

重複率行列の台と (0,1)-行列の定める複体について.

青山学院大 理工 岩堀 信子

序.

この報告の前半は, 組合せ解析 (combinatorial analysis) における "結婚定理" のいわば解析的な別証明と与えることを目標とする. そのために導入された概念 (D-対称性と超連結性) から, 自然に後半の主題である $m \times n$ 型の (0,1)-行列 A, B の間の 1 つの同値関係: " $A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} PAQ = B$ と満たす置換行列 P, Q が存在する" が考えられる. この同値性の判定条件として, 重複率と考える複体 $\mathfrak{c}_A$ と A から作り, $A \sim B \iff \mathfrak{c}_A \cong \mathfrak{c}_B$ と示す. その応用として, 成分の総和が $2n+1$ であるような $n \times n$ 型の超連結な (0,1)-行列の同値類の個数を求めてみる.

§1. 準備概念. D-対称と超連結性.

有限集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ と考え, Ω の部分集合全体のなす族を 2^Ω と書く. 又, 集合 S の濃度を $|S|$ と書く. $\Omega^2 =$

$\Omega \times \Omega$ の部分集合 G に対し, $2^\Omega \times 2^\Omega$ の部分集合 $D(G)$ と

$$D(G) = \{(L, M) \in 2^\Omega \times 2^\Omega; \emptyset \neq L \subsetneq \Omega, \emptyset \neq M \subsetneq \Omega, (L \times M) \cap G = \emptyset\}$$

で定義する. $D(G)$ と G の 不連続化系 と呼ぶ. そして,

$$d(G) = \max_{(L, M) \in D(G)} \{|L| + |M|\}$$

とおく. ($D(G) = \emptyset$ なら $d(G) = 0$ とおく.)

定義 1. Ω^2 の部分集合 G が $d(G) < |\Omega|$ を満たすとき G と超連結 (*super-connected*) といい. (このグラフ的意味は定理 7 参照.)

定義 2. Ω^2 の部分集合 G が D -対称とは, $(L, M) \in D(G)$, $|L| + |M| = |\Omega|$ なる (L, M) に対し, $(L^c, M^c) \in D(G)$ となること. (ただし L^c は L の補集合: $L^c = \Omega - L$).

補題 1. Ω^2 中の D -対称集合 G ($G \neq \emptyset$) は, 各 $j \in \Omega$ に対し $G \cap (\{j\} \times \Omega) \neq \emptyset$, $G \cap (\Omega \times \{j\}) \neq \emptyset$ と満たす.

(証) 容易につき略.

以下, n 次の行列 $A = (a_{ij})$ に対し

$$\text{Supp}(A) = \{(i, j) \in \Omega^2; a_{ij} \neq 0\}$$

で定義される Ω^2 の部分集合 $\text{Supp}(A)$ を, A の台 (support) と呼ぶ. n 次 $(0, 1)$ -行列 (成分が 0 か 1 の行列) の全体を $\mathcal{X}_n$ とし, 写像 $\varphi: \mathcal{X}_n \rightarrow 2^{(\Omega \times \Omega)}$ を, $\varphi(A) = \text{Supp}(A)$ で定義

すれば, φ は全単射である. φ により, $\mathcal{K}_n$ と $2^{(\Omega \times \Omega)}$ と同一視し, $(0,1)$ -行列についても, D -対称性 & 超連結性を定義する.

補題 2. $A \in \mathcal{K}_n$, $A \neq 0$ とする. A が D -対称ならば, n 次置換行列 P, Q が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_r \end{array} \right) ; A_1, \dots, A_r \text{ は超連結.}$$

となる.

(証) A が超連結でないなら, $G = \text{Supp}(A)$ とおくと, $(L, M) \in D(G)$ が存在して $|L| + |M| \geq n$ となる. L または M を適当な部分集合でおきかえて, $|L| + |M| = n$ としよ. すると, $(L^c, M^c) \in D(G)$ となるから, 置換行列 P_1, Q_1 が存在して,

$$P_1 A Q_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \\ \hline \end{array}$$

となる. 補題 1 より $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$. しかも B_1, B_2 も D -対称となることが容易にわかる. ようてこの手続きをくり返せばよい (終)

§ 2. 非負行列の重確率行列化.

n 次行列 $D = (d_{ij})$ において, $d_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, \dots, n$), $\sum_i d_{ij}$

$=1$, $\sum_j d_{ij}=1$ ($i, j=1, \dots, n$) が成り立つとき, D は重確率行列 (doubly stochastic matrix) といふ。

