

Fractal と Perron–Frobenius 作用素

日本大学文理学部 森 真

2002 年 11 月 28 日

概要

1 次元写像から得られる Cantor 集合の Hausdorff 次元を 1 次元写像に対応する Perron–Frobenius 作用素の立場から求める方法を与える．さらにその拡張について議論をする．

1 1 次元写像と Perron–Frobenius 作用素

$I = [0, 1]$ とする． $F : I \rightarrow I$ に対して

$$\int f(x)g(F(x)) dx = \int Pf(x)g(x) dx$$

で定義される $P : L^1 \rightarrow L^1$ を Perron–Frobenius 作用素という．具体的には

$$Pf(x) = \sum_{y:F(y)=x} f(y)|F'(y)|^{-1}$$

で与えられる．この作用素は正值かつ contracting である．さらに，この作用素により，力学系のエルゴード性が定まる．ラフにまとめれば次のようになる．

1. 1 が最大の固有値で simple であるならば，その固有関数 ρ で $\int \rho(x) dx = 1$ をみたすものは不変確率測度 μ の密度関数であり，力学系 (I, μ, F) はエルゴード的である．さらに単位円の上の固有関数は有界変動である．
2. 上の条件のもとで，単位円上に 1 以外の固有値がないならば，力学系は混合的である．

3. 上の条件のもとで, Perron-Frobenius 作用素の絶対値で2番目に大きい固有値を η とする. このとき $f \in BV$, $g \in L^\infty$ について, 混合性の収束

$$\int f(x)g(F^n(x)) dx \rightarrow \int f(x) dx \int g(x) d\mu$$

の速さは η^n である.

Perron-Frobenius 作用素の固有値を具体的に求める方法: それには母関数

$$s_g^J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_J(x)g(F^n(x)) dx$$

を考える.

$$\begin{aligned} s_g^J(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int P^n 1_J(x)g(x) dx \\ &= \int (I - zP)^{-1} 1_J(x)g(x) dx \end{aligned}$$

であるから, Perron-Frobenius 作用素の固有値の逆数は $s_g^J(z)$ の特異点になることが想像される. 図1のような写像 (Markov) については, 次のような再生方程式が得られる.

$$\begin{aligned} s_g^{(a)}(z) &= \int_{(a)} g dx + z\eta_a(s_g^{(a)}(z) + s_g^{(b)}(z)) \\ s_g^{(b)}(z) &= \int_{(b)} g dx + z\eta_b s_g^{(a)}(z) \end{aligned}$$

を得る.

$$s_g(z) = \begin{pmatrix} s_g^{(a)}(z) \\ s_g^{(b)}(z) \end{pmatrix}, \quad \chi_g = \begin{pmatrix} \int_{(a)} g dx \\ \int_{(b)} g dx \end{pmatrix}, \quad \Phi(z) = \begin{pmatrix} z\eta_a & z\eta_b \\ z\eta_b & 0 \end{pmatrix}$$

