

a priori distribution についての情報が
ある場合の *inadmissibility* について.

大崎 紘一 (岡大工)

§1. 序.

$X, (H)$, どちらも確率変数で直線上に分布しており

$$P(X \leq t / (H) = \theta) = \int_{-\infty}^t f(x, \theta) dx$$

$$f(x, \theta) = 1/\sqrt{2n\pi} \exp(-(x - n\theta)^2/2n)$$

$v: (H)$ に関して直線上の *a priori* 累積分布関数

$$L((H), a) = (a - (H))^2 : \text{損失関数}$$

v に関する情報としては次の δ の δ を考える.

$$\text{for } \forall \delta > 0, 0 < \alpha < 1, \text{ for fixed } \delta > 0.$$

$$M(\delta, \alpha) = \{ v / v(\delta) - v(\delta - \alpha) \geq 1 - \alpha \}$$

この $M(\delta, \alpha)$ 内の任意の v に関して, (H) の不偏推定量

x/n より一様に良い推定量が存在して.

$$E_v(\bar{y} - (H))^2 < E_v(x/n - (H))^2 \text{ for all } v \in M(\delta, \alpha)$$

とされる。すなわち, x/n が (H) に対して *admissible* な推定量で

なされる。

§2. §1 について.

$P(X \leq t / (H) = \theta)$ と $f(x, \theta)$ の定理より.

$$P_v(X \leq t) = E_v(P(X \leq t / (H) = \theta)) = \int_{-\infty}^t E_v(f(x, \theta)) dx.$$

種々の x に対して, 次の式を満たす $v_x \in M(\delta, \alpha)$ を選ぶ。

$$E_{v_x}(f(x, \Theta)) \geq E_v(f(x, \Theta)) \text{ for all } v \in \mathcal{M}(\delta, d) \dots \textcircled{1}$$

$f(x, \cdot)$ は x/n で最大値をとり、その両側で単調である。

$$P_{v_x}(\Theta = x/n) = d, \quad P_{v_x}(\Theta = \delta \operatorname{sig} x) = 1-d, \quad |x| > n\delta$$

$$P_{v_x}(\Theta = x/n) = 1 \quad |x| \leq n\delta$$

v_x 以上の様に定義すれば $v_x \in \mathcal{M}(\delta, d)$ で、 $\textcircled{1}$ 式を満足す。

次に $P_{v_x}(\Theta = \theta / x = x) = P_{v_x}(\Theta = \theta) f(x, \theta) / E_{v_x}(f(x, \theta))$ を最大にする θ の推定量を求めそれを $\hat{\theta}_{\delta d}$ とする。

v_x の定義の仕方より、右辺の分子は

$$\begin{aligned} |x| > n\delta & \quad P_{v_x}(\Theta = \theta) f(x, \theta) = \begin{cases} d f(x, \frac{x}{n}) & \theta = x/n \\ (1-d) f(x, \delta \operatorname{sig} x) & \theta = \delta \operatorname{sig} x \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \\ |x| \leq n\delta & \quad P_{v_x}(\Theta = \theta) f(x, \theta) = \begin{cases} f(x, \frac{x}{n}) & \theta = x/n \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。 $\delta > 0$ $\eta(x, \delta) = f(x, x/n) / f(x, \delta \operatorname{sig} x)$ と置く。

$\eta(x, \delta)$ が $1-d/d$ より大きいのか小さいかに依り $\hat{\theta}_{\delta d}$ は次の様に決まる。

$$\hat{\theta}_{\delta d} = \begin{cases} \delta \operatorname{sig} x & n\delta \leq |x| \leq n\delta + (2n \log 1/d/d)^{\frac{1}{2}} \\ x/n & \text{その他} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < d < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < d < 1 \end{cases}$$

さらに、 ζ_r $r > 0$ を次のごとく定義する。

$$\zeta_r(x) = \begin{cases} \delta \operatorname{sig} x & n\delta \leq |x| \leq n(\delta + r) \\ x/n & \text{その他} \end{cases}$$

$$\therefore \quad d = 1/(1 + \exp \frac{nr^2}{2}) \quad \text{で } r > 0 \text{ に対し } \zeta_r(x) = \hat{\theta}_{\delta d}$$