定理 1. (R. Sinkhorn [1]) n 次行列 $T=(t_{ij})$ のどの成分も正ならば, 正数と成分とする対角行列 $A=\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ と $B=\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ が存在して, $\sum_i a_i=1$, かつ ATB は重確率行列となる。

(証) (古屋) $\mathbb{R}^n$ 中のコンパクト凸集合

$$K = \{ (x_1, \dots, x_n) ; x_i \geq 0, i=1, \dots, n, \sum x_i=1 \}$$

を考える。連続写像 $\varphi: K \rightarrow K$ と次のように定義する:

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

ただし, $\eta_i = (\sum_j \xi_j)^{-1} \xi_i$, $\xi_i = (\sum_j t_{ij} p_j)^{-1}$, $p_j = (\sum_i \xi_i t_{ij})^{-1}$ ($i, j=1, \dots, n$). すると φ の不動点 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ が存在する。

$$A = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad B = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$$

が求めるものである。(終)

定理 2. (R. Sinkhorn [2]) n 次行列 $T=(t_{ij})$ のどの成分も 0 か正とする。このとき, $\text{Supp}(T)$ が Ω^2 の空でない D -対称な部分集合なら, 正数と成分とする対角行列 $A=\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ と $B=\text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ が存在して, $\sum a_i=1$, かつ ATB は重確率行列となる。

(証) (新納) 補題 2 により, $\text{Supp}(T)$ が超連続としてよい。成分がすべて 1 の n 次行列を F とし, $T^{(m)} = (t_{ij}^{(m)}) = T + \frac{1}{m}F$

に定理1を用いて, 正の成分をもつ対角行列 $A^{(m)} = \text{diag}(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})$, $B^{(m)} = \text{diag}(b_1^{(m)}, \dots, b_n^{(m)})$ を見出し, $\sum a_i^{(m)} = 1$, $A^{(m)} T^{(m)} B^{(m)}$ を重確率行列なすしめる. $\{m\}$ と必要に応じて部分列に置きかえて, $\{a_i^{(m)}\}$, $\{b_i^{(m)}\}$, $\{a_i^{(m)} t_{ij}^{(m)} b_j^{(m)}\}$ がすべて (有限又は $+\infty$ の) 極限值 (それぞれ a_i , b_i , ρ_{ij} とする.) をもつとしてよい.

$I = \{i \in \Omega; a_i > 0\}$, $J = \{j \in \Omega; b_j = +\infty\}$ とおくと, $(I \times J) \cap \text{Supp}(T) = \emptyset$ がわかる. 又 $(I^c \times J^c) \cap \text{Supp}(S) = \emptyset$ もわかる. (ただし, $S = (\rho_{ij})$ とする.) よって,

$$n - |J| = |J^c| = \sum_{j \in J^c} \sum_{i \in \Omega} \rho_{ij} = \sum_{j \in J^c} \sum_{i \in I} \rho_{ij} \leq \sum_{j \in \Omega} \sum_{i \in I} \rho_{ij} = |I|$$

即ち, $|I| + |J| \geq n$. これと $\text{Supp}(T)$ の超連結性から, $I = \Omega$, $J = \emptyset$ がわかるから, $0 < a_i < +\infty$, $0 \leq b_i < +\infty$ ($i=1, \dots, n$) と得る. 又 $b_j = 0$ なる j があれば, $\rho_{ij} = a_i t_{ij} b_j = 0$ ($i=1, \dots, n$) となり, $\sum_i \rho_{ij} = 1$ に反する. (終).

§3. 結婚定理の証明.

定理3. (Birkhoff-von-Neumann) n 次重確率行列 D は, いくつかの置換行列 $P_1, \dots, P_r$ の凸1次結合である.

(証) (新点内) Krein-Milman の定理により, n 次重確率行列の全体がなすコンパクト凸集合を K とするとき, K の端点 (極点) は置換行列に限ることと言えばよい. これについては, 数理科学, 昭和44年9月号 27頁を見ればよい. (終)

定理4. (結婚定理) Ω^2 の部分集合 G に対し,

$$d^*(G) = \text{Max} \{ |I| + |J| ; \emptyset \subsetneq I \subsetneq \Omega, \emptyset \subsetneq J \subsetneq \Omega, (I \times J) \cap G = \emptyset \}$$

とおく。すると、全写射 $f: \Omega \rightarrow \Omega$ で $(i, f(i)) \in G$ ($i=1, \dots, n$) と満たすものが (所謂 G -matching) が存在するものの必要十分条件は、 $d^*(G) \leq |\Omega|$ である。