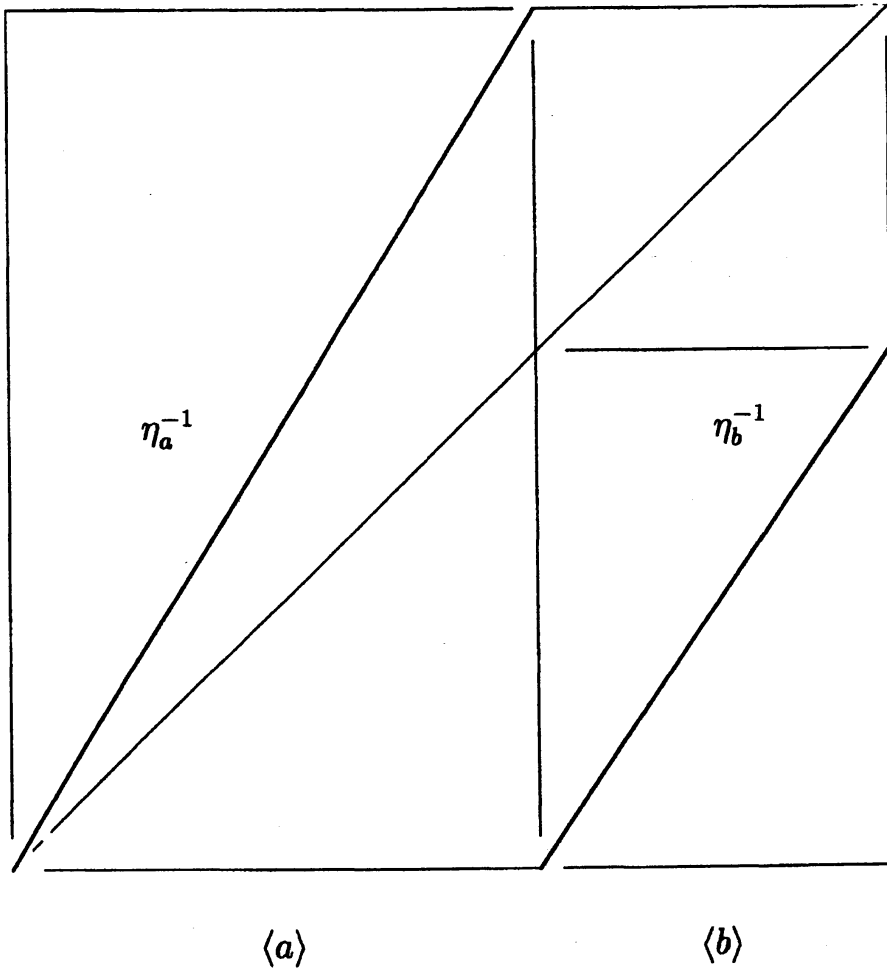
とおくと, 上の再生方程式は

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \chi_g$$

となる. このことから, Perron-Frobenius 作用素の固有値の逆数は $\det(I - \Phi(z)) = 0$ の解であることが想像される. さらに, $\text{trace } \Phi(z)$ は不動点, $\text{trace } \Phi^2(z)$ は2周期点に対応することから力学系の ζ 関数

$$\zeta(z) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{p: p=F^n(p)} |F^{n'}(p)|^{-1} \right]$$

図 1: piecewise linear Markov 変換の例



$$\begin{aligned}
\zeta(z) &= \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{trace } \Phi^n(z) \right] \\
&= \exp[-\text{trace}(I - \Phi(z))] \\
&= \frac{1}{\det(I - \Phi(z))}
\end{aligned}$$

を得て, Perron-Frobenius 作用素の固有値の逆数は ζ 関数の特異点であることを示すことができる.

実際には上の議論は $f \in BV$ かつ $|z| < e^\xi$ 内でのみ有効である. ここで

$$\xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{ess inf}_{x \in I} \frac{1}{n} \log |F^n(x)|$$

で, F が expansive である条件は $\xi > 0$ をみたすことである.

2 Cantor 集合への拡張

図 2 の場合には

$$C = \{x \in I: F^n(x) \in \langle a \rangle \cup \langle c \rangle\}$$

が Cantor 集合である. 同じ長さのワードによる被覆を考えると,

1. 長さ 1 のワードによる被覆は

$$|\langle a \rangle|^\alpha + |\langle c \rangle|^\alpha = (1, 1) \begin{pmatrix} |\langle a \rangle|^\alpha \\ |\langle c \rangle|^\alpha \end{pmatrix}$$

2. 長さ 2 のワードによる被覆は

$$\Phi_\alpha(z) = \begin{pmatrix} z\eta_a^\alpha & z\eta_a^\alpha \\ z\eta_b^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

