nombres transcendants et fonctions sigma de Weierstrass, C.R.Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979) p 111-114.
- [Y] Yu, K. -Linear forms in elliptic logarithms, J. Number Theory 20 (1985) p1-69.