

高次非線形シュレーディンガー方程式と波の周波数低下

京大理 内山 幸央 (Yukinaka Uchiyama)
京大理 川原 琢治 (Takuji Kawahara)

§1 はじめに

深水波の振幅のゆるやかな変調を記述する非線形シュレーディンガー方程式 (NLS) によると、周波数 ω をもつ一様な波列は変調不安定によって、そのエネルギーが基本波成分から ω に近い周波数成分 (sideband) に移る。このとき、upper sideband と lower sideband は同じ成長率をもち、どちらか一方が常に卓越することはない。また、NLS は可積分なので、やがて周波数 ω の一様波列へと回帰する。

しかし種々の実験や観測では、一様波列が変調を受けたのち再び一様波列へ回帰したときその周波数が ω よりも低下すること、すなわち lower sideband が卓越することが観測されている。このような周波数の down-shift は、NLS により高次の効果を考慮することによって説明できると考えられる。

NLS よりも一次だけ摂動近似を進めた高次方程式が Dysthe(1979) によって導かれている。この Dysthe 方程式を数値的に解いた結果、変調の間は lower sideband のエネルギーが upper sideband よりも大きくなるが、周波数の低下を伴わずに初期条件へ回帰するため、非可逆的な down-shift が現れないことが分かった (Lo & Mei(1985))。

そこでここでは、別の高次方程式を取り上げ、高次項が down-shift に及ぼす効果を、主に数値的に調べた。さらに down-shift に寄与する項が、一様波列の sideband instability に重大な変化を与えることを明らかにした。

§2 Higher-order NLS

我々の扱う高次方程式 (HNLS) は、複素振幅 $q(x, t)$ に対する次のような式

$$i \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q + i\epsilon \left\{ \beta_1 \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} (|q|^2 q) + (\beta_3 + i\sigma_3) q \frac{\partial |q|^2}{\partial x} \right\} = 0 \quad (1)$$

である。ここで、 $0 < \epsilon \ll 1$ 、 $\sigma_3 > 0$ であり、 β_i ($i = 1, 2, 3$) の符号は媒質による。もともと (1) は非線形光学の分野で、光パルスの伝播方程式として Kodama-Hasegawa(1987) によって導かれた。 β_i の項は Dysthe 方程式にも現れる高次項である。 σ_3 の項については光学では遅延ラマン効果を表す項である。Fabrikant(1984) は、散逸媒質における波束の変化を長波長成分と短波長成分との相互作用の形で記述したとき、長波長成分の式に散逸項を考慮すると σ_3 の項と同様な項が出てくることを指摘している。これは、短波長の波束の非線形相互作用によって誘起される平均流の散逸と関連する効果であると考えられているが、形式的に導入されたものであって、水面波の場合との具体的な対応は示されていない。

実際の変位 $\zeta(x, t)$ は、包絡波 $q(x, T)$ から

$$\zeta(x, t) = \epsilon \eta_0 [q(x, T) \exp \{i(k_0 x - \omega_0 t)\} + c.c.] + O(\epsilon^2) \quad (2)$$

$$x = \epsilon(t - v_g^{-1}x)/\tau_0, \quad T = \epsilon^2 x/\lambda_0$$

のように求まる。 k_0, ω_0 は搬送波の波数と周波数、 v_g は波束の群速度、 $\eta_0, \tau_0, \lambda_0$ は HNLS を (1) の形に規格化するためのスケーリング因子である (詳細は Kodama-Hasegawa(1987) を参照)。

数値シミュレーションでは、 $q(x, T)$ と

$$q(x, T) = \sum_k A(k, T) e^{ikx} \quad [k = \frac{2\pi}{L}n \quad (n = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} - 1)] \quad (3)$$

の関係にあるフーリエ係数 $A(k, T)$ の時間変化を、擬スペクトル法と 4 次のルンゲ-クッタ法を用いて解いた。モード数 N は 64 または 256 とし、時間刻み Δt は 0.01、周期 L は 2π または 10π とした。後に述べるように (1) はエネルギーに相当する量を保存するので、これの初期値からのずれが 0.1% 以内に収まっていることを監視しながら計算を進めた。