(注意) Ω の部分集合 I に対し、 $I^* = \{j \in \Omega ; (i, j) \in G \text{ for some } i \in I\}$ とおくと、結婚定理の普通の形は、

$$G\text{-matching の存在} \iff |I^*| \geq |I|, \quad \forall I \in 2^\Omega$$

である。右辺の条件は $d^*(G) \leq |\Omega|$ と同値であることは容易。

(証). $d^*(G) \leq |\Omega|$ の必要性は上の注意から明らか。十分性については帰納法を示そう。 $d^*(G) \leq |\Omega|$ から、 $n \leq 2$ のときは、 G -matching の存在が直ちにわかる。よって、 $d^*(G) \leq |\Omega|$, $n > 2$ とする。まず $d^*(G) < n$ なら、 $d(G) < n$ となり G は超連結。よって $G = \text{Supp}(T)$ なる重確率行列 T がある (定理 2)。 $T = \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_r P_r$, $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_r > 0$, $\sum \alpha_i = 1$, $P_1, \dots, P_r$ は置換行列、と表わせば、 P_i に対応する置換は G -matching である。次に $d^*(G) = n$ とする。このとき $(I, J) \in D(G)$ が存在して、 $|I| + |J| = n$ となる。よって、 G に対応する $(0, 1)$ -行列 A の両側に置換行列 P, Q を適当に掛ければ、

$$PAQ = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \overset{p}{\text{---}} & \overset{q}{\text{---}} \\ \hline A_1 & 0 \\ \hline * & A_2 \end{array} & \end{array} \quad p = |I|, \quad q = |J|$$

の形になり、かつ $d^*(A_1) \leq p$, $d^*(A_2) \leq q$ となる。よって、

帰納法が便え, A_1, A_2 中に p 次, q 次の置換行列 X, Y が存在する. (i.e. $\text{Supp}(A_1) \supset \text{Supp}(X), \text{Supp}(A_2) \supset \text{Supp}(Y)$) これを合せて G -matching が存在がわかる (終).

系. Ω^2 の部分集合 G が $d^*(G) < n$ を満たせば, G の各元 (i, j) に対し $f(i) = j$ を満たす G -matching が存在する.

(証) $\Omega_1 = \Omega - \{i\}, \Omega_2 = \Omega - \{j\}$ とし, Ω_1 の部分集合 J に対し $J^* = \{g \in \Omega_2; (p, g) \in G \text{ for some } p \in J\}$ が $|J^*| \geq |J|$ を満たすことが直ぐわかる. よって, $\Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ なる G -matching が存在する. これと $i \rightarrow j$ を合わせればよい. (終).

定理 5. n 次の $(0, 1)$ -行列 A に対し, 次の条件は互いに同値である.

- (i) $\text{Supp}(T) = \text{Supp}(A)$ なる重確率行列 T が存在する.
- (ii) A は D -対称.
- (iii) 置換行列 $P_1, \dots, P_r$ が存在して $\text{Supp}(A) = \bigcup_{i=1}^r \text{Supp}(P_i)$.
- (iv) 置換行列 P, Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}, \quad A_1, \dots, A_r \text{ は正定対称.}$$

(証) (i) $\Rightarrow$ (ii): $\emptyset \neq I \subset \Omega, \emptyset \neq J \subset \Omega$, かつ $t_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in I \times J$

$|I| + |J| = n$ とすれば,

$$0 = n - |J| - |I| = |J^c| - |I| = \sum_{p \in \Omega} \sum_{g \in J^c} t_{pg} - \sum_{p \in I} \sum_{g \in \Omega} t_{pg}$$

$$= \sum_{p \in I^c} \sum_{q \in J^c} t_{pq} + \sum_{p \in I} \sum_{q \in J^c} t_{pq} - \sum_{p \in I} \sum_{q \in J} t_{pq} = \sum_{p \in I^c} \sum_{q \in J^c} t_{pq}.$$

$\therefore (I^c, J^c) \in D(\text{Supp}(A))$. よって A は D -対称.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): 補題 2. (iv) $\Rightarrow$ (iii): 定理 4 の系, (iii) $\Rightarrow$ (i): $T = \frac{1}{r}(P_1 + \cdots + P_r)$ は求める確率行列となる.

§ 4. $m \times n$ 型 $(0,1)$ -行列の定める複体.

定義 3. $m \times n$ 型 $(0,1)$ -行列の全体を $\mathcal{K}_{m,n}$ とする. $\mathcal{K}_{m,n}$ の 2 元 A, B に対し, $A \sim B \iff$ 置換行列 P, Q が存在して, $PAQ = B$.

