

C^* -代数の tensor 積上の C^* -norm の非一様性

東京大 教養 岡 年 隆 照

C^* -代数の tensor 積上の C^* -norm は cross norm であるがそれらについて、少なくとも 1 -norm ([8]; 又 [4], [7]) に拘わらず、R. Schatten [5] の意味で一様に cross であるという大方の予想があったようであるが、実はそうではないということがわかったのでもうに報告したい。

一般に Banach 空間 E, F の代数的な tensor 積 $E \otimes F$ の上の norm $\|\cdot\|_p$ は、それが

$$\|x \otimes y\|_p = \|x\| \|y\|, \quad \forall x \in E, \forall y \in F$$

を満すとき cross norm であるといわれ、更に E, F の任意の有界な線型写像 ρ, σ について $E \otimes F$ 上の線型写像

$$(\rho \otimes \sigma)(\sum x_i \otimes y_i) = \sum \rho(x_i) \otimes \sigma(y_i)$$

が有界で、 $\|\rho \otimes \sigma\|_p \leq \|\rho\| \|\sigma\|$ を満すとき一様に cross であるといわれる [5]。

Hilbert 空間 H 上の有界な線型作用素の全体 $B(H)$ を H の一つの完全正規直交系 $\{e_j\}_{j \in I}$ に関して行列表現する。
 またもう一つの Hilbert 空間 K 上に作用している C^* -代数 A , B が生成する von Neumann 代数 M とする。周知の通り $M \subset B(K)$ の von Neumann 代数 tensor 積 $M \otimes B(H)$ は M の作用素と要素とする有界な行列 ($\{e_j\}$ に関する) の全体とみなし, 特に $x \in M$ と $y = (\lambda_{jk}) \in B(H)$ に対して $x \otimes y$ は Kronecker 積 $(\lambda_{jk} x)$ とみなすことが出来る (参見 [1]). 又 $A \subset B(K)$ の α -tensor 積 $A \hat{\otimes}_\alpha B(H)$ は $M \otimes B(H)$ の中に埋め込まれているとして α ($\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|$).
 $\iota \in A$ の恒等写像, $\tau \in B(H)$ の "転置" とすると, 後者は周期 2 の逆自己同型写像で, $A \otimes B(H)$ 上の写像 $\iota \otimes \tau$ は A の作用素と要素とする行列の転置になる。そして次の事柄がわかる:

定理 1. (1) A が可換ならば $\iota \otimes \tau$ は $A \otimes B(H)$ の逆自己同型, 従ってその norm は 1.

(2) H が有限次元 ($\neq 1$ 次元), A が非可換で恒等作用素を含むならば $\iota \otimes \tau$ は $A \otimes B(H) = A \hat{\otimes}_\alpha B(H)$ 上有界でその norm は 1 より大である。

(3) H, K が無限次元で, $A = B(K)$ ならば $\iota \otimes \tau$ は A

① $B(H)$ 上の非有界線型写像である。

(2°) - (3°) は考えている α -norm が一概に cross ではないことを意味している。のみならず (3°) は 2 つの有界な線型写像の tensor 積が α -norm に同じで非有界になることからあるということを示している。

証明の方針を述べる。(1°) は容易、(2°) は有限行列の一般化が各要素の一般化と同値であること、次に述べる定理 2 から知られる。(3°): K の一つの完全正規直交系 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in J}$ に関して $B(K)$ を行列表現する。 I, J 共に正整数列 $\{1, 2, \dots\}$ を含むとしているとしてよい。そこで

$$r^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{k}{1} & 0 & \dots \\ & & & & & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix}, \quad t^{(n)} = \begin{pmatrix} x^{(1)} & & \\ \vdots & & \\ x^{(n)} & 0 & \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

とおくとき $\frac{2}{n} n = 1$ として $t^{(n)} \in A \otimes B(H)$ かつ $\|t^{(n)}\| = 1$ かつ $\|(1 \otimes \tau)(t^{(n)})\| = \sqrt{n}$ 。従って $\|1 \otimes \tau\| = \infty$ 。

定理 2. A, B を共に非可換な C^* -代数で identity を持つもの、 $\|\cdot\|_\beta$ は $A \otimes B$ の C^* -norm, π, ρ はそれぞれ A, B の周期 2 の自己同型写像、是自己同型写像とすると、 A

① の線型写像 $\pi \otimes \rho$ は $\|\cdot\|_3$ に對して (非有界であるか有界であつても) $\text{norm } \|\pi \otimes \rho\|_3$ は 1 より大である。

証明: $\pi \otimes \rho$ が有界ならば $A \hat{\otimes}_3 B$ 上に連続的に拡張されて、それと又 $\pi \otimes \rho$ と書くと、 $1 \leq \|\pi \otimes \rho\|_3 < \infty$.
 今 $\|\pi \otimes \rho\|_3 = 1$ とすると $\pi \otimes \rho$ は isometry になり、Kadison の定理 [3] により C^* -同型写像である。しかるに仮定から互いに非可換な $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ があるが、 $t = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 \in A \hat{\otimes}_3 B$ に対して $(\pi \otimes \rho)(t) \neq [(\pi \otimes \rho)(t)]^2$ なる矛盾が得られる。

なお定理 1 の (2) の ϕ -norm と ψ -norm ([2]) と ([4], [7]) は等しいから ψ -norm にも一様に cross でないものがあることになる。又定理 1 の (3) の $A = B(K)$ を、無限に多く互いに直交している同位射影作用素を含む C^* -代数でおきかえても同様である。

- [1] J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
- [2] A. Guichardet, On the tensor products of C^* -algebras, Doklady Akad. Nauk, 160(1965), 986-989.
- [3] R. V. Kadison, Isometries of operator algebras, Ann. Math., 54(1951), 325-338.
- [4] T. Okayasu, On the tensor products of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 325-331.
- [5] R. Schatten, The theory of cross-spaces, Princeton, 1950.
- [6] M. Takesaki, On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 16(1964), 111-122.
- [7] M. Takesaki. C^* -algebra のテンソル積とその表現, 講究録 5(1965 年 5 月), 1-18.
- [8] T. Turumaru, On the direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J., 4(1952), 242-251.