(2) と (3) より、

$$\zeta(x, t) = 2\epsilon \eta_0 \sum_k |A(k, T)| \cos \left\{ \left(k_0 - \frac{\epsilon}{v_g \tau_0} k \right) x - \left(\omega_0 - \frac{\epsilon}{\tau_0} k \right) t + \delta(k, T) \right\} + O(\epsilon^2) \quad (4)$$

$$\delta(k, T) = \arctan \left(\frac{\text{Im } A(k, T)}{\text{Re } A(k, T)} \right)$$

となる。モード k は周波数を $\Delta\omega = -\epsilon\tau_0^{-1}k$ だけシフトさせる。つまり、包絡波 $q(x, T)$ における波数の up-shift が、実際の波高における周波数の down-shift に対応することに注意しなければならない。

§ 3 高次項の効果

まず HNLS に含まれる四つの高次項の内、どの項が down-shift に最も寄与するかを見てみよう。それはエネルギー流束の保存関係を調べることによって示される。

NLS の最も単純な二つの保存量は、

$$I_1 = \int |q|^2 dx \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{i}{2} \int \left(q \frac{\partial q^*}{\partial x} - q^* \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx \quad (6)$$

で与えられる。 I_1 はエネルギー、 I_2 はエネルギー流束と呼ばれる。積分範囲は孤立波に対しては $-\infty$ から $+\infty$ 、周期的な波や数値計算に適用する場合は 0 から L である。

(5),(6) の時間微分をとると NLS では共に 0 となるが、HNLS では

$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \epsilon\sigma_3 \int \left(\frac{\partial |q|^2}{\partial x} \right)^2 dx - i\epsilon(\beta_2 + \beta_3) \int \left(q \frac{\partial q^*}{\partial x} - q^* \frac{\partial q}{\partial x} \right) \frac{\partial |q|^2}{\partial x} dx \quad (8)$$

のように修正される。(7) により HNLS はエネルギーを保存することが分かる。また(8) の右辺第一項がエネルギー流束に対し常に正の寄与をすることから、非可逆的なシフトを引き起こすのは σ_3 の項であることが分かる。このことはフーリエ空間で考えるとさらにはっきりする。(3) により I_2/I_1 は

$$K_C \equiv \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sum_k k |A(k, T)|^2}{\sum_k |A(k, T)|^2} \quad (9)$$

のように表される。 K_C はいわば“モードの中心”に相当するもので、どの辺りのモードが卓越しているかを示す指標となり得るが、(7),(8) は σ_3 の項が常に K_C を up-shift させることを表している。包絡波 $q(x, T)$ の up-shift が波高 $\zeta(x, t)$ の down-shift を表すことは §2 で注意した。

β_i の項がシフトに関与しないのは、これらを含む Dysthe 方程式でシフトが見られなかったことから明らかだが、我々も数値計算でこれを確認した(図 1)。(a) から

(c)($\sigma_3 = 0$) では一方的なシフトは見られないが、(d)($\sigma_3 \neq 0$) ではエネルギーのほとんどが $k > 0$ のモードに移っている。(a) の回帰は不完全であるため $k < 0$ 側にシフトしている可能性も考えられるが、 $|K_C| < 3 \times 10^{-6}$ で数値的にほとんど 0 であったので、 $k < 0$ のモードが卓越しているとは言い難い。