定義 4. V は有限集合とする. 2^V の部分集合 Δ と V との対 (Δ, V) が頂点集合 V 上の複体とは, (i) $\Delta \ni X$, $X \supset Y \Rightarrow Y \in \Delta$, (ii) $\Delta \ni \emptyset$, $\forall v \in V$ と満たすことという.

複体 (Δ, V) において Δ から負でない整数の集合への写像 μ があって, $X \supset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$ と満たすとき, μ は (Δ, V) 上の重複度関数といい, $\mu(\emptyset)$ を最大重複度と呼ぶことにする. 複体 (Δ, V) とその上の重複度関数 μ とを合わせた概念 $(\Delta, V; \mu)$ を重複度をもった複体という.

定義 5. 重複度をもった 2 つの複体 $(\Delta_i, V_i; \mu_i)$ ($i=1,2$) が同型 (記号 $(\Delta_1, V_1; \mu_1) \cong (\Delta_2, V_2; \mu_2)$) とは, V_1 から V_2 への全単射 f が存在して, f のひきおこす

写像 $f_*: 2^{V_1} \rightarrow 2^{V_2}$ が $f_*(\Delta_1) = \Delta_2$ を満たし、かつ、 $\forall A \in \Delta_1$ に対し $\mu_1(A) = \mu_2(f_*(A))$ が成り立つことといふ。

さて、 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{K}_{m,n}$ に対し、次のように重複をもった複体 $(\Delta_A, V_A; \mu_A)$ と対応させる。 $\Omega = \{1, \dots, n\}$ とし、 m 個の写像 $\tilde{\mu}_A: 2^\Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ を次のように定義する： Ω の部分集合 J に対し、 $J = \emptyset$ なら、 $\tilde{\mu}_A(J) = m$ とし、 $J \neq \emptyset$ なら、 $\prod_{j \in J} a_{ij} = 1$ となる i の個数を $\tilde{\mu}_A(J)$ とおく。そして、

$$\Delta_A = \{J \in 2^\Omega; \tilde{\mu}_A(J) > 0\}$$

$$V_A = \{j \in \Omega; \tilde{\mu}_A(\{j\}) > 0\}$$

とおく。最後に $\tilde{\mu}_A$ を Δ_A に制限した写像を μ_A とおく。

定理 6. $A, B \in \mathcal{K}_{m,n}$ に対し、 $A \sim B$ なるための必要十分条件は、 $(\Delta_A, V_A; \mu_A) \cong (\Delta_B, V_B; \mu_B)$ である。

(証) 略。

定理 6 を利用して、例えば次のような問題を解くことができる。 n 次 $(0,1)$ -行列で超連結、かつ 0 でない成分の個数が $2n+1$ なるものの全体の集合を $\mathcal{M}$ とし、 $\mathcal{M}$ と上の $\sim$ で同値類に分割する。 $\mathcal{M}$ はいくつの同値類に分れるか？ 答. $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

§ 5. 付記。

定理 7. n 次 $(0,1)$ -行列 A について、次は互いに同値である。

(i) A は超連結

(ii) 任意の置換行列 P, Q に対して, PAQ の定める有向グラフは強連結 (strongly connected) である.

(iii) $\text{Supp}(A) \supset \text{Supp}(P)$ を満たす置換行列 P の全体の集合を $\mathcal{P}(A)$ とおくと, $\{PQ^{-1}; P, Q \in \mathcal{P}(A)\}$ が生成する $\mathbb{G}_n$ (n 次対称群) の部分群は $\{1, \dots, n\}$ 上に可移的である.

定理 7 と定理 4 の系により, 次の手続きにより, n 次の超連結な $(0,1)$ -行列がすべて求められることがわかる: (i) $\{1, \dots, n\}$ 上に可移的な $\mathbb{G}_n$ の部分群 $\mathcal{O}$ を任意に 1 つとる. (ii) $\mathcal{O}$ の生成系 $\mathcal{O}_1$ (≥ 1) を任意に定める. (iii) $\text{Supp}(A) = \bigcup_{P \in \mathcal{O}} \text{Supp}(P)$ を定まる $(0,1)$ -行列を $A = A(\mathcal{O}_1, \mathcal{O})$ とおく. すると, A は超連結となる. 逆に,

定理 8. 任意の n 次の超連結な $(0,1)$ -行列 B に対し, 上のような $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}$ と置換行列 P, Q が存在して, $B = P \cdot A(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}) \cdot Q$ となる.

参考文献

- [1]. R. Sinkhorn, A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices, Ann. Math. Statist. 35, 1963.
- [2]. R. Sinkhorn, P. Knopp, Concerning non-negative matrices and doubly stochastic matrices, Pacific Jour. of Math. vol. 21, 1967.