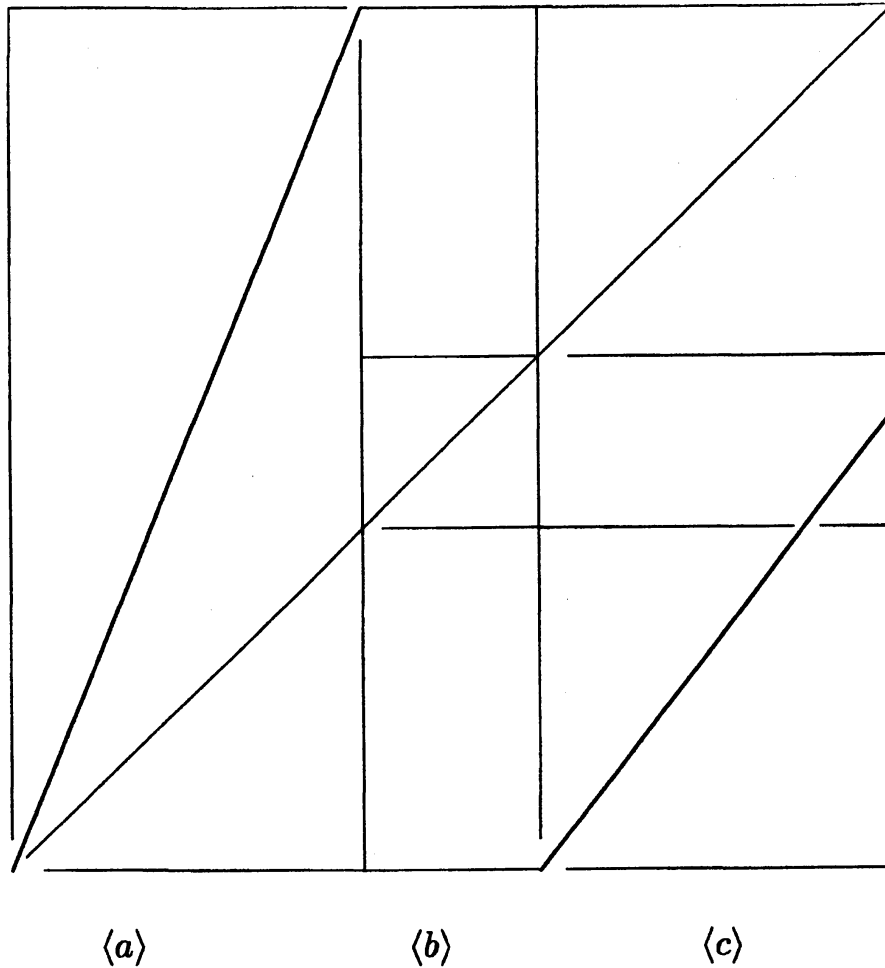
とおけば

$$|\langle aa \rangle|^\alpha + |\langle ac \rangle|^\alpha + |\langle ca \rangle|^\alpha = (1, 1) \Phi_\alpha(1) \begin{pmatrix} |\langle a \rangle|^\alpha \\ |\langle c \rangle|^\alpha \end{pmatrix}$$

3. 長さ n のワードによる被覆

$$(1, 1) \Phi_\alpha^{n-1}(1) \begin{pmatrix} |\langle a \rangle|^\alpha \\ |\langle c \rangle|^\alpha \end{pmatrix}$$

図 2: piecewise linear Markov 変換の例



により,

$$\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$$

の最大根が Hausdorff 次元になることが予想される. 少なくとも上からの評価を与えている.

α_0 を $\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$ の最大根とする. $\Phi_{\alpha_0}(1)$ の固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} l_a \\ l_c \end{pmatrix}$ とするとき, 図のような写像 G を考えることができる. この G と $F|_C$ とは記号力学系が等しいことに注意しよう.

測度 μ の Hausdorff 次元 $\dim_\mu$ とは C をルベーク測度が δ 以下のワードによる被覆

$$\sum_w (\mu(\langle w \rangle))^\alpha$$

を考えて, この $\delta \downarrow 0$ の極限の臨界点をもって, 通常の Hausdorff 次元と同様に定義したものである.

Theorem 1 (Billingsley の定理) 2つの測度 μ_1, μ_2 について

$$C \subset \left\{ x \in I: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_1 \langle a_1^x \cdots a_n^x \rangle}{\log \mu_2 \langle a_1^x \cdots a_n^x \rangle} = \alpha \right\}$$

をみたすならば

$$\dim_{\mu_2} = \alpha \dim_{\mu_1}$$

をみたす.