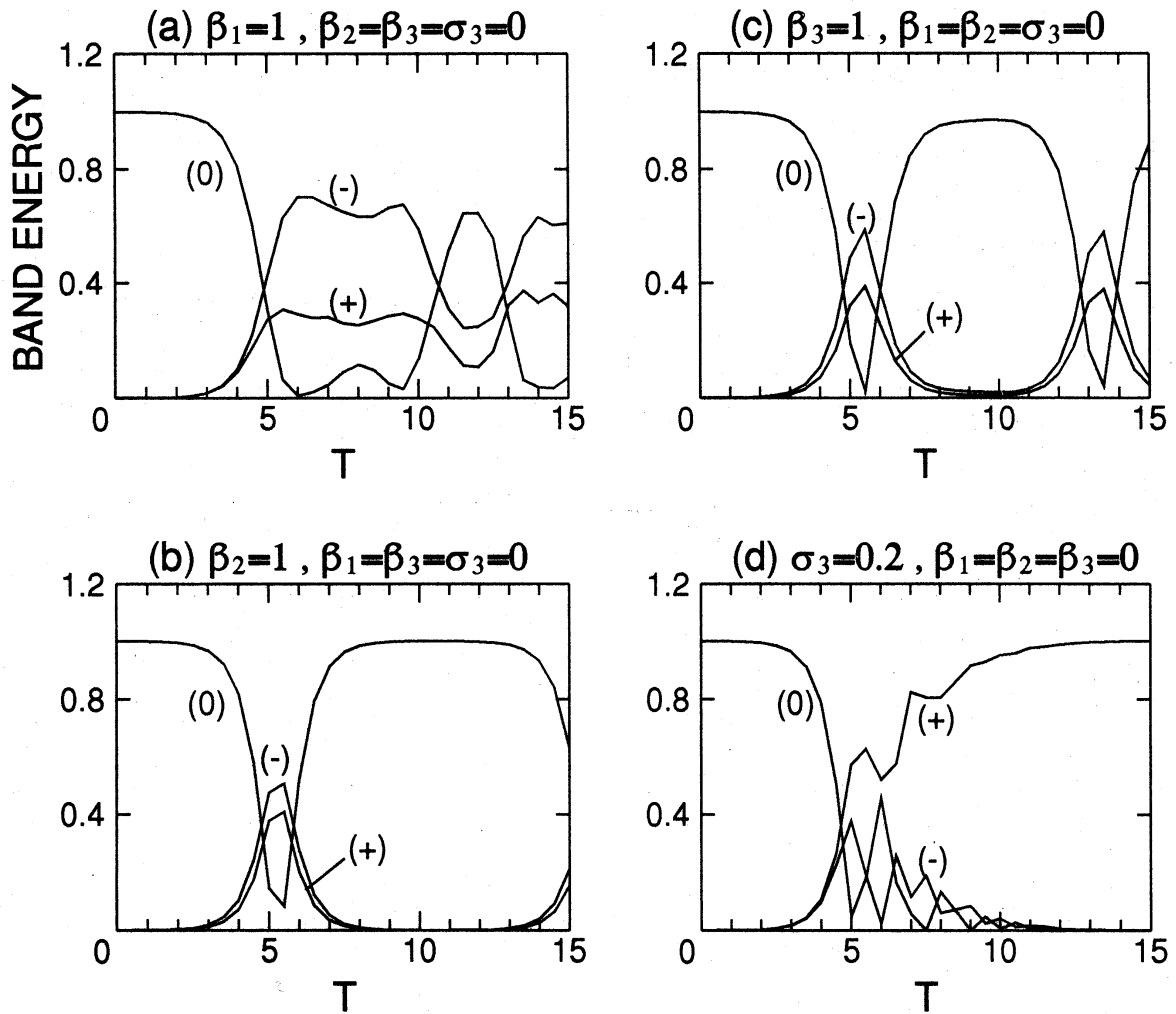


図1 sideband の成長に対する各高次項の効果

- (0) は $|A(0, T)|^2$ 、(+) は $\sum_{k>0} |A(k, T)|^2$ 、(-) は $\sum_{k<0} |A(k, T)|^2$ を表す
- $\epsilon = 0.2$, モード数 $N = 64$, 周期 $L = 2\pi$
- 初期条件は $A(0, 0) = 1$, $A(\pm 1, 0) = 0.01$, $A(|k| > 1, 0) = 0$

いくつかの特殊な場合には (5) から (8) の積分を実行することができて、シフトが T の関数として与えられる。

(例 1) 2 モードモデル

$$q(x, T) = A(m, T) e^{imX} + A(n, T) e^{inX} \quad (m > n) \quad (10)$$

$$m, n = (2\pi/L) \times \text{整数}$$

を、保存関係 (7), (8) に代入すると、

$$\begin{cases} \frac{d}{dT}(|A(m, T)|^2 + |A(n, T)|^2) = 0 \\ \frac{d}{dT}(m|A(m, T)|^2 + n|A(n, T)|^2) = 2\epsilon\sigma_3(m-n)^2|A(m, T)|^2|A(n, T)|^2 \end{cases} \quad (11)$$

