

多変数における Riemann-Hilbert の問題について

上智大 理工学部 喜多通武

$\bar{X}$ を射影代数多様体, D を $\bar{X}$ 内の divisor とし, $X = \bar{X} - D$ を affine 代数多様体とする. X 内基点 $*$ を取り, 複素ベクトル空間 V への表現 $\rho: \pi_1(X, *) \rightarrow GL(V)$ を考える. 二れより定まる X 上の local system を V_ρ とすると, 良く知られている様に, V_ρ が定める X 上の locally free sheaf $\mathcal{V}$ 上に完全積分可能な接続 $\nabla: \mathcal{V} \rightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{V}$ が定義されて, 二れの局所的な解をつくる層を V_ρ と一致させることが出来る. 二の時 Grothendieck-Deligne の比較定理は local system V_ρ 係数の cohomology $H^i(X; V_\rho)$ を $\mathcal{V}$ -valued rational forms のつくる次の複体で計算できることを主張する:

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \Omega_X^0(\mathcal{V})) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X, \Omega_X^1(\mathcal{V})) \xrightarrow{\nabla} \dots \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X, \Omega_X^n(\mathcal{V})) \longrightarrow 0$$

青本 [1], [2] は, $\mathcal{V}$ が free となる時, 二の計算を適当な状況の下で行ない, 興味ある次の様な結果を得ている:

$X = \mathbb{P}^n - D$ とし, V 上の接続 ∇ の接続形式を ω とする. 従って $dY = Y\omega$ という微分方程式の解の層として V_p を補える.

条件 (1) ω は D に沿って Deligne の意味の対数極をもつ

条件 (2) Δ を単位円板とし, 正則写像 $j: \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n$ を $j(0) \in D$ から $j^{-1}(D)$ は 0 のみとする. この時, ω の Δ への引き戻し $j^*(\omega)$ の各 0 での留数 $\text{res}_{z=0} j^*(\omega)$ は $\{0, 1, 2, \dots\}$ の固有値を持たない. この条件下,

$X = \mathbb{P}^2$ - 1 族の divisor 又は $X = \mathbb{P}^n - \{\text{hyperplanes}\}$ の時

$$H^q(X; V_p) = 0 \quad \text{for } q \leq n-1.$$

local system V_p と接続 ∇ は興味ある研究対象をなしているが, より具体的な研究をなすには, どのような条件下で global な接続形式 ω が見つかるか, 又 ω は D に沿ってどのような特異点を持つかを一般的に論じよう価値はあると思われる. 従って, 次の問題を設定する:

Riemann-Hilbert の問題: 複素多様体 $\bar{X}$ (連結とする) と $\bar{X}$ 内の divisor D 及び $X = \bar{X} - D$ 上の local system V_p が与えられる時, $\bar{X}$ 上の有理型形式 ω が X 上正則なものと同様に構成し V_p が完全積分可能な微分方程式 $dY = \omega Y$ の解の層となり, かつこの方程式は D に沿って確定特異点を持つ様にする. また ω の D に沿っての特異点を generically logarithmic

poleを持つ様にできるか?

これに対する解答は X の次元に因る様に思われる。

2次元の場合.

$\bar{X}$ を 2次元の連結な複素多様体とし, $X = \bar{X} - D$ は上の通りとする. Deligne-Mann の結果と Serre の連接層に関する接続の問題のいくつかの結果を用いると local system V_p を $\bar{X}$ 全体の locally free sheaf $\tilde{V}$ に接続でき, connection ∇ は $\tilde{V}$ 上 確定特異点を D に沿って持つ有理型 connection となる. 従って, $\tilde{V}$ が free sheaf となるなら, ∇ は X 上有理型な connection form ω を持ち, D に沿って generically logarithmic pole を持つ。

とくに X が 2次元 Stein 多様体の時, 同様の原理を用いて $\tilde{V}$ が topological ベクトル束として自明であるかを調べればよい. F. Peterson の結果を用いると, 2次元 Stein 多様体 X が $H^2(X; \mathbb{Z}) = 0$ を満たす時, X 上の任意の local system V_p に対して connection form ω を D に沿って generically log. pole を持つ様になる。

また $\bar{X}$ が 2次元 affine space $\mathbb{C}^2$ のとき, Quillen によって $\tilde{V}$ を代数的ベクトル束と見て自明になる。従って, この時は ω を $\mathbb{C}^2$ 上の rational form で D に沿って generically log. pole を持つものに取れる。

問題 : ω を無限遠直線 H_∞ に沿って generically
log. pole を持つ様に出来るか? また, どの様な ω に
関する条件下, 青木と類似の結果が成立するか?

3次元以上の時, $\bar{X} = \bar{X} - D$ とし, X 上の局所系 V_F を
 $\bar{X}$ 全体の連接層には接続できるが, 決して $\bar{X}$ 上の locally
free sheaf とし, 延長できない例を与えることが出来る。つ
まり 3次元以上の時, connection form ω を Röhrl や Deligne
流のベクトル束の接続として問題を捕えて構成しようとする
とうまく行かない——少くとも筆者には思われる。

例は次の様に構成される: H. Lindel は次の局所環の計算を
行った。即ち $\mathbb{C}^6(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2)$ 内 2つの式で定義される
解析空間 X は 原点を孤立特異点とし、正規の解析空間と
3次元の

なるが, 原点での X の局所環は Macaulay 環となる。

$$X : \quad x_i y_j - x_j y_i = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, i \neq j) \\ \sum x_i^3 = 0, \quad \sum x_i^2 y_i = 0, \quad \sum x_i y_i^2 = 0, \quad \sum y_i^3 = 0$$

多変数函数論の local parametrization theorem を用いて,
finite 正則写像 $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^3$ を構成できる。この f の

critical locus を D とする. $f: X - f^{-1}(D) \rightarrow \mathbb{C}^3 - D$ は
 不台岐な被覆写像であり, $X - f^{-1}(D)$ 上の constant sheaf $\mathbb{C}_{X - f^{-1}(D)}$
 の direct image $f_*(\mathbb{C}_{X - f^{-1}(D)})$ と $\mathbb{C}^3 - D$ 上の local system
 V_p を得る. 解析空間 X が正規である. $\sigma = \tau$ Riemann の除去
 可能定理が成立する $\Rightarrow$ $\mathbb{C}^3$ absolute gap-sheaf を用いる事
 実を用いて, 上の V_p は $\mathbb{C}^3$ の locally free sheaf に延長でき
 ないことが分かる. 証明や文献の詳細は筆者の論文 [3], [4]
 を参照して下さい.

文献

- [1] K. Aomoto : Les équations aux différences linéaires et
 les intégrales des fonctions multiformes, J. Fac. Scie. Univ.
 of Tokyo, Sect. IA, vol. 22, No. 3 pp. 271-297
- [2] K. Aomoto : Un théorème du type de Matsushima-Murakami
 concernant l'intégrale des fonctions multiformes, J. Math.
 Pures Appl; 52 (1973), 1-11
- [3] M. Kita : The Riemann-Hilbert problem and its application
 to analytic functions of several complex variables; Tokyo J. of

Math. vol. 2, No. 1, pp. 1~27
(1979)

[4] M. Kato : The Riemann-Hilbert problem in several
complex variables (II) *ibid.*, vol. 2 (1979) No. 2