を用いる. μ_1 は G の作用する単位区間の上のルベーク測度を記号力学系を経由して C に induce したもの, μ_2 は F の作用する単位区間の上のルベーク測度とすると

$$\dim_{\mu_2} = \alpha_0 \dim_{\mu_1} = \alpha_0$$

をみたすことがわかる.

測度の Hausdorff 次元 $\dim_{\mu_2}$ が C の通常の Hausdorff 次元と等しいことは F が Markov であることから容易に導かれる.

3 この議論の拡張

上述の議論は次のような場合に拡張できる.

1. Non-Markov Case への拡張: 符号つき記号力学系の導入, 図 3 のような 2 つの関数の軌道を追うことで再生方程式を作ることができる. 以下の議論は上と同様である.
2. piecewise linear でない場合への拡張: 記号力学系の上で Markov 近似をすることで次元を上と下から近似することができる. 例えば連分数展開に対応する写像

$$F(x) = \frac{1}{x} \pmod{1}$$

において 1 と 2 のみを係数としてもつ点全体の Hausdorff 次元の計算が可能である.

図 3: signed symbolic dynamics

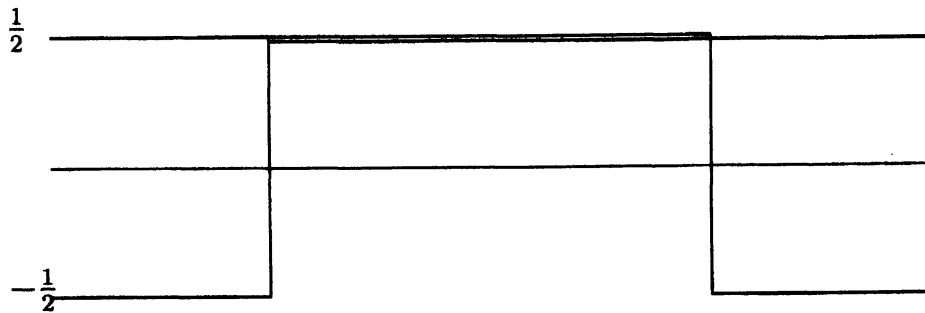
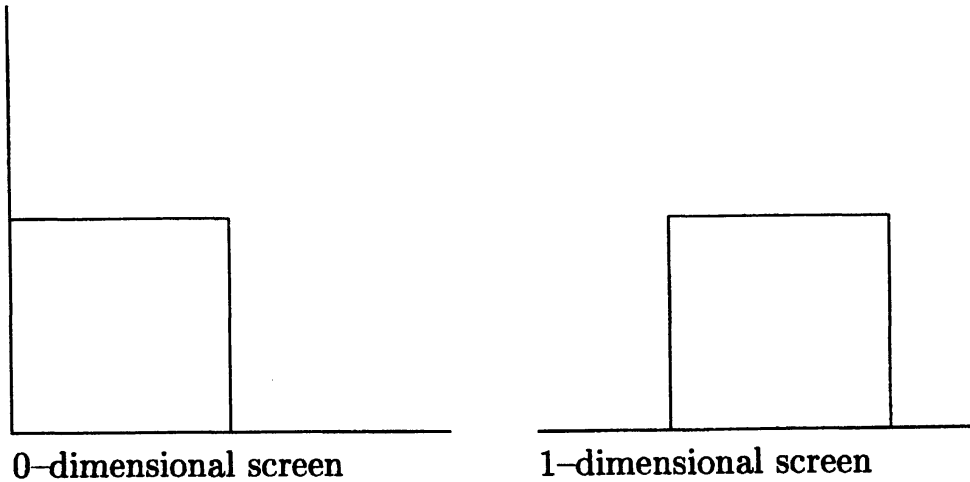