となる。これを解いて、

$$\begin{cases} \frac{|A(m, T)|^2}{|A(m, 0)|^2} = 1 + \frac{e-1}{Ce+1} \\ \frac{|A(n, T)|^2}{|A(n, 0)|^2} = 1 - C \frac{e-1}{Ce+1} \end{cases} \quad (12)$$

$$C = |A(m, 0)|^2 / |A(n, 0)|^2$$

$$e = \exp\{2\epsilon\sigma_3(m-n)(|A(m, 0)|^2 + |A(n, 0)|^2)T\}$$

を得る。 $|A(m, T)|^2$ は T とともに単調増加し、 $|A(n, T)|^2$ は単調減少して $T \rightarrow \infty$ で 0 になる。つまり、エネルギーはいつも lower mode から upper mode へ移るので、包絡波で up-shift が現れることになる。

図 2 は初期に対称な 2 モードスペクトルを与えた場合について、数値計算と (12) とを比較したもので、 $m=1, n=-1$ にあたる。数値計算は 64 モードで行なったので、 T とともに $k = \pm 1$ 以外のモードも励起されてスペクトルが広がり、2 モードのみの記述では不十分になる。(12) と数値計算の不一致はこうした理由によるのだろうが、少なくとも初期の段階では両者はよく合っている。

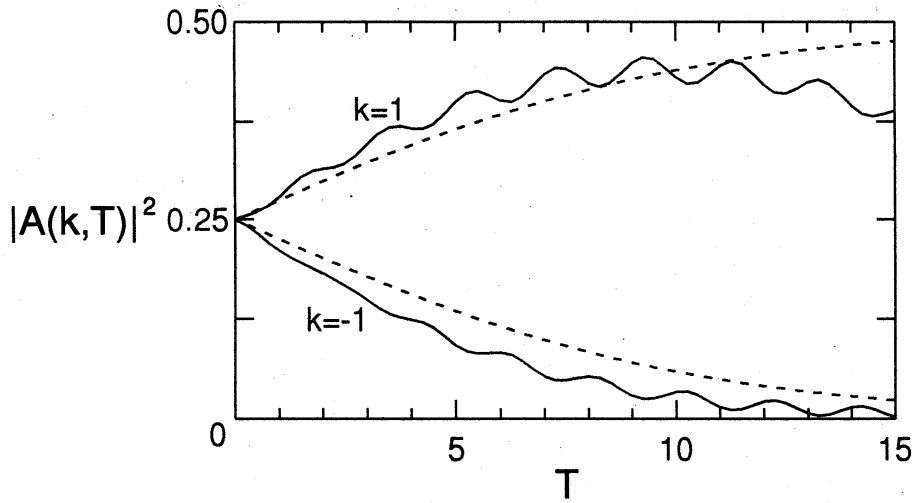


図2 upper mode および lower mode のエネルギーの時間変化

- 実線は数値計算 ($N = 64, L = 2\pi$)、破線は式 (12)
- $\epsilon = 0.2, \sigma_3 = 0.5, \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
- 初期条件は $A(\pm 1, 0) = 0.5, A(|k| \neq 1, 0) = 0$

(例2) 1-ソリトン解における up-shift

この場合の摂動計算は Kodama-Hasegawa によりすでに行われており、我々は数値計算との比較を行なった。

NLS には次のような 1-ソリトン解

$$q(x, T) = \eta \operatorname{sech} \eta(x - \nu) \exp\{i(\kappa x - \omega T)\} \quad (13)$$

$$\nu = \kappa T, \quad \omega = -\frac{1}{2}(\eta^2 - \kappa^2)$$

が存在する。 η, κ は定数パラメータであるが、HNLS では T によって変化すると考える。 $\eta(T), \kappa(T)$ とし (13) を保存関係 (7), (8) に代入すると、 η, κ の変化を決める式が