§3 x/n の inadmissibility について

$$E_v(\xi_r - \Theta)^2 - E_v(x/n - \Theta)^2 = E_v(H_r(\Theta)) \quad (2)$$

for all $v \in \mathcal{M}(\delta, \alpha)$

とおく。 $\Theta = \theta$ と固定すれば

$$H_r(\theta) = h_r(\theta) + h_r(-\theta)$$

$$\text{但し } h_r(\theta) = 1/\sqrt{2\pi n} \int_{\delta}^{n(\delta+r)} (\delta - x/n)(\delta + \frac{x}{n} - 2\theta) \bar{e}^{-\frac{(x-n\theta)^2}{2}} dx$$

とすれば $H_r(\theta)$ は次の条件を満たす。

$$(1) H_r(\theta) = H_r(-\theta)$$

(2) for every $r > 0$, $|\theta| < \delta$ ならば

$$H_r(\theta) < 0$$

(3) $|\theta| > \delta$ で θ が十分大きければ

$$H_r(\theta) > 0 \text{ 又 } H_r(\theta) \rightarrow 0 \text{ as } \theta \rightarrow \infty$$

$$\text{これより } H_r(\theta) = \sqrt{2n/\pi} \int_{\delta}^{\delta+r} (\delta - x) \left\{ (\delta + x) \cosh nx\theta - 2\theta \sinh nx\theta \right\} \\ \times \exp\{-n^2(x^2 + \delta^2)/2\} \cdot dx$$

となる事より示される。

$$\text{以上により } E_v(H_r(\Theta)) = \int_{|\Theta| > \delta} H_r(\Theta) dV(\Theta) + \int_{|\Theta| < \delta} H_r(\Theta) dV(\Theta)$$

$$\leq \max_{|\theta| > \delta} H_r(\theta) \cdot \alpha + (1-\alpha) \max_{|\theta| < \delta} H_r(\theta)$$

$$= \max_{|\theta| < \delta} H_r(\theta) + \alpha (\max_{|\theta| > \delta} H_r(\theta) - \max_{|\theta| < \delta} H_r(\theta))$$

$$\text{よって } \alpha > 0 \text{ を十分小さくとすれば } E_v(H_r(\Theta)) < 0 \quad (3)$$

(2), (3) 式より

$$E_v(\xi_v - \Theta)^2 - E_v(x/n - \Theta)^2 < 0 \quad \text{for all } v \in \mathcal{M}(\delta, \alpha)$$

故に $\mathcal{M}(\delta, \alpha)$ に関して, x/n よりも一様に良い推定量 ξ_v が存在する事がわかった。

さらに v のとり方に依り 次の事がわかる。 δ が与えられた時の v の値を v_0 , 任意に2つの $v_1, v_2 \in 0 < v_1 < v_2 \leq v_0$ ととれば,

$$E_v(\xi_{v_2} - \Theta)^2 - E_v(\xi_{v_1} - \Theta)^2 = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \int_{\delta+v_1}^{\delta+v_2} dv(\Theta) \int_{\delta-x}^{\delta+x} \{(\delta+x) \cosh nx(\Theta) - 2\Theta \sinh nx(\Theta)\} e^{-\frac{n^2(x^2+\Theta^2)}{2}} dx$$

となり, 許容でない事を示したと同様にして,

$$E_v(\xi_{v_2} - \Theta)^2 - E_v(\xi_{v_1} - \Theta)^2 < 0 \quad \text{for all } v \in \mathcal{M}(\delta, \alpha)$$

よって, $\xi_{v_2}(x)$ の方が $\mathcal{M}(\delta, \alpha)$ に関して, $\xi_{v_1}(x)$ よりも一様に良い推定量になる。だから, $\xi_{v_0} = \hat{\theta}_{\delta, \alpha}(x)$ が $\mathcal{M}(\delta, \alpha)$ に関して最も良い推定量と断言できる。

又 $f(x, \theta) = n C_x \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ の場合についても同様の事が言える。この場合は離散型であるから, ξ_j は次の様に定義出来る。

$$\xi_j(x) = \begin{cases} \delta & j \leq x \leq b \\ 1-\delta & n-b \leq x \leq n-j \\ x/n & \text{その他} \end{cases}$$

Reference.

H. Skibinsky and L. Cote: "On the inadmissibility of some standard estimates in the presence of prior information"; *Annals of Math., Stat.*, (1963) Vol. 34, P539-P548