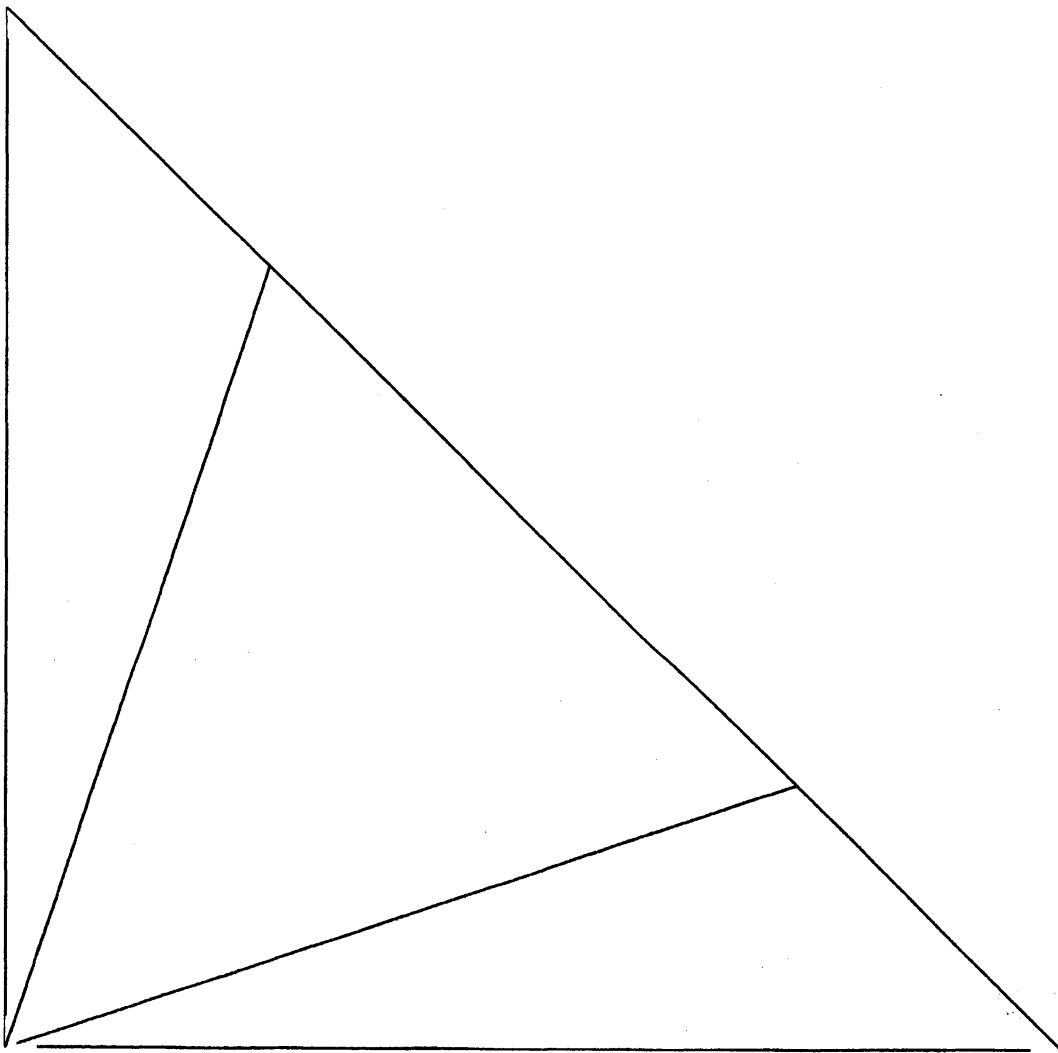
図 4: screen



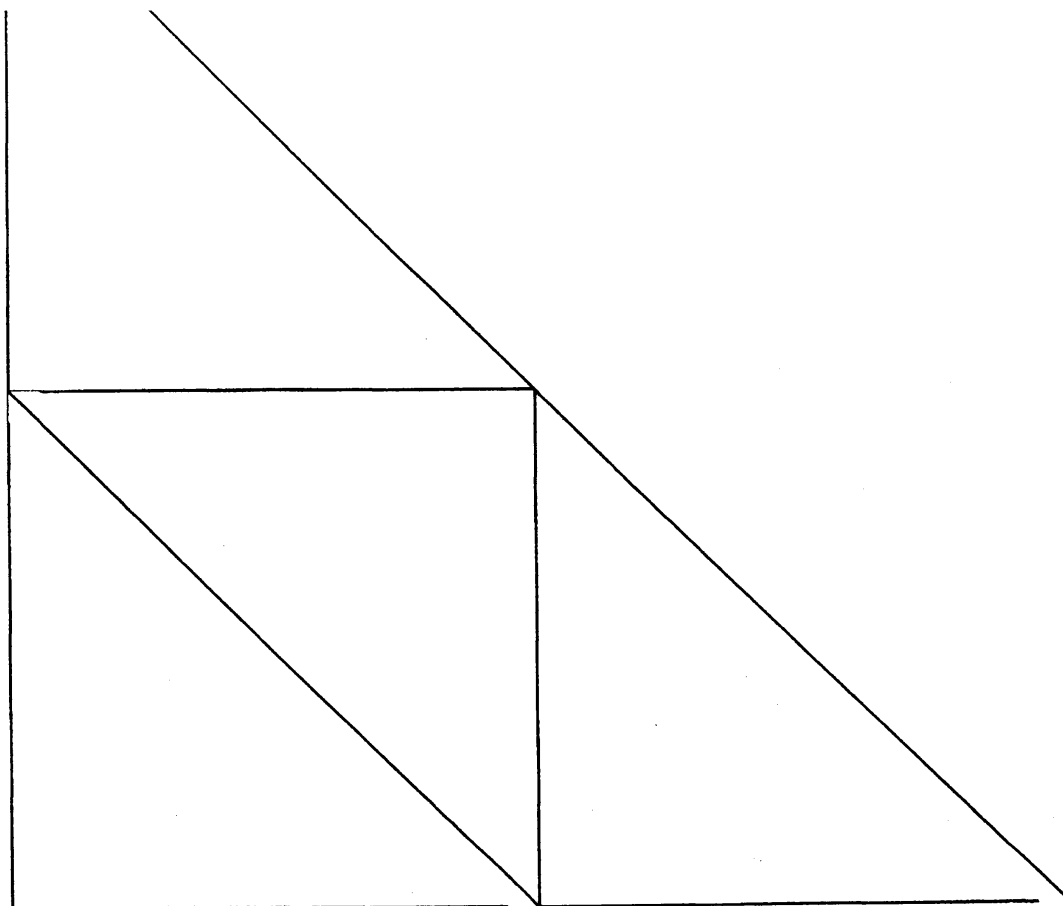
3. 高次元の場合への拡張: screen と呼ぶ図 4 のような関数の軌道を追うことで再生方程式を作ることができる. これによって求めることができる Fractal は Sierpinski タイプと Koch タイプの 2 つである.
4. 統計力学による Hausdorff 次元の表現: Gibbs 測度に表現することで Hausdorff 次元が温度 β の圧力 $p(\beta) = 0$ の解が Hausdorff 次元に等しいことがわかる.
5. 1 次元写像から作られる Tree の次元の計算

参考文献

- [1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons (1965).



Koch Curve



- [2] M. Mori, Sierpinski-Gasket determinant for piecewise monotonic transformations, *Osaka J. Math.* **29** (1992), 497–529.
- [3] M. Mori, On the convergence of the spectrum of Perron–Frobenius operators, *Tokyo J. Math.* **17** (1994), 1–19.
- [4] M. Mori, Dynamical system on Cantor set, *Tokyo J. Math.* **21** (1998), 217–231.
- [5] M. Mori, Cantor sets generated by piecewise linear map, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University*, **35** (2000), 145–171.
- [6] M. Mori, Hausdorff dimension as Thermodynamical Formalism, preprint.
- [7] . Mori, Hausdorff dimension of Trees generated by piecewise linear transformations, preparing.