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dT} = 0 \\ \frac{d\kappa}{dT} = \frac{8}{15}\epsilon\sigma_3\eta^4 \end{cases} \quad (14)$$

のように得られる。また、 $\nu = \kappa T$ を $\nu = \int_0^T \kappa \, dT$ と一般化すると、 η_0, κ_0 を定数として η, κ, ν は

$$\eta = \eta_0 \quad (15)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \frac{8}{15} \epsilon \sigma_3 \eta_0^4 T \quad (16)$$

$$\nu = \kappa_0 T + \frac{4}{15} \epsilon \sigma_3 \eta_0^4 T^2 \quad (17)$$

となる。ソリトンの位相部分の波数である κ が T に比例して up-shift することが分かる。一方 (3), (13) より $x = \nu$ のとき

$$\kappa = \frac{\frac{\partial}{\partial X} q(\nu, T)}{iq(\nu, T)} = \frac{\sum_k k A(k, T) e^{ik\nu}}{\sum_k A(k, T) e^{ik\nu}} \quad (18)$$

となる。また、 $x = \nu$ で振幅 $|q|$ が最大になるので、数値計算においては $|q|$ を最大にする mesh-point を ν と定め、その ν を使って (18) (の実数部分) から κ を求めている。

図3にはこうして得た κ, ν が五つの異なるパラメータに対してプロットされている。 κ はほぼ T に比例して up-shift しており、その比例係数も σ_3, η_0^4 に比例している。また ν も2次関数的な時間変化を示している。図には示していないが η もほとんど一定だったので、1-ソリトンの up-shift は (15) から (17) によって良く表されと言える。ただし $\beta_i \neq 0$ の場合は数値計算と一致しなくなる。このときの波形 $|q|$ から、ソリトンの分裂が起こってソリトン間の相互作用が強く影響してくることによりこの不一致を生じると考えられる。

§3 Sideband instability

HNLS 中の σ_3 の項は包絡波の up-shift を引き起こすだけでなく、一様振動解の sideband (linear-) instability を質的に変化させる高次項でもあることが以下のように分かる。

HNLS (NLS を含む) には基本波の包絡波を表す一様振動解

$$q_0(T) = \eta \exp \left(i\eta^2 T \right) \quad (19)$$

が存在する。この解の sideband による変調不安定を考えよう。(19) に波数 $\pm k$ の微小な sideband 成分が加えられたとして、

$$q(x, T) = q_0(T) + p_+(T) e^{ikX} + p_-(T) e^{-ikX} \quad (k > 0) \quad (20)$$

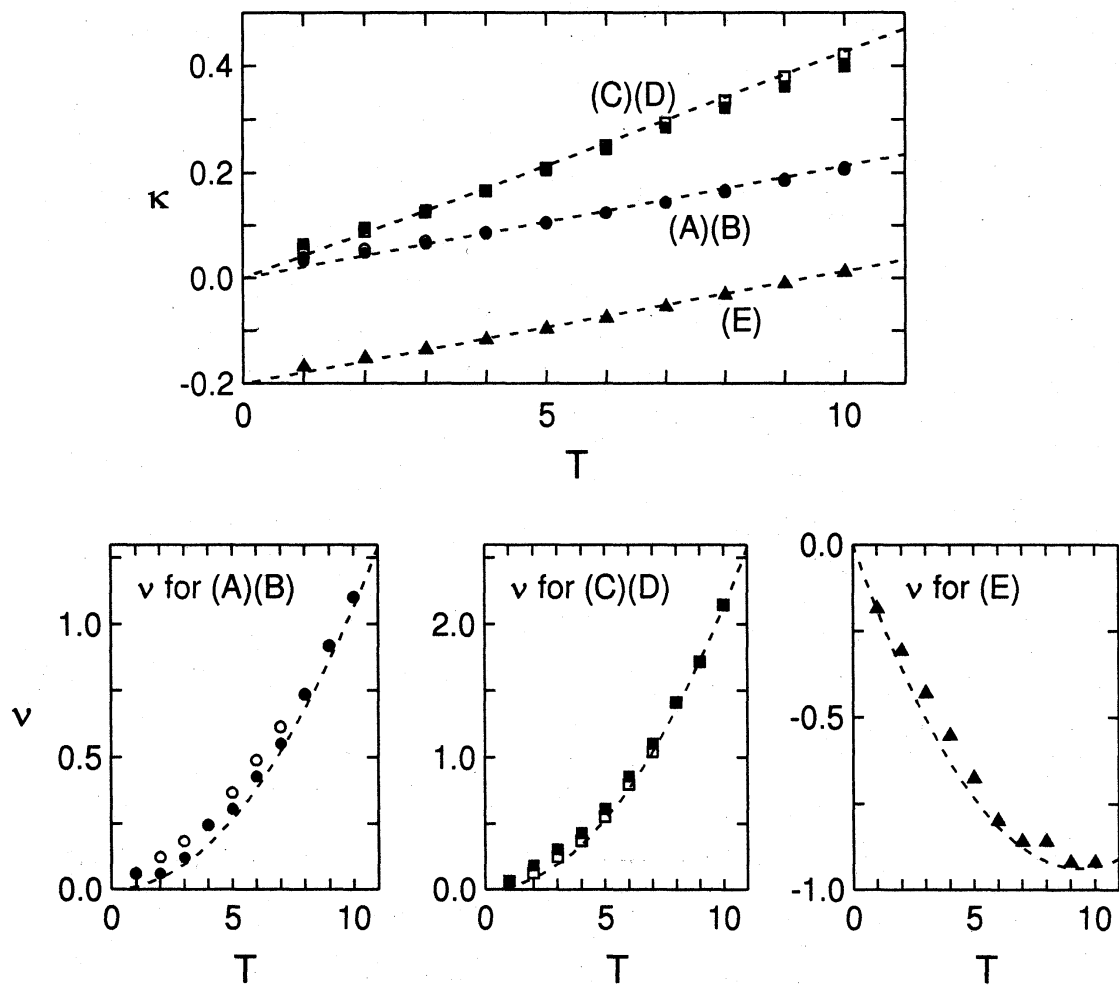


図3 ソリトンパラメータの時間変化

- 破線は式 (16),(17)
- $\epsilon = 0.2$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
- $N = 256$, $L = 10\pi$ (sech 幅に比べて十分長い)

(A)	●	$\sigma_3=0.2$	$\eta_0=1$	$\kappa_0=0$
(B)	○	$\sigma_3=0.4$	$\eta_0=2^{-1/4}=0.84089641525371$	$\kappa_0=0$
(C)	■	$\sigma_3=0.4$	$\eta_0=1$	$\kappa_0=0$
(D)	□	$\sigma_3=0.2$	$\eta_0=2^{1/4}=1.1892071150027$	$\kappa_0=0$
(E)	▲	$\sigma_3=0.2$	$\eta_0=1$	$\kappa_0=-0.2$

と表す。(20) を (1) に代入し p_+, p_- について線形化すると

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_-^* \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \epsilon\beta_1 k^3 + f - \epsilon(\beta_2 + g)\eta^2 k & (1 - gk)\eta^2 \\ -(1 + g^* k)\eta^2 & \epsilon\beta_1 k^3 - f - \epsilon(\beta_2 + g^*)\eta^2 k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_-^* \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$f = \eta^2 - \frac{1}{2}k^2, \quad g = \beta_2 + \beta_3 + i\sigma_3$$

を得る。(21) の 2×2 行列の固有値の (負でない) 実数部分を λ とすると、

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} k \sqrt{G + \sqrt{G^2 + \epsilon^2 \sigma_3^2 \eta^4 k^2}} \quad (22)$$

$$G = \{1 - \epsilon^2(\beta_2 + \beta_3)^2 \eta^2\} \eta^2 - \frac{1}{4} k^2$$

となる。 $\lambda \neq 0$ となるような k の領域では λ は sideband の線形増幅率を表す。すなわち、線形理論の段階では upper sideband も lower sideband も同じ増幅率で $|p_+|, |p_-| \propto e^{\lambda T}$ という成長をする。

(22) から、 σ_3 の項がある場合とない場合では高波数域 $k \gg 1$ での λ のふるまいが異なることが示される (図 4)。

(i) $\sigma_3 = 0$ のとき

不安定モード領域は $0 < k < 2\eta\sqrt{1 - \epsilon^2(\beta_2 + \beta_3)^2 \eta^2}$ で、このとき増幅率は $\lambda = k\sqrt{G}$ である。 $\epsilon = 0$ で NLS の場合 (Benjamin-Feir instability) に帰着するので、 σ_3 の項がない場合は B-F instability が $O(\epsilon^2)$ 程度の修正を受けるだけになる。

(ii) $\sigma_3 > 0$ のとき

(19) はすべてのモード $k > 0$ に対して不安定になり、特に $k \gg 1$ での増幅率は $\lambda \sim \epsilon\sigma_3\eta^2 k$ である。このように高波数ほど大きくなる増幅率が数値計算を困難にすることが考えられる。初期に (sideband であるから) $k = 0$ 付近のモードだけを励起しても、やがて励起される高波数モードがその大きな増幅率のために、低波数モードよりも速く成長することになる。すると高波数モードのエネルギーが低波数モードのエネルギーと同程度になり、有限波数打ち切りが良い近似ではなくなる。これはモード数を増やしてより広い波数域を扱うようにしても変わらないか、もっとひどくなる可能性もある。

したがって、 σ_3 の項がある場合には有意な時間まで計算を続けるため σ_3 を小さくとり、波数スペクトルが打ち切り波数付近で十分に小さくなっていることを監視していなければならない。

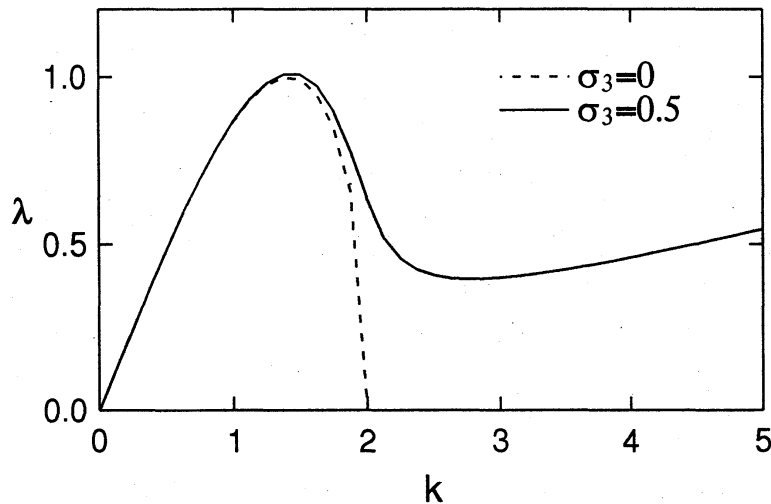


図4 線形増幅率(式(22))

$$\begin{pmatrix} \epsilon = 0.2 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \eta = 1 \end{pmatrix}$$

§5 まとめ

HNLS(1)に含まれる高次項の内、 σ_3 の項が周波数の down-shift に寄与することが分かった。この項が特徴的なのはエネルギーを保存しつつシフトを起こすことで、搬送波に対する粘性散逸や表面張力以外の効果でシフトが起こる可能性を示唆している。 σ_3 の項が Fabrikant の言うように平均流の減衰に対応することを明確に示すこと、この項を実際に水面波の基本式から導出することは今後の課題である。また、sideband instability における高波数モードの増幅を抑える項が見つかれば数値計算にとって好都合となる。

参考文献

- K.B.Dysthe : Proc. Roy. Soc. Lond. **A369**, 105 (1979)
- A.L.Fabrikant : Sov. Phys. JETP **59**, 274 (1984)
- Y.Kodama & A.Hasegawa : IEEE J. QUANTUM ELECTRONICS **QE-23**, 510 (1987)
- B.M.Lake, H.C.Yuen, H.Rungaldier & W.E.Ferguson : J. Fluid Mech. **83**, 49 (1977)
- E.Lo & C.C.Mei : J. Fluid Mech. **150**, 395